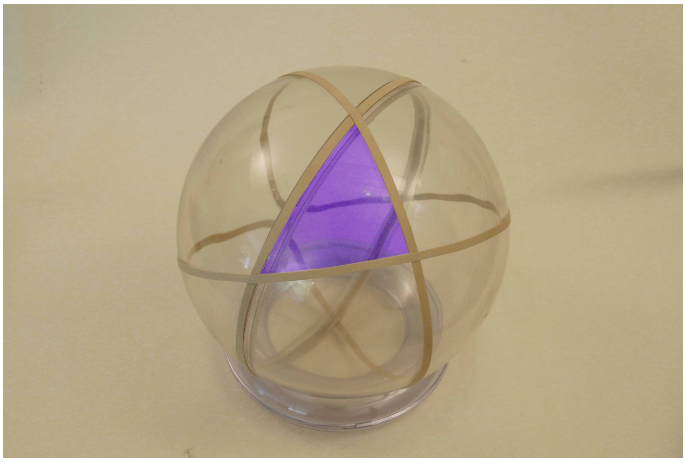
La somme des angles d'un triangle sphérique est-elle égale à 180° ?

Francis Buekenhout, Charlotte Bouckaert,
Simone Gutt, Alice Andersen,

UREM -ULB
charlotte.bouckaert@gmail.com



Date de création : le 3 juin 2009
Version n° 4 du 5 juillet 2009.

Math-UREM

Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Prof. Fr. Buekenhout - Prof. J. Sengier - Prof. R. Hinnion – C. Bouckaert
fbueken@ulb.ac.be – sengier@ulb.ac.be – rhinnion@ulb.ac.be
http://www.ulb.ac.be/sciences/urem/

Campus Plaine, CP – 213
Bd du Triomphe — 1050 Bruxelles
Tél. Secr. (32) (2) 650 58 64
Fax (32) (2) 650 58 67

1 Intoduction

La question du titre fut posée par Simone Gutt pour 205 personnes durant la journée *Si tu aimes les maths . . . fais les maths* (Réf. [4]).

Son motif était d'illustrer le fait qu'il ne suffit pas d'invoquer LE plan pour que la somme des angles d'un triangle soit égale à 180° et qu'une démonstration rigoureuse s'impose. Un bref examen du triangle sphérique éclaire la pertinence de la mise en question proposée.

Nous présentons la réponse à la question posée avec une démonstration très simple qui fut exhibée par Simone Gutt. Cette démonstration repose sur le théorème d'Albert Girard, (*Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam, 1629) (Réf. [1] p. 94 – 95 et [3])

2 Observation et raisonnement sur un modèle de sphère en plastique transparent : intersection de deux grands cercles

Nous disposons d'une sphère transparente de marque Lénárt (Figure 1 et Réf. [9]) accompagnée de plusieurs demi-sphères et d'autres matériaux.

FIGURE 1 – Sphère de Lénárt

Sur la sphère nous pouvons faire de la géométrie « plane » qui n'est plus euclidienne, plus plate. C'est de la géométrie sphérique.

Nous y disposons de points comme dans le plan. Nous y disposons d'un analogue des droites qui sont les grands cercles (Figure 2). Ce sont des plus courts chemins.

Sur le modèle transparent, un grand cercle se construit facilement à l'aide d'un élastique.

Deux grands cercles ont nécessairement deux points communs, ce qui nous change du plan où il existe des droites parallèles (Figure 3).

Nous constatons que les deux points sont antipodaux (symétriques par rapport au centre de la sphère.

FIGURE 2 – Droite sur la sphère

Démonstration. Soit o le centre de la sphère et σ_o la symétrie de centre o. Si A est un grand cercle, A est conservé par σ_o. Dès lors, si A et B sont des grands cercles distincts et c un point commun, la symétrie σ_o conserve A, conserve B et elle conserve $A \cap B$. Elle ne peut conserver le point c, donc $\sigma_o(c)$, le point antipodal de c est dans $A \cap B$.

Conclusion : toute paire de grands cercles A et B possède deux points communs qui sont antipodaux. □

Nous observons encore que A et B découpent la sphère en quatre *lunes*. Chaque lune est limitée par un demi-cercle sur A d'extrémité dans $A \cap B$ et un demi-cercle sur B d'extrémités dans $A \cap B$ (Figure 4).

3 Triangle sur la sphère

Construisons un triangle sphérique à l'aide de trois élastiques et grands cercles A, B, C distincts ne passant pas par un même point. Nous obtenons 6 points d'intersection a, b, c, a', b', c' où $\{a, a'\} = B \cap C$, $\{b, b'\} = C \cap A$ et $\{c, c'\} = A \cap B$.

Le découpage par A, B, C produit 6 lunes (Figure 7) et 8 triangles. Chaque lune est décomposée en deux triangles (Figure 7). Chaque triangle possède un triangle antipodal parmi les 7 autres (Figure 6).

Parmi les 8 triangles découpés par les grands cercles A, B, C nous observons un triangle plus petit abc et son antipodal $a'b'c'$.

Cette observation comporte des exceptions notamment celle où les 8 triangles ont la même aire, qui s'obtient par 3 grands cercles deux à deux perpendiculaires (Figure 8).

Au passage, nous voyons qu'il y a là 8 triangles ayant chacun trois angles droits.

FIGURE 3 – Deux droites sur la sphère ont deux points communs antipodaux

4 Aire du triangle abc (théorème de Girard)

Considérons le cas où abc est un petit triangle parmi les 8 triangles découpés par les grands cercles A, B, C.

Ce triangle révèle 3 lunes qui le contiennent et qu'on peut appeler AB, BC et CA. La sphère entière est couverte par ces 3 lunes et les trois lunes antipodales dont l'intersection est le triangle $a'b'c'$ (Figure 9).

Voici une relation concernant les aires des figures rencontrées.

$$\begin{multline} \text{aire lune } AB + \text{aire lune } BC + \text{aire lune } CA \\ + \text{aire lune } A'B' + \text{aire lune } B'C' + \text{aire lune } C'A' \\ = \text{Aire sphère} + 2 \text{ aire } abc + 2 \text{ aire } a'b'c' \quad (1) \end{multline}$$

Or les triagle abc et $a'b'c'$ sont isométriques donc aire $abc =$ aire $a'b'c'$.

Lemme 1. *L'aire d'une lune est proportionnelle à l'angle de la lune.*

Démonstration. Considérons une lune AB d'angle γ (en radians) (Figure 10).

On a le rapport suivant

$$\frac{\text{aire lune } AB}{\gamma} = \frac{\text{aire de la sphère}}{2\pi}$$

On sait que l'aire de la sphère est égale à $4\pi R^2$ et donc

$$\text{aire lune } AB = \frac{\gamma}{2\pi} 4\pi R^2 = 2\gamma R^2$$

□

Donc l'égalité 1 devient

$$2\gamma R^2 + 2\beta R^2 + 2\alpha R^2 + 2\gamma R^2 + 2\beta R^2 + 2\alpha R^2 = 4\pi R^2 + 2\text{aire } abc + 2\text{aire } a'b'c' \qquad (2)$$

ou

$$4(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = 4\pi R^2 + 4 \text{ aire } abc$$

On obtient la jolie et célèbre formule de la somme des angles du triangle sphérique abc

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\text{aire } abc}{R^2}}$$

Après ce développement, nous constatons qu'il était inutile de se restreindre à un petit triangle. La démarche convient à tout triangle.
Nous avons démontré que

La somme des angles de tout triangle sphérique est supérieure à 180°.

5 Albert Girard (1595 – 1632)

Albert Girard [1] (voir Figure 11 [2]) est né à Saint Mihiel en Lorraine en 1595 et est décédé à Leiden, Pays-Bas en 1632.

« Bien que né en Lorraine, le mathématicien ***hollandais*** Albert Girard ne quitte presque pas son pays. Ses travaux portent sur la géométrie sphérique où il donne des résultats sur les triangles et sur la trigonométrie. Il est le premier à utiliser les abréviations sin, tan et sec pour respectivement désigner le sinus, la tangente et la sécante. On lui doit aussi des études sur les polygones , sur les fortifications et la publication des œuvres de Simon Stevin. S'inspirant de Cardan, il affirme qu'en considérant ses racines "imaginaires", un polynôme de degré n admet exactement n racines si celles-ci sont comptées autant de fois que leur multiplicité. On lui doit des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme (Réf. [5] p. 147). »

En 1629, il publie l'*Invention nouvelle en l'algèbre* (Réf. [3]) dont voici deux extraits qui concernent les triangles sphériques.

Tout triangle sphericque (j'entens compris de cercles majeurs comme a l'accoustumée) est de telle nature que tous les trois angles font tousjours plus que 180 degrez, qui fait que jamais ny aura defaut en cela de pouvoir trouver l'exces : or tant plus un triangle sphericque occupe de superfice sphericque, tant plus la somme de ces trois angles excede le nombre de 180 : aussi tant moins un triangle sphericque occupe de la superfice de la sphere, d'autant moins la somme de ces trois angles excedera le nombre de 180 : mais nous delaisserons cela à la demonstration.

« Tout triangle sphericque (j'entens compris de cercles majeurs comme a l'accoutumée) est de telle nature que tous les trois angles font toujours plus que 180 degrez, qui fait que jamais ny aura defaut en cela de pouvoir trouver l'exces : or tant plus un triangle sphericque occupe de superfice sphericque, tant plus la somme de ces trois angles excede le nombre de 180 : aussi tant moins un triangle sphericque occupe de la superfice de la sphere, d'autant moins la somme de ces trois angles excedera le nombre de 180 : mais nous delaisserons cela a la demonstration. »

1. *** Nous poursuivons nous recherches concernant Albert Girard. Il se peut que Jean-Pierre Legoff dispose d'informations concernant A. Girard.
2. Illustation provenant du blog `http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2007/02/albert-girard.html`

Proposition.

Vn triangle spherioque de trois arcs majeurs, tient autant de degrez de superfice, que l'excez de la somme des trois angles sur 180 degrez.

« *Proposition*
Un triangle sphericque de trois arcs majeurs, tient autant de degrez que l'excez de la somme des trois angles sur 180 degrez. ».

Table des matières

Table des figures

Références

[1] H. S. M. Coxeter : *Introduction to Geometry.* John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[2] Albert Girard : Albert Girard's biography. `http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Girard_Albert.html`. Bibliographie d'Albert Girard sur Mac Tutor, St Andrews.

[3] Albert Girard : Invention nouvelle en l'algèbre. `http://openlibrary.org/details/inventionnouvel00giragoog`, 1629. Texte complet scanné accessible par Google books.

[4] Simone Gutt : Si tu aimes les maths, fais les maths. site web de l'UREM `http://dev.ulb.ac.be/urem/Si-tu-aimes-les-maths-par-Simone`, 2009. Présentation PowerPoint à l'occasion de la conférence « Si tu aimes les maths »organisée par l'UREM-ULB le 6 mars 2009.

[5] Bertrand Hauchecorne et Suratteau Daniel : *Des mathématiciens de A à Z.* Ellipses, 1996.

[6] David W. Henderson et Taimina Daina : *Experiencing Geometry Euclidean and Non-Euclidean with History*. Pearson Prentice-Hall, 3e édition, 2005.

[7] István Lénárt : *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere*. Key Curriculum Press, 1996.

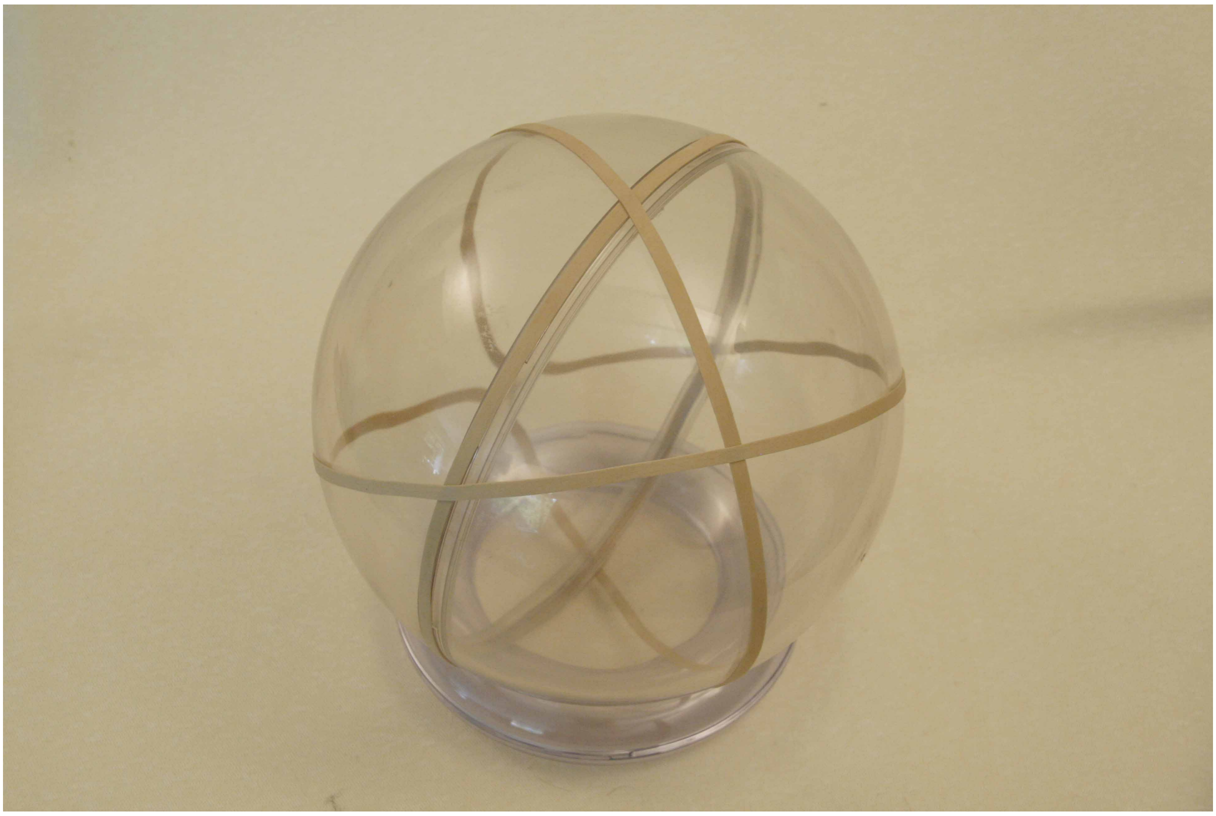
[8] John Polking : The Area of the Spherical Triangle. page web `http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos4.html` accédée le 2009-06-03 08 :57 :35. Article comportant deux animations JAVA qui illustrent la démonstration de la formule de Girard.

[9] Rhombus : The Lénárt Sphere. `http://www.rhombus.be/index1.html`. En vente chez Rhombus au prix de 67,40 Euros.

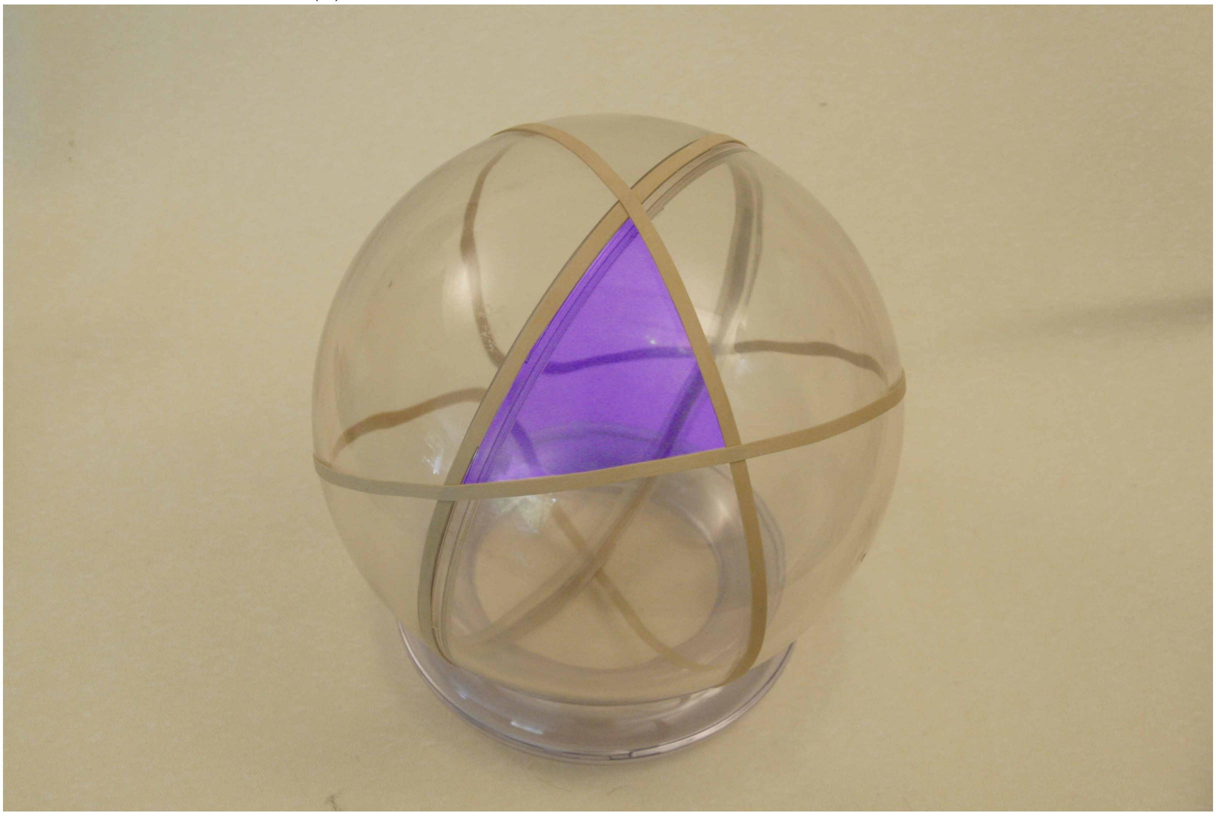
(a) Une lune

(b) 4 lunes

FIGURE 4 – Deux droites sur la sphère déterminent 4 lunes



(a) Trois grands cercles déterminant 8 triangles



(b) Un triangle sphérique

FIGURE 5 – Triangles sphériques déterminés par les grands cercles A, B, C

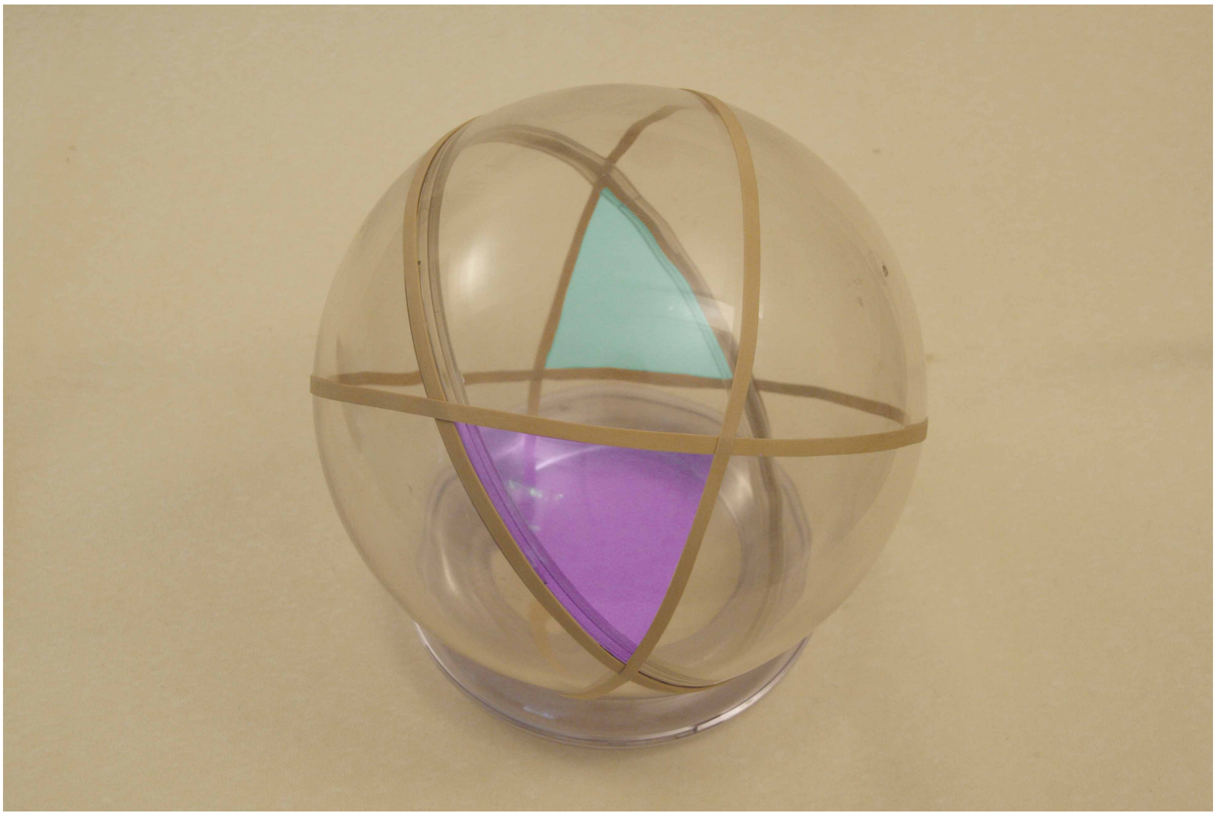


FIGURE 6 – Un triangle sphérique et son antipodal

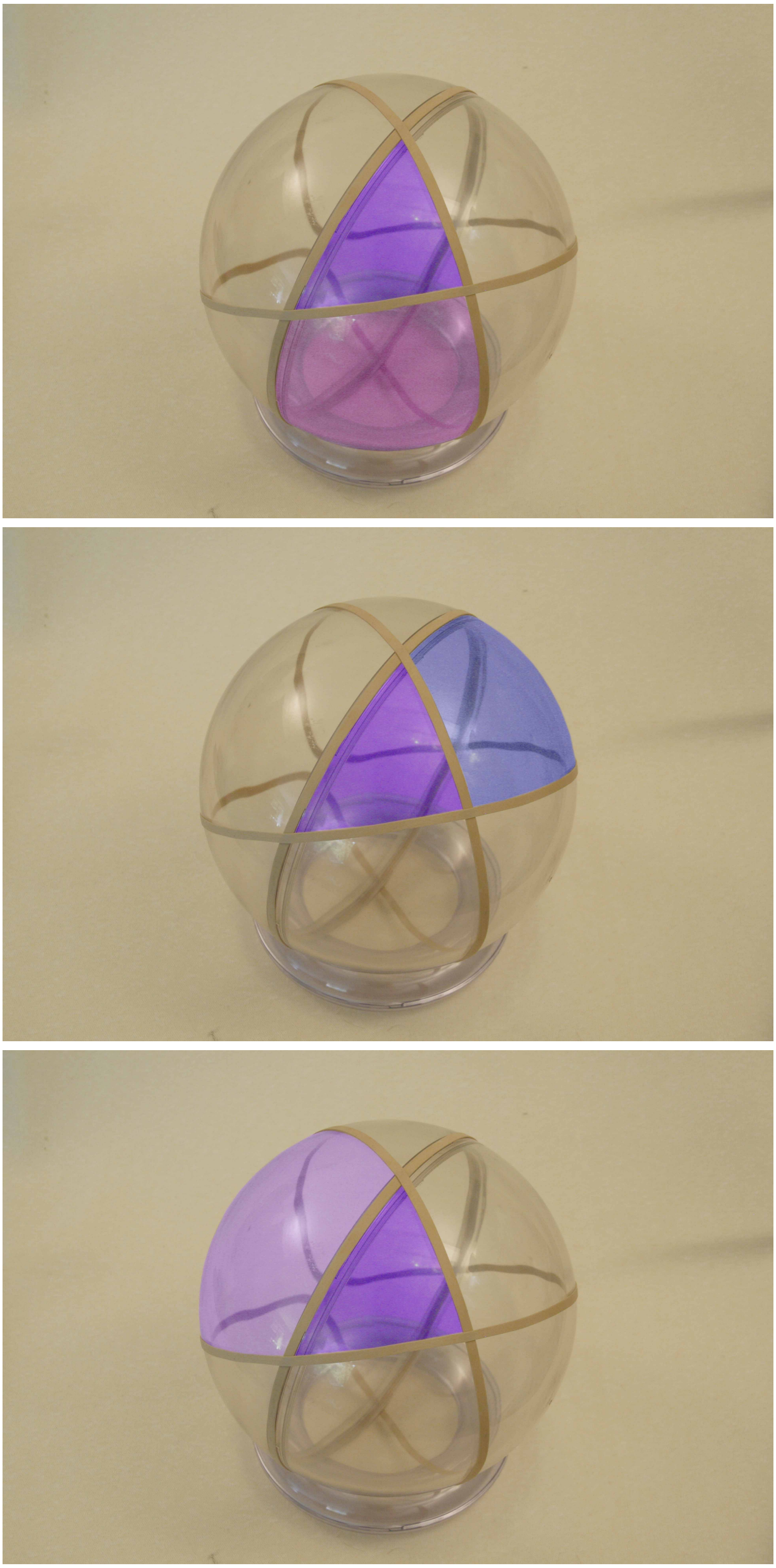


FIGURE 7 – Chaque triangle est contenu dans trois lunes

(a) 8 triangles de même aire

(b) Triangle sphérique avec 3 angles droits

Figure 8 – Trois grands cercles deux à deux perpendiculaires

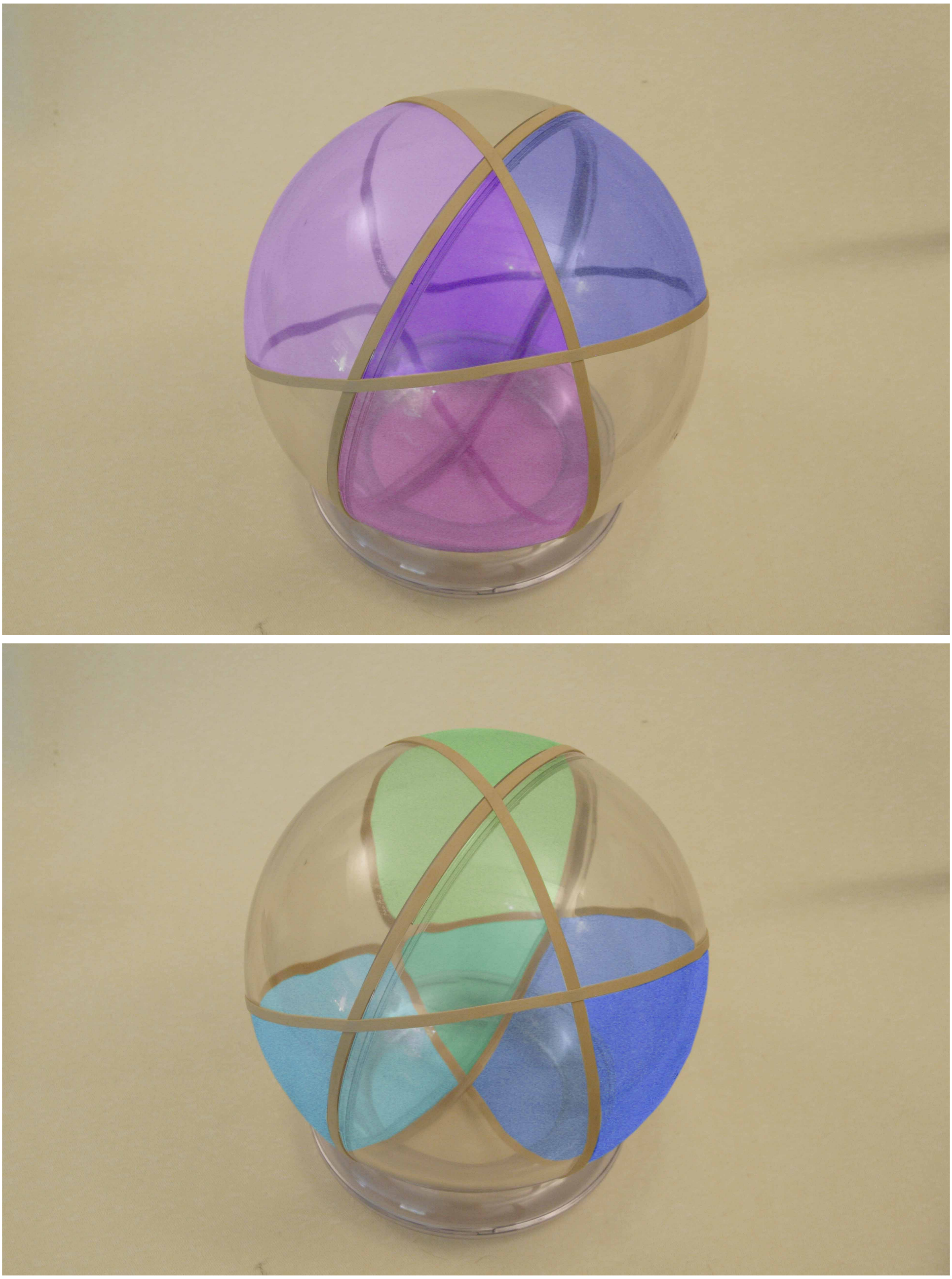


Figure 9 – 3 lunes et leurs antipodales couvrent la sphère

FIGURE 10 – Aire de la lune proportionnelle à son angle

FIGURE 11 – Albert Girard