Géométrie
à la surface de la Terre

Charlotte Bouckaert
avec la collaboration de Francis Buekenhout et Jacqueline Sengier

Date de création par Charlotte Bouckaert : 30 janvier 2011
Version n° 1 du 3 février 2011

Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Prof. Fr. Buekenhout – Prof. J. Sengier – C. Bouckaert
fbueken@ulb.ac.be – sengier@ulb.ac.be – charlotte.bouckaert@gmail.com
http://www.ulb.ac.be/sciences/urem/

Campus Plaine, CP – 213
Bd du Triomphe — 1050 Bruxelles
Tél. Secr. (32) (2) 650 58 64
Fax (32) (2) 650 58 67

1 Le plus court chemin

Quand nous voulons déterminer le plus court chemin entre deux points, nous tendons une corde entre ces deux points. Nous savons bien que dans le plan le plus court chemin entre deux points est un segment de *droite*.

FIGURE 1 – Geometricon

Nous nous demandons si nous pouvons transposer cette notion à la Terre entière.

Comme la Terre est grande et que nous ne disposons pas d'une ficelle assez longue, nous faisons un essai sur un planisphère.

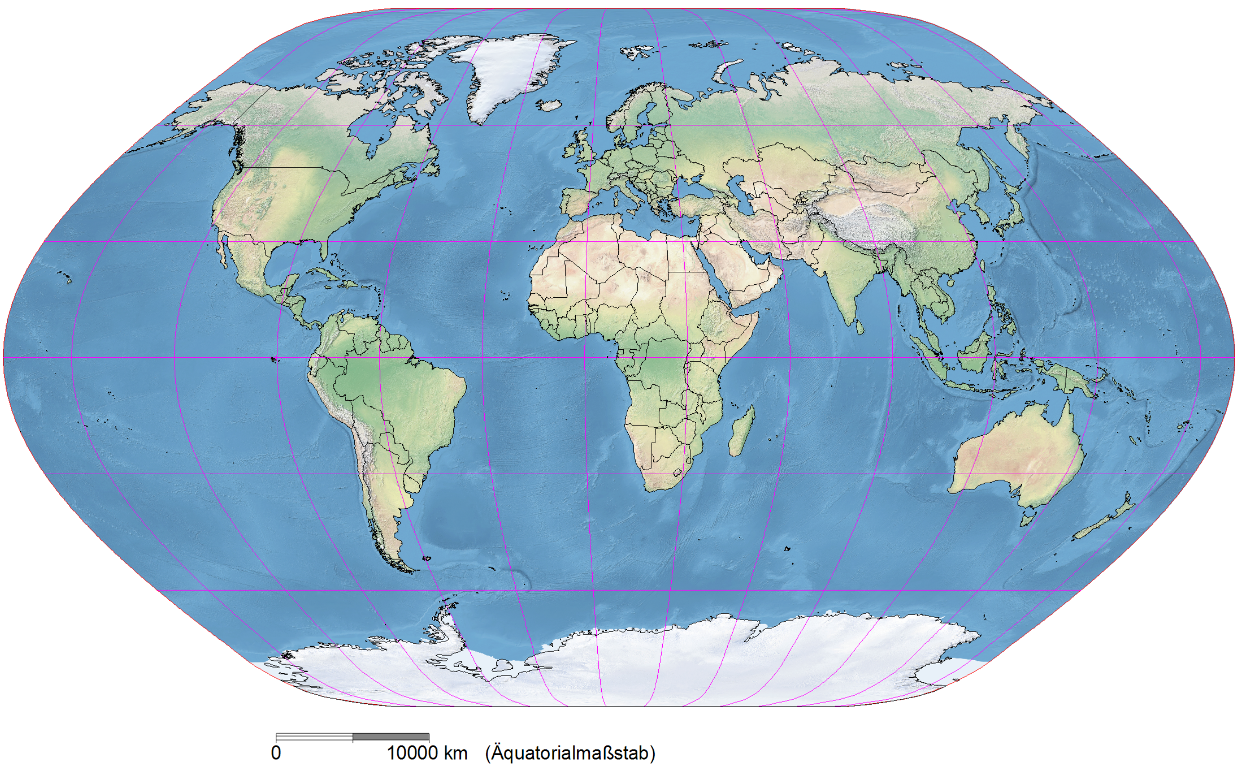

FIGURE 2 – Planisphère Wikipedia

Nous pouvons aussi tendre une ficelle entre deux points, par exemple entre New York et Madrid qui sont toutes deux sur le 40e parallèle.

FIGURE 3 – On tend une ficelle entre Madrid et Pékin

De même entre Madrid et Pekin

FIGURE 4 – On tend une ficelle entre Madrid et Pékin

Bien entendu nous nous rendons compte qu'il y a un problème. Le planisphère est une représentation plane de la Terre et suffit d'avoir pris l'avion jusqu'à New York pour savoir que le plus court chemin entre Madrid et New York ne suit pas le 40e parallèle.

1.1 Géodésiques

Sur Wikipedia (Réf. [11]) on trouve l'explication suivante :

> À l'origine, le terme géodésique vient de géodésie (du grec gaïa « terre » et daiein « partager, diviser »), la science de la mesure de la taille et de la forme de la Terre. La géodésique désignait donc pour des géomètres le chemin le plus court entre deux points de l'espace (sous entendu géographique).
>
> La transposition aux mathématiques fait de la géodésique la généralisation de la notion de « ligne droite » aux « espaces courbes ». La définition de la géodésique dépendant donc du type d'« espace courbe », l'acceptation précédente n'y est plus vraie que localement dans le cas où cet espace dispose d'une métrique.
>
> Le chemin le plus court entre deux points dans un espace courbe peut être obtenu en écrivant l'équation de la longueur de la courbe, et en cherchant la valeur minimale pour cette valeur. De manière équivalente, on peut définir une autre valeur, l'énergie de la courbe et chercher à la minimiser, ce qui aboutit aux mêmes équations pour une géodésique. Intuitivement, on peut chercher à comprendre cette seconde formulation en imaginant une bande élastique tendue entre deux points, qui, si elle suivait la géodésique, aurait une longueur minimale et donc une énergie minimale.
>
> Les exemples les plus familiers de géodésiques sont les lignes droites en géométrie euclidienne. Sur une sphère, les géodésiques sont les grands cercles. Le chemin le plus court entre un point A et un point B sur une sphère est donné par la plus petite portion du grand cercle passant par A et B. Si A et B sont aux antipodes (comme le pôle Nord et le pôle Sud), il existe une infinité de plus courts chemins.

Sur le cite BibMath (Réf. [1]) on trouve la définition suivante :

> Une courbe C, tracée sur une surface S, s'appelle une géodésique si, quelque soient les points M et N sur C, le plus court chemin joignant M à N tout en restant sur la surface S est obtenu en suivant C. Pensons à la Terre. Le plus court chemin pour aller du pôle Nord au pôle Sud est de suivre un méridien. Plus généralement, tout grand cercle (c'est-à-dire l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre) définit une géodésique de la sphère, et réciproquement toute géodésique de la sphère est un arc de grand cercle.

Voyons maintenant sur un globe si le trajet le plus court (la distance à vol d'oiseau) est bien celui qu'on pense :

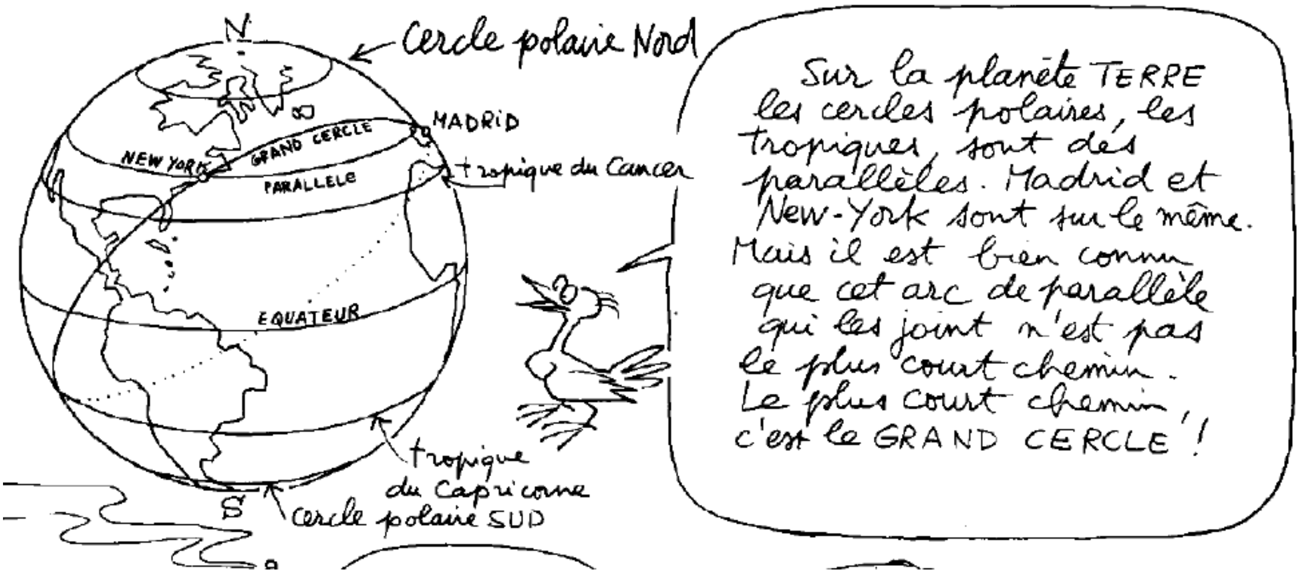

FIGURE 5 – Geometricon

Reprenons ce que dit Anselme Lanturlu : « New York et Madrid sont sur le même parallèle, mais il est bien connu que cet arc de parallèle qui les joint n'est pas le plus court chemin. Le plus court chemin c'est le grand cercle. »

1.2 Droite dans le plan, droite sur la sphère

Dans le plan, le plus court chemin (la géodésique) entre deux points distincts est la ligne droite. Deux points distincts définissent une et une seule droite.

Sur la sphère, le plus court chemin (la géodésique) entre deux points distincts est un arc de grand cercle.

Définition 1. *Une* droite *sur la sphère est un grand cercle, dont le centre est le centre de la sphère et le rayon celui de la sphère.*

Nous remarquons bien vite que nous ne pouvons pas reprendre tel que l'axiome du plan : Par deux points distincts passe une et une seule droite.

Nous avons remarqué qu'une infinité de méridiens passent par le pôle Nord et le pôle Sud. Le pôle Nord et le pôle Sud sont antipodaux. Tout point de la sphère possède un point antipodal.

Définition 2. *Soit P un point quelconque à surface d'une sphère S de centre O et de rayon R Le* point antipodal *de P est l'image de P par la symétrie de centre O sur S.*

Sur la sphère, nous utiliserons l'axiome :

Deux points distincts non antipodaux déterminent une et une seule droite.

Par deux points antipodaux de la sphère passent une infinité de droites distinctes (les grands cercles).

Remarquons que la distance entre un point et son antipodal est la distance maximale sur la sphère. Elle est égale à πR est le rayon de la sphère.

FIGURE 6 – Droite sur la sphère

2 Comparaison entre le plan et la sphère

2.1 Le parallélisme

Dans le plan, prenons une droite d_0 quelconque. Nous souhaitons

1. Tracer une droite d_1 qui a 0 point commun avec la droite d_0.
2. Tracer une droite d_2 qui a exactement 1 point commun avec d_0.
3. Tracer une droite d_3 qui a exactement 2 points communs avec d_0.
4. Tracer une droite d_4 qui a au moins 2 points communs avec d_0.

Transposons cette activité sur la sphère. Nous utilisons des balles de tennis et des élastiques pour matérialiser la sphère et les droites.

Nous remarquons que deux droites distinctes de la sphère ont toujours deux points communs qui sont antipodaux.

Il n'y a pas de droites parallèles sur la sphère.

2.2 Droites perpendiculaires

Dans le plan, prenons une droite d_0 quelconque. Nous souhaitons

1. Tracer une droite d_1 qui est perpendiculaire à la droite d_0.
2. Tracer une droite d_2 qui est perpendiculaire à la droite d_0 et qui est distincte de la droite d_1.
3. Que peut-on dire des perpendiculaires à une droite donnée ?

Transposons cette activité sur la sphère. Il y une infinité de droites perpendiculaires à une droite donnée. Toutes ces droites ont en commun deux points appelés *pôles* de la droite.

Dans le plan, prenons deux droites sécantes quelconques d_0 et d_1. Nous souhaitons tracer une droite d_2 perpendiculaire à d_0 et d_1.

FIGURE 7 – Deux droites sur la sphère ont deux points communs antipodaux

Transposons cette activité sur la sphère. Plaçons deux élastiques sur la balle de tennis pour matérialiser deux grands cercles. Nous remarquons qu'il y a bien une droite perpendiculaire aux deux droites, et dont les pôles sont les points communs des deux droites données. En faisant ceci, nous avons construit un triangle avec deux angles droits.

2.3 Polygones

2.4 Polygones à 2 côtés ?

Prenons deux points distincts dans le plan. Est-il possible de tracer un "digone" qui a pour sommets les deux points distincts ?

Sur la sphère, nous prenons deux points antipodaux par lesquels passent une infinité de droites. Nous sommes donc capable de construire un digone avec deux arcs de cercles distincts.

2.5 Polygones réguliers

2.5.1 Triangles réguliers

Dans le plan

1. Construire un triangle "régulier"
2. Construire un triangle "régulier" pas isométrique.
3. Que peut-on dire de tous les triangles réguliers du plan.

Transposons cette activité sur la sphère.

1. Construire un triangle "régulier" sur la sphère.
2. Construire un second triangle régulier qui ne soit pas isométrique au premier.
3. Ces deux triangles sont-ils semblables ?

2.5.2 Le cas particulier du triangle trirectangle

Figure 8 – Trois grands cercles deux à deux perpendiculaires

2.5.3 Carré, pentagone régulier, etc

A explorer.

3 La formule de Girard

Voir le document Buekenhout.

Références

[1] BibMath : Géodésiques. publié sur Intermet, Blog Bibmath, http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./g/geodesique.html.

[2] H. S. M. Coxeter : *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[3] Albert Girard : Albert Girard's biography. http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Girard_Albert.html. Bibliographie d'Albert Girard sur Mac Tutor, St Andrews.

[4] Albert Girard : Invention nouvelle en l'algèbre. http://openlibrary.org/details/inventionnouvel00giragoog, 1629. Texte complet scanné accessible par Google books.

[5] Simone Gutt : Si tu aimes les maths, fais les maths. site web de l'UREM http://dev.ulb.ac.be/urem/Si-tu-aimes-les-maths-par-Simone, 2009. Présentation PowerPoint à l'occasion de la conférence « Si tu aimes les maths »organisée par l'UREM-ULB le 6 mars 2009.

[6] Bertrand Hauchecorne et Suratteau Daniel : *Des mathématiciens de A à Z*. Ellipses, 1996.

[7] David W. Henderson et Taimina Daina : *Experiencing Geometry Euclidean and Non-Euclidean with History*. Pearson Prentice-Hall, 3e édition, 2005.

[8] István Lénárt : *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere.* Key Curriculum Press, 1996.

[9] Jean-Pierre Petit : Le géométricon. Bande dessinée téléchargeable sur le site de l'Association Savoir Sans Frontières, http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/LE%20GEOMETRICON.pdf.

[10] John Polking : The Area of the Spherical Triangle. page web http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos4.html accédée le 2009-06-03 08 :57 :35. Article comportant deux animations JAVA qui illustrent la démonstration de la formule de Girard.

[11] Rhombus : The Lénárt Sphere. http://www.rhombus.be/index1.html. En vente chez Rhombus au prix de 67,40 Euros.

[12] Wikipedia : Géodésique - wikipédia. publié sur Internet, encyclopédie Wikipedia, http://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9od%C3%A9sique.