Du cube au ballon de football

....

Animation de géométrie

présentée par Jacques LEFEBVRE

niveau : De la 3ème à la 6ème primaire

ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

UREM

Objectifs pédagogiques	Découverte de la géométrie spatiale et des solides à partir de nombreux modèles.
Pré-requis des élèves	Notion de base de géométrie : Points, Segments de droite, angles. Droites parallèles, droites perpendiculaires, angles droit. Utilisation d'une latte. Utilisation d'un rapporteur(pour les 5èmes et 6èmes)

Matériel de l'élève :

Latte
Rapporteur.
Bâton de colle
Papier collant.
Une paire de ciseaux pour papier.
Crayon.
Marqueur.

Matériel fourni :

Pour chacun :

Feuilles de papier.

Par table :

Pailles.
Différents polygones :
6 triangles équilatéraux. 4 carrés.
4 pentagones réguliers. 3 hexagones réguliers.

Sur des tables :

Modèles de solides.
Ballon de football.

Affiché : Carte d'Europe

Introduction :

La géométrie est une partie des mathématiques qui étudie les figures du plan et les solides, leurs transformations ou déformations.

Les figures planes :

1. Qu'est ce qu'une figure plane ?

   Une figure plane pourrait être définie comme une figure que l'on peut représenter entièrement sur une feuille de papier.

2. Liste des principales figures planes vues en primaire :

   triangle,
   quadrilatères : carré, rectangle, parallélogramme, losange, trapèze.
   Pentagone, hexagone.
   Cercle, disque.

3. Classifications des figures planes :

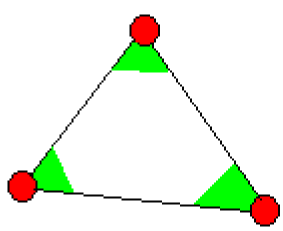
   On va considérer uniquement les figures formées de points et de (segments de) droites. On élimine ainsi les figures « courbes » : le cercle et le disque.

   Les segments de droites formant les figures se nomment ***côtés***.
   Ces côtés se coupent en des points nommés ***sommets***.
   Les coins à l'intérieur des figures s'appellent ***angles***.

   Commençons par « la plus petite » c'est à dire par la figure fermée comportant le moins de points et de (segments de) droites.

   3a Le triangle :

   Figure plane fermée formée de trois segments de droite.

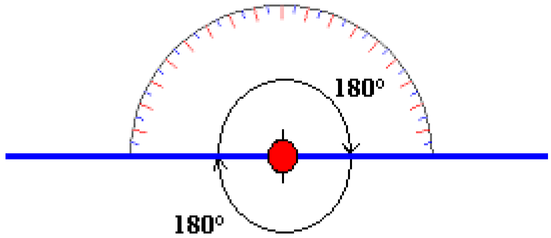


La figure possède :
- 3 sommets.
- 3 côtés.
- 3 angles .

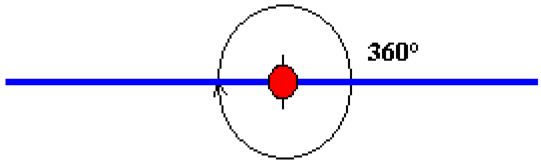
On mesure les côtés avec une *latte* graduée en centimètres (unité de longueur)
On mesure les angles avec un *rapporteur* gradué en degré (unité de mesure d'un angle).

Etude des angles d'un triangle :

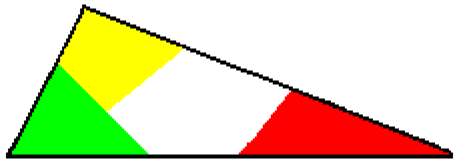
→ les élèves tracent sur une feuille une droite et un point sur cette droite. En plaçant le centre du rapporteur en ce point, il recherchent l'angle formé .au dessus de la droite. De même pour l'angle du dessous.

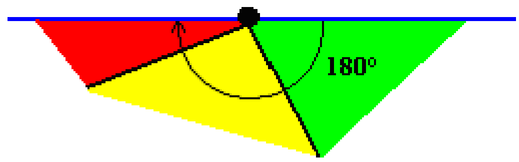


Conclusion : L'angle total mesure 360°



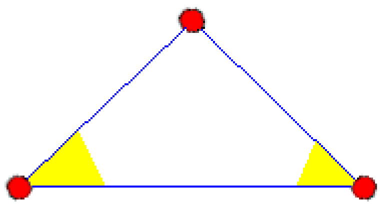
On calcule la somme des mesures des angles d'un triangle quelconque en plaçant les angles d'un modèle suivant une ligne droite..



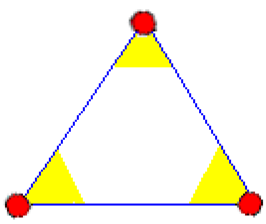


Conclusion :
La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°

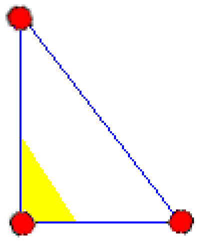
On distingue plusieurs types de triangles :



Les triangles isocèles :
Deux côtés égaux et deux angles égaux.



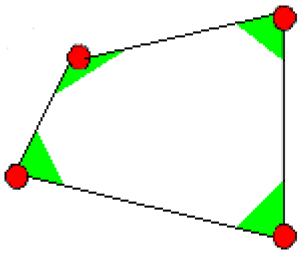
Les triangles équilatéraux :
Deux côtés égaux et deux angles égaux

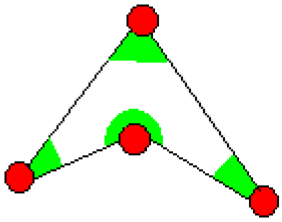


Les triangles rectangles avec un angle droit.

3b Les quadrilatères plans :

Figure plane fermée formée de quatre segments de droite.



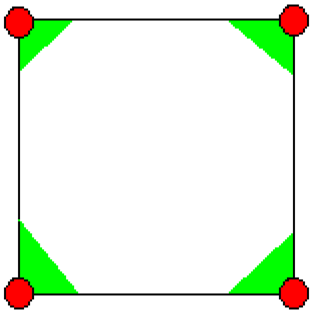


La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés.
- 4 angles .

Les plus connus sont :

Le carré :

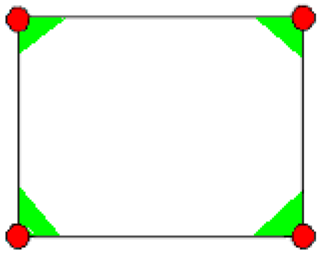
Quadrilatère ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits.



La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés qui sont égaux.
- 4 angles qui sont des angles droits.

Le rectangle :

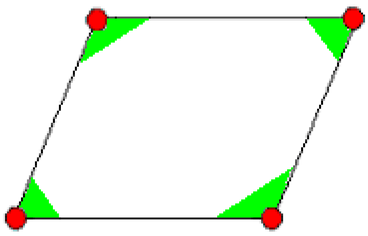
Quadrilatère ayant quatre angles droits.



La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés.
- 4 angles qui sont des angles droits.

Le parallélogramme :

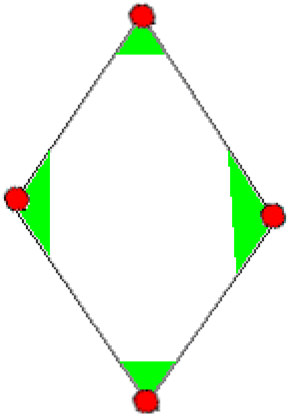
Quadrilatère ayant des côtés opposés deux à deux parallèles .



La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés qui sont parallèles 2 à 2 .
- 4 angles.

Le losange :

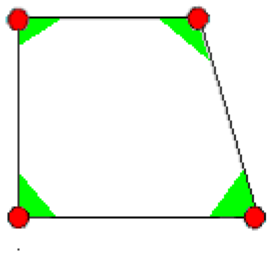
Quadrilatère dont les côtés ont tous la même longueur.



La figure possède :
- 4 sommets.
- 4 côtés qui sont égaux .
- 4 angles .

Le trapèze :

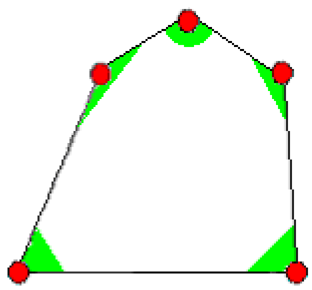
Quadrilatère dont deux côtés opposés (appelés bases) sont parallèles.

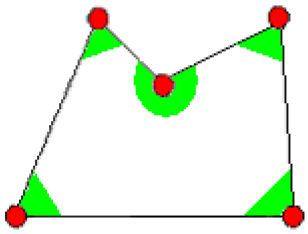


La figure possède :
4 sommets.
4 côtés dont deux sont parallèles. .
4 angles .

3c. Les pentagones :

Figure plane formée de cinq segments de droite.

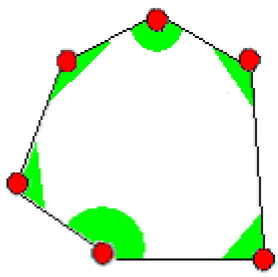


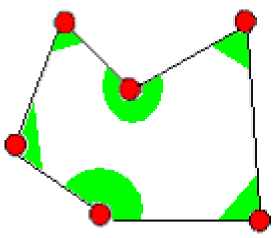


La figure possède :
5 sommets.
5 côtés.
5 angles .

3d. Les hexagones :

Figure plane formée de six segments de droite.





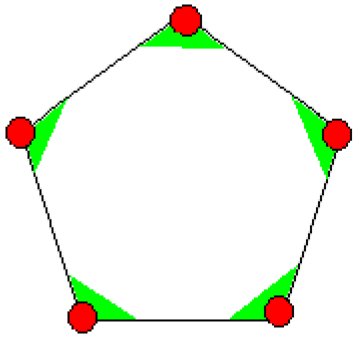
La figure possède :
6 sommets.
6 côtés.
6 angles .

On donne à toutes ces figures un nom plus général : le nom de polygones

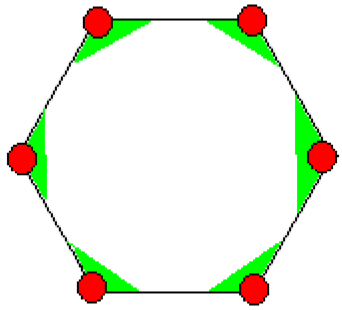
4. Les polygones réguliers :

Parmi ces polygones, on ne va considérer que ceux qui ont des côtés et des angles égaux. On ne prendra ainsi que :

- Les triangles équilatéraux.
- Les carrés



- Les pentagones formés de quatre côtés égaux et de quatre angles égaux.



- Les hexagones formés de cinq côtés égaux et de cinq angles égaux.

On nommera ces dernières figures des polygones réguliers.
On élimine ainsi : le rectangle, le parallélogramme, le losange, le trapèze.

→ présenter différentes figures et demander aux élèves s'ils sont réguliers ou non , le nom pour les côtés, sommets et angles.

→ construction avec des pailles : chaque élève construit un triangle avec 3 pailles.

Les solides :

1. Qu'est ce qu'un solide ?

   Un solide est une construction fermée faite à partir de polygones.

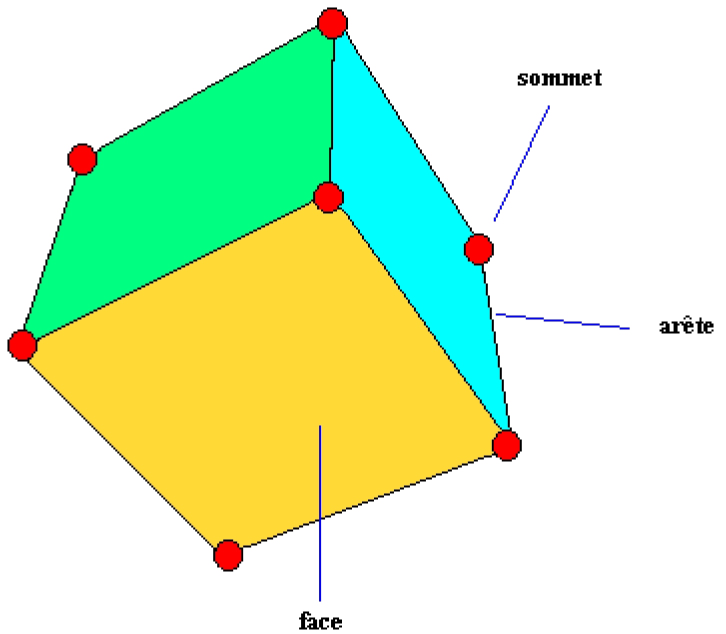
2. Quels sont ces solides ?

   → *les élèves donnent le nom de solides découverts en classe.*

   Prisme, pavé (parallélépipède) , pyramide, cube.
   Cylindre, cône, sphère.

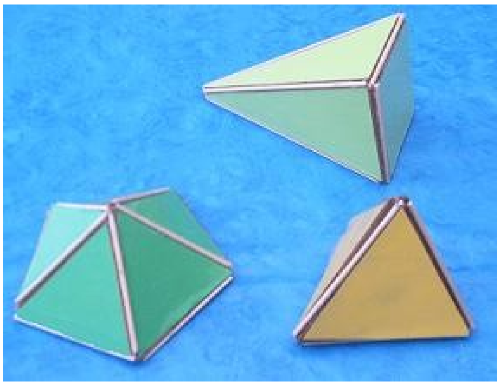
3. Classifications des solides :

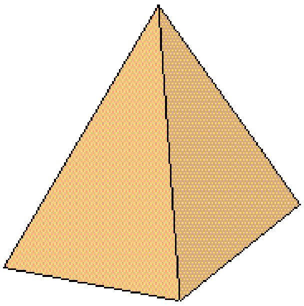
   On envisage ici les solides fermés construits avec des polygones.
   On élimine ainsi les figures « rondes » tels que le cylindre, le cône et la sphère.

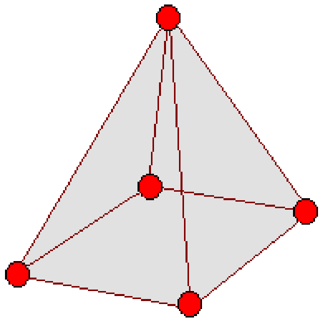


Les polygones formant le solide se nomment ***faces***.
les côtés et sommets de ces faces étant appelés respectivement ***arêtes*** et ***sommets***.

3a. La pyramide:

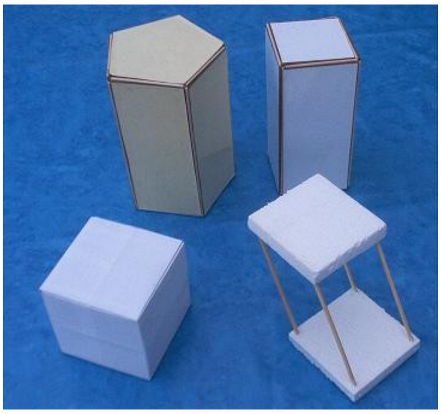


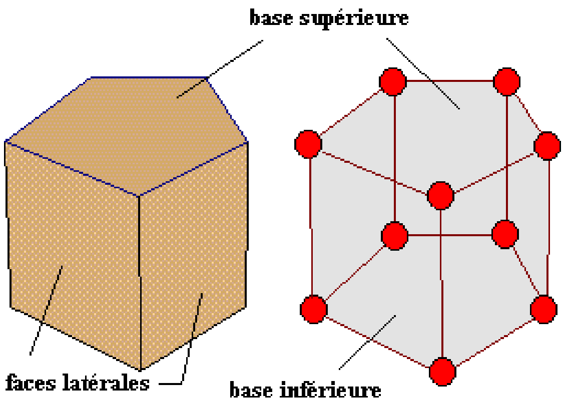




Une pyramide est un solide obtenu en reliant les sommets d'un polygone (la base) à un point (hors de la base) nommé sommet de la pyramide. Les faces latérales obtenues sont ainsi des triangles.

3b. Le prisme :

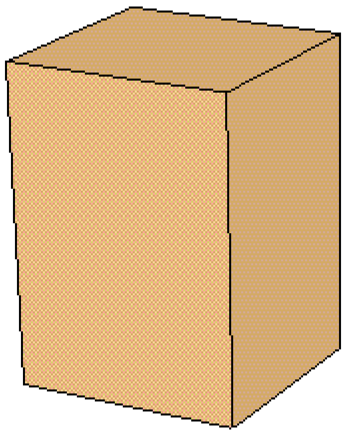
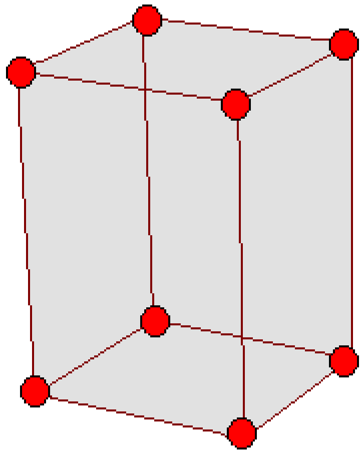




Un *prisme* est un solide constitué par deux polygones identiques appelés bases et parallèles complété par des parallélogrammes, des rectangles ou des carrés joignants les arêtes des bases. Ces derniers sont les faces latérales.

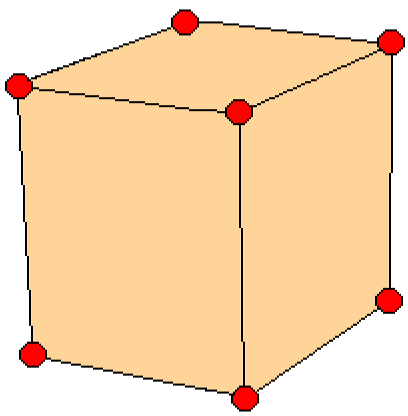
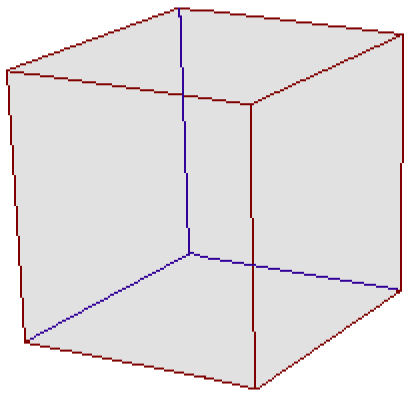
Cas particulier :

- *Le pavé(parallélépipède rectangle):*

Un pavé est un prisme dont toutes les faces sont des rectangles ou des carrés.

- *Le cube :*

Un cube est un prisme dont toutes les faces sont des carrés.

→ les élèves recherchent les prismes, pyramides et pavés et les classent sur une table.

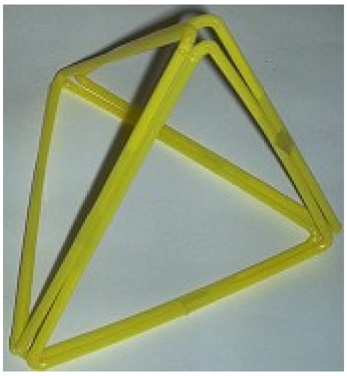
3c. Les solides à faces identiques et régulières.

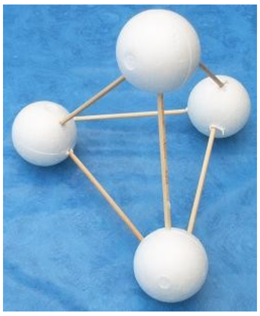
- Les solides avec des triangles en leur sommet :

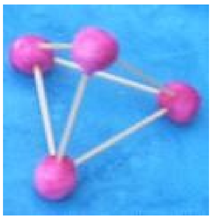
  → Construction de «toit »

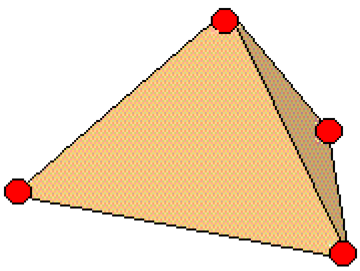
  Les élèves essayent de construire un toit avec 3,4,5 triangles équilatéraux Recherche des solides ayant 3,4,5 triangles équilatéraux. en leur sommet et classement de tels solides sur une table.

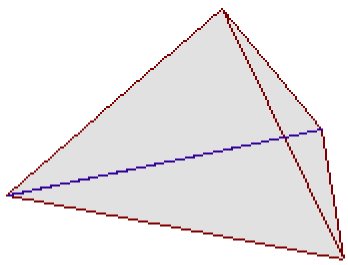
Les solides avec trois triangles équilatéraux en leur sommet :



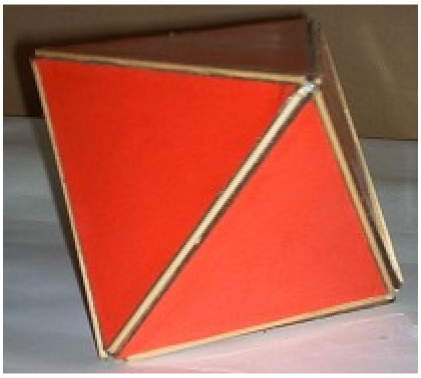


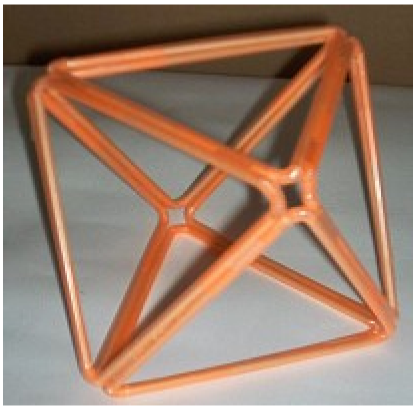


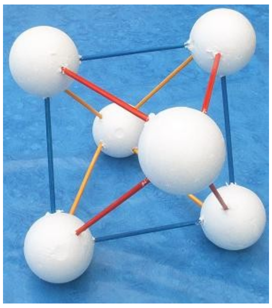


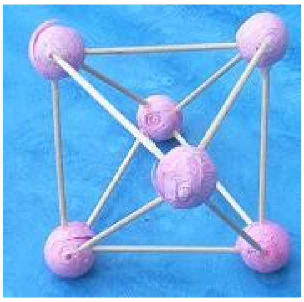


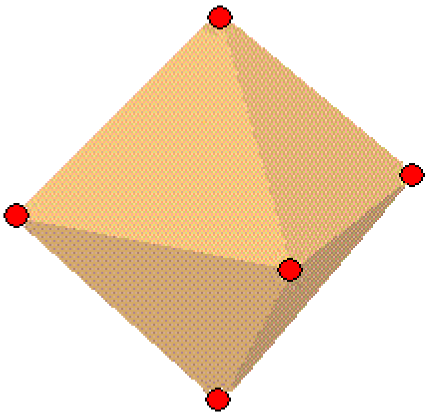
Les solides avec quatre triangles équilatéraux en leur sommet :

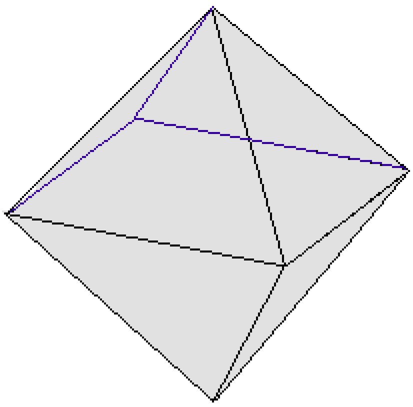




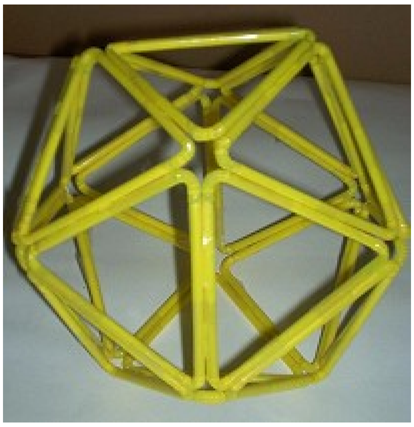


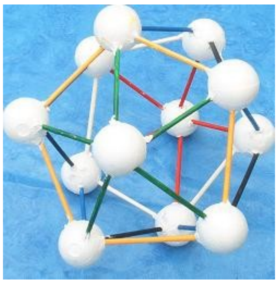


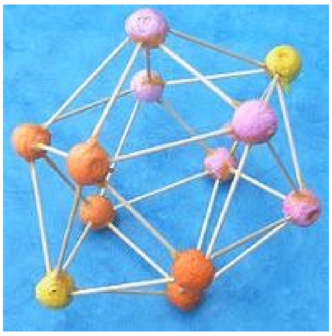


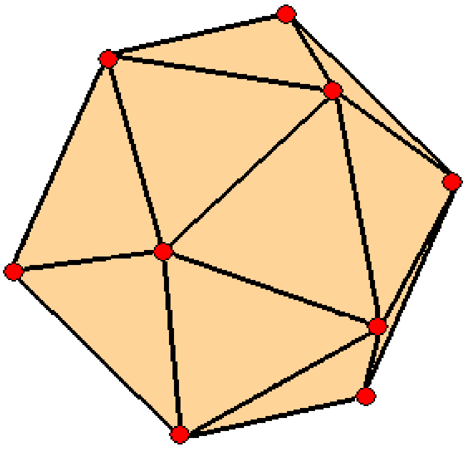


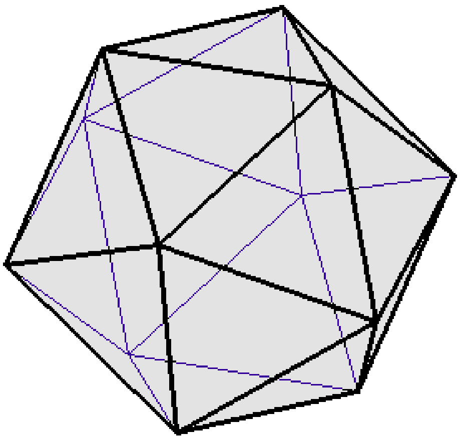
Les solides avec cinq triangles équilatéraux en leur sommet :



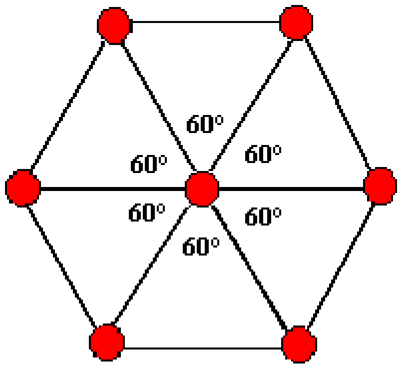








→Les élèves essayent maintenant de construire un toit avec 6 triangles équilatéraux.
Pas possible : on a un pavage du plan.



Pas de possibilité d'avoir un « toit » avec 6 triangles :

Les six triangles sont équilatéraux. Leurs angles sont tous égaux. Comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, chacun a pour mesure 60° (3 x 60° = 180°).
Ainsi les 6 triangles associés en un sommet couvrent le plan (6 x 60° = 360°)

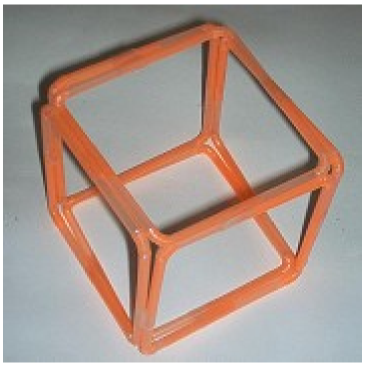
- Les solides avec des carrés en leur sommet :

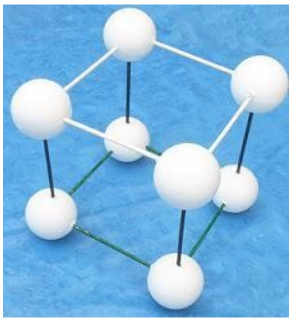
  → Construction de «toit »

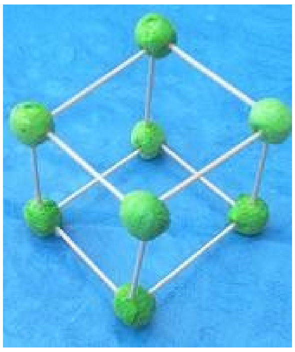
  les élèves essayent de construire un toit avec 3 carrés

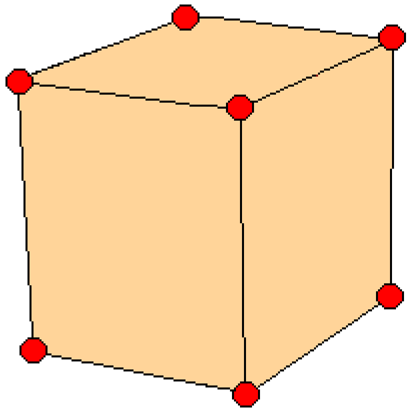
  Recherche des solides ayant 3 carrés en leur sommet et classement de tels solides sur une table.

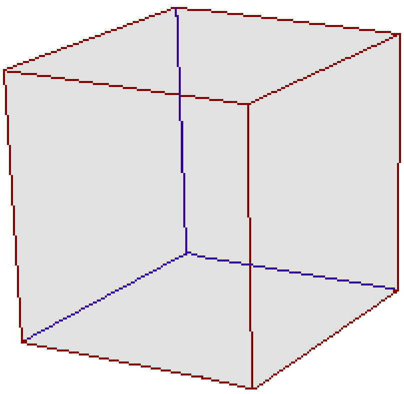
Les solides avec trois carrés en leur sommet : le cube





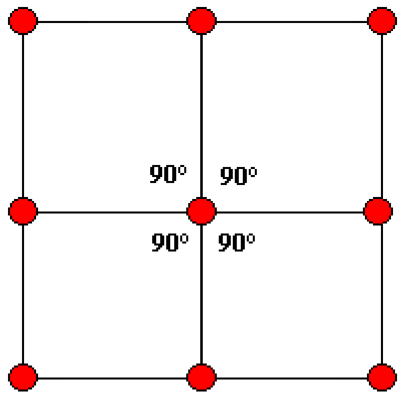






→ *Les élèves essayent maintenant de construire un toit avec 4 carrés*

Pas possible : on a un pavage du plan.



Pas de possibilité d'avoir 4 carrés formant un « toit » :

Les angles d'un carrés mesurent tous 90°.

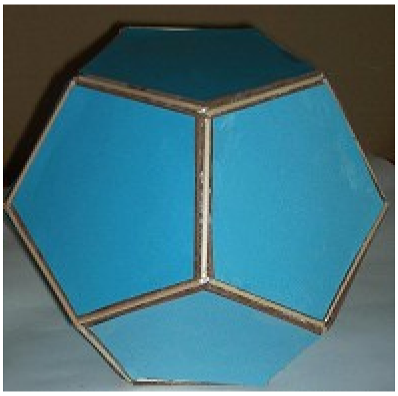
les 4 carrés associés en un sommet couvrent le plan (4x 90° = 360°)

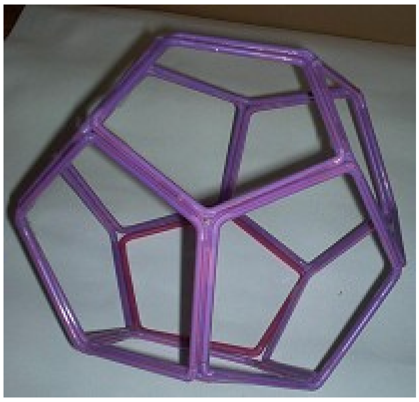
- Les solides avec des pentagones en leur sommet :

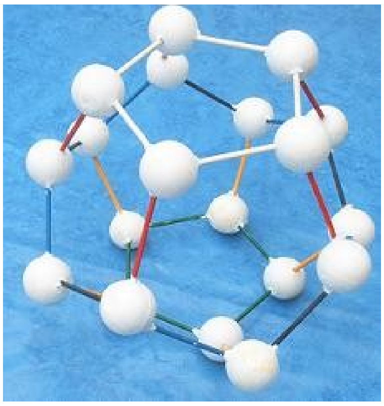
  → Construction de «toit »

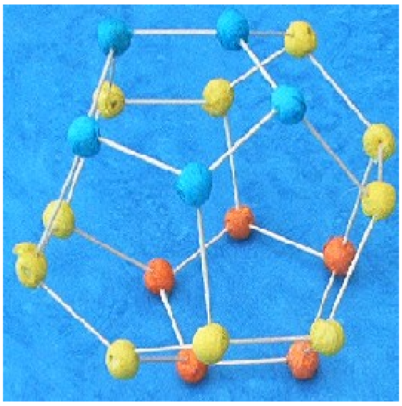
  Les élèves essayent de construire un toit avec 3 pentagones.

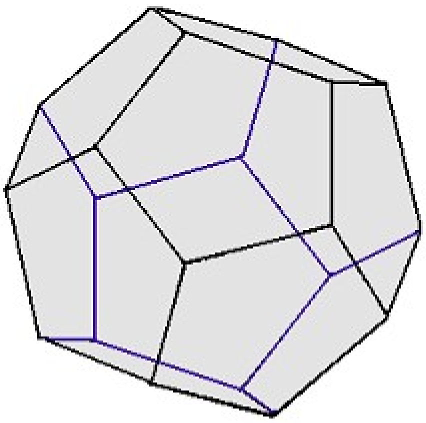
  Recherche des solides ayant 3 pentagones en leur sommet et classement de tels solides sur une table.

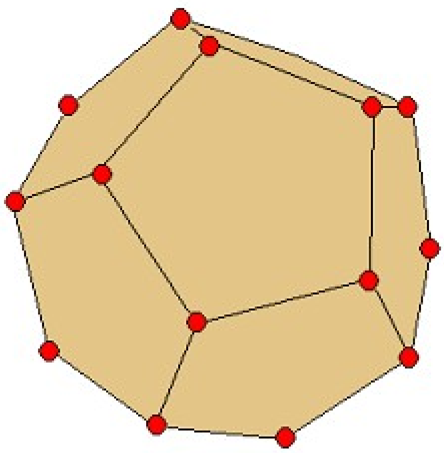




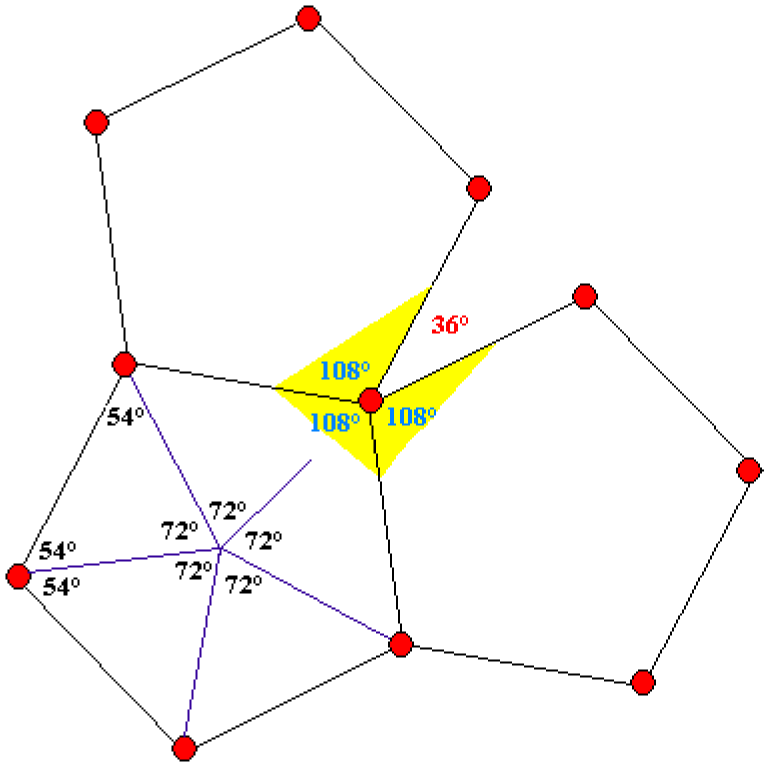








→ Les élèves essayent ensuite de construire un toit avec 4 pentagones. Pas possible.

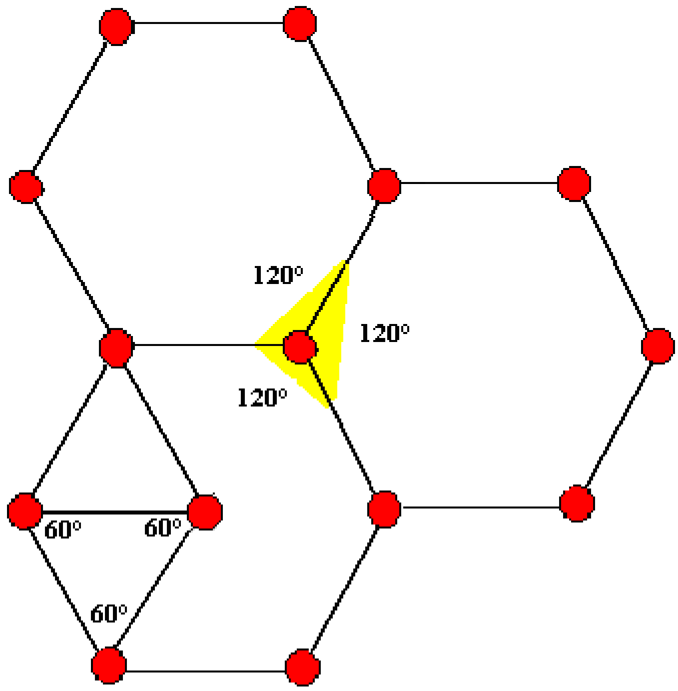


Si du centre d'un pentagone je joints les sommets, j'obtient 5 triangles isocèles. Les 5 angles au centres couvrent le plan et mesurent ensemble 360°. Ainsi, chaque angle des triangles situés au centre du pentagone valent 72° (360° / 5 = 72°) . Comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, les deux autres angles de chaque triangle isocèle mesure chacun 54° . (180°-72°=108° et comme les angles sont égaux 108°/2 = 54°).
Les angles de 3 pentagones associés en un sommet mesurent 324° (3 x 108°). Il reste donc un angle de 56° (360°-324°) qui ne peut convenir pour avoir un quatrième pentagone.

- Les solides avec des hexagones en leur sommet :

→ Construction de «toit »

les élèves essayent de construire un toit avec 3 hexagones. Pas possible : on a un pavage du plan.



Si du centre d'un pentagone je joins les sommets, j'obtiens 6 triangles équilatéraux. Les 6 angles au centre couvrent le plan et mesurent ensemble 360°. Ainsi, chaque angle des triangles vaut chacun 60° (360° /6=60°). Chaque angle de l'hexagone mesure donc 120°.
Ainsi Les angles de trois hexagones associés en un sommet couvrent tout le plan. (120° x 3 = 360°)

- Les solides avec des autres polygones en leur sommet :

Il n'est pas possible de construire d'autre solides avec des polygones dont le nombre de côtés est supérieur à six .

Type de polygone	*Angles au centre*	*Angles du polygone*
Pentagone (5 côtés)	360° / 5 = 72°	180° - 72° = 108°
Hexagone (6 côtés)	360° / 6 = 60°	180° - 60° = 120°
Octogone (8 côtés)	360° / 8 = 45°	180° - 45° = 135°
Décagone (10 côtés)	360° / 10 = 36°	180° - 36° = 144°

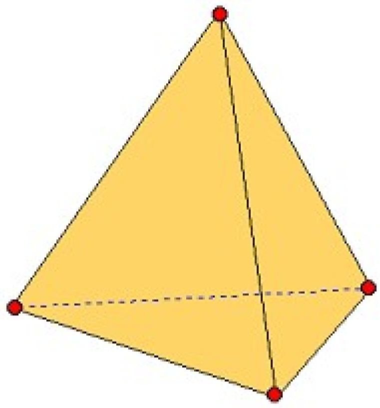
Plus il y a de côtés, plus les angles des polygones sont grands et ainsi supérieurs à 120°. On ne peut alors former des « toits » avec de tels polygones.

- **Conclusion :**
  Il y a uniquement 5 solides avec pour faces des polygones réguliers identiques :
  - Les solides avec 3, 4 ou 5 triangles en chaque sommet.
  - Le solide avec 3 carrés en chaque sommet.
  - Le solide avec 3 pentagones en chaque sommet.

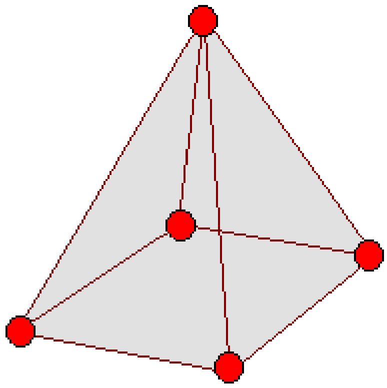
  Ces cinq solides se nomment polyèdres réguliers.

4. Recherche du nombre de faces, de sommets et d'arêtes parmi les solides découverts :

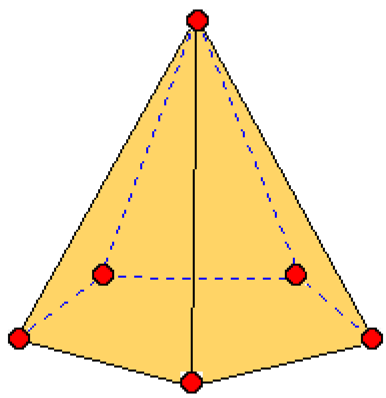
- *Pyramide de base triangulaire:*

	Nombre de faces : base : un triangle. Faces latérales : 3 triangles Total : 4 faces. Nombre de sommets : 3 sommets de la base et le sommet de la pyramide. Total : 4 sommets. Nombre d'arêtes : 3 arêtes du triangle de la base. 3 arêtes qui relient le sommet de la pyramide. Total : 6 arêtes.

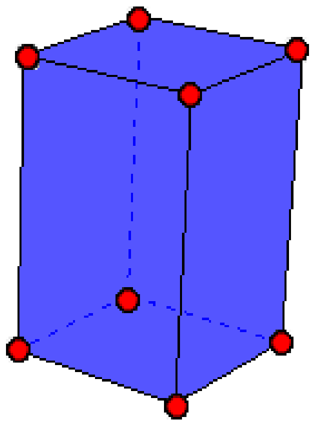
- *Pyramide de base carrée* :

	Nombre de faces : base : un carré. Faces latérales : 4 triangles Total : 5 faces. Nombre de sommets : 4 sommets de la base et le sommet de la pyramide. Total : 5 sommets. Nombre d'arêtes : 4 arêtes du carré de la base. 4 arêtes qui relient le sommet de la pyramide. Total : 8 arêtes.

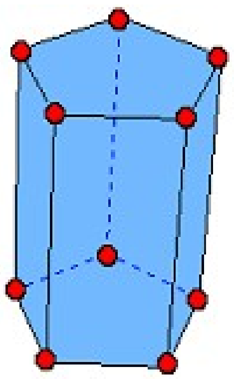
- *Pyramide de base pentagonale* :

	Nombre de faces : base : un pentagone. Faces latérales : 5 triangles Total : 6 faces. Nombre de sommets : 5 sommets de la base et le sommet de la pyramide. Total : 6 sommets. Nombre d'arêtes : 5 arêtes du pentagone de la base. 5 arêtes qui relient le sommet de la pyramide. Total : 10 arêtes.

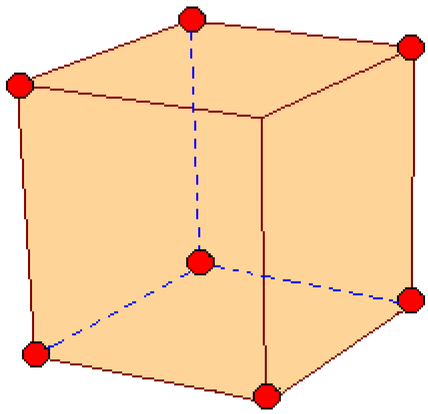
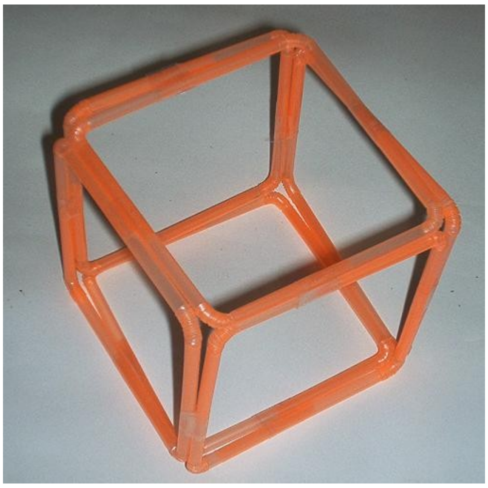
- *Pavé de base carrée :*

	Nombre de faces : bases : 2 carrés. Faces latérales : 4 rectangles Total : 6 faces. Nombre de sommets : 4 sommets de la base inférieure. 4 sommets de la base supérieure. Total : 8 sommets. Nombre d'arêtes : 4 arêtes du carré de la base inférieure. 4 arêtes du carré de la base supérieure. 4 arêtes qui relient les sommets des bases. Total : 12 arêtes.

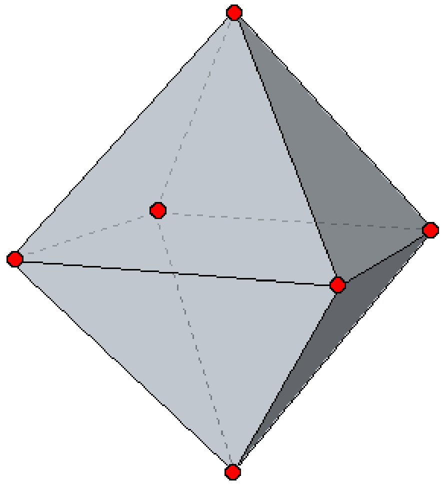
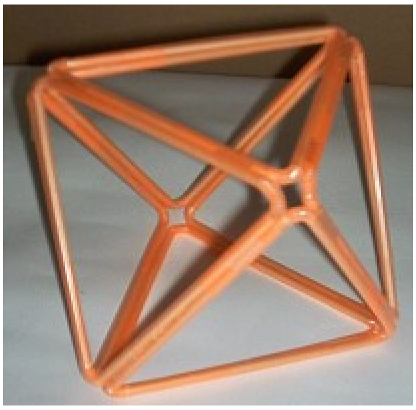
- *Prisme de base pentagonale :*

	Nombre de faces : bases : 2 pentagones. Faces latérales : 5 rectangles Total : 7 faces. Nombre de sommets : 5 sommets de la base inférieure. 5 sommets de la base supérieure. Total : 10 sommets. Nombre d’arêtes : 5 arêtes du carré de la base inférieure. 5 arêtes du carré de la base supérieure. 5 arêtes qui relient les sommets des bases. Total : 15 arêtes.

- *Cube :*

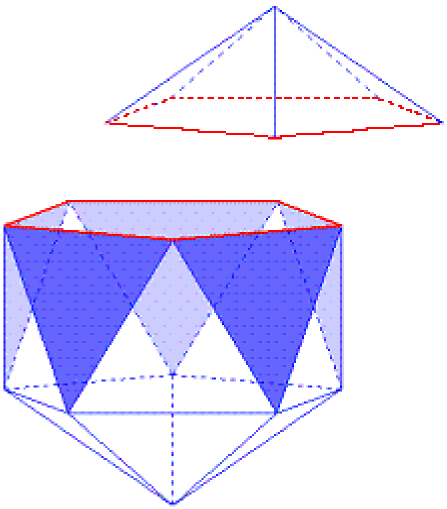
	Nombre de faces : Bases : 2 carrés. Faces latérales : 4 carrés Total : 6 faces. Nombre de sommets : 4 sommets de la base inférieure. 4 sommets de la base supérieure. Total : 8 sommets. Nombre d’arêtes : 4 arêtes du carré de la base inférieure. 4 arêtes du carré de la base supérieure. 4 arêtes qui relient les sommets des bases. Total : 12 arêtes.
	Autre façon de calculer le nombre d'arêtes (à partir du cube en paille) : Le cube comprend 6 faces qui sont des carrés. Chaque carré est formé de 4 côtés. Ainsi le cube comprend 6 x 4 = 24 côtés. Or chaque arête est obtenue en « collant » deux cotés. Le nombre d'arêtes est donc égal à 24 : 2 = 12

- *Polyèdre régulier ayant 4 triangles en chaque sommet :*

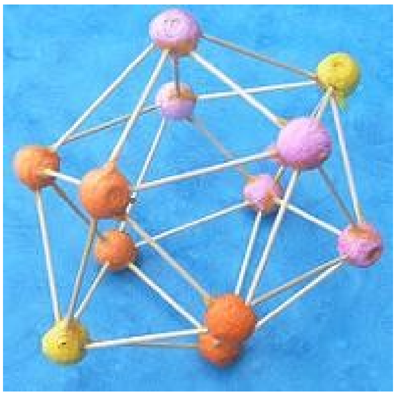
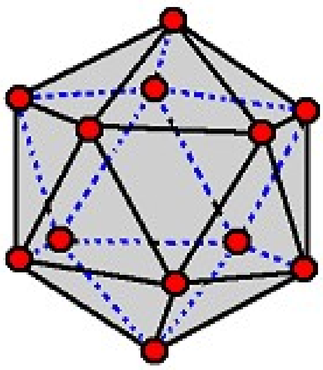
	Nombre de faces : Si l'on met le solide sur une « pointe » , on a : 4 triangles en haut et 4 triangles en bas total : 8 faces. Nombre de sommets : 2 sommets (un en haut et un en bas) 4 sommets autour. Total : 6 sommets. Nombre d'arêtes : 4 arêtes partant du sommet supérieur. 4 arêtes partant de la « pointe ». 4 arêtes tout autour. Total : 12 arêtes
	De même, on peut calculer le nombre d'arêtes à partir de la forme en « fil de fer »: Le solide est formé de 8 triangles. Nous avons ainsi au total **8 x 3** = 24 côtés. Chaque arête s'obtient à partir de 2 côtés. Finalement le solide possède 24 : 2 = 12 arêtes

- *Polyèdre régulier ayant 5 triangles en un sommet :*

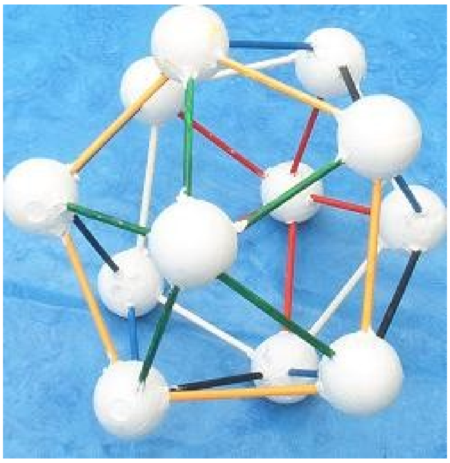
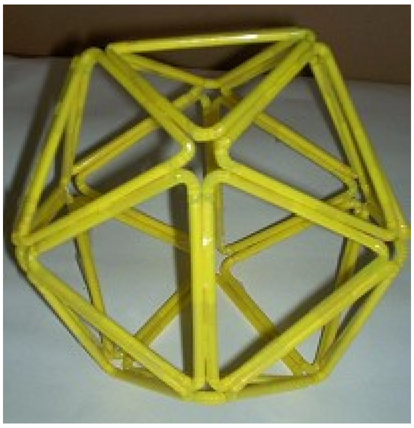
Nombre de faces :

	Si l'on met le solide sur une « pointe » , on a : 5 triangles en haut formant une pyramide à base pentagonale. A chaque côté de ce pentagone est « accroché » un triangle. On a alors 5 nouveaux triangles. On peut faire de même pour le bas. Total : 2 x (5 + 5) = 20 faces.

Nombre de sommets :

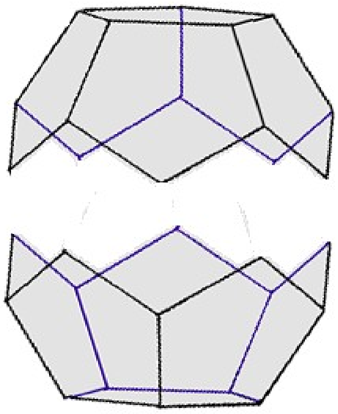
	D'après le modèle avec boules colorées : Couleurs utilisées dans le modèle : jaune, rose, orange. Il y a 5 boules roses, 5 boules oranges et 2 boules jaunes. Total : 12 sommets.
	Si l'on met le solide sur une « pointe » , on a : Une boule en haut et cinq boules tout autour au niveau inférieur. On a une symétrie pour le bas. Total : 2 x (1 + 5) = 12 sommets.

Nombre d'arêtes :

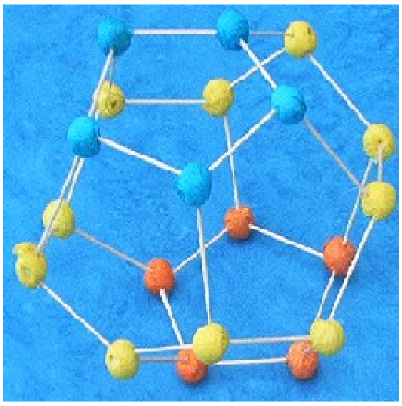
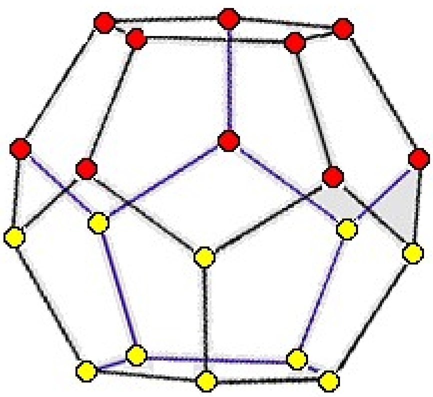
	D'après le modèle avec arêtes colorées : Couleurs utilisées : blanc, vert, bleu, rouge, noir, jaune. Il y a 5 arêtes de chaque couleur. Total : 30 arêtes.
	D'après le nombre de faces et le modèle en «squelette »: Il y a 20 faces. Chaque faces est formée d'un triangle comportant 3 côtés. Total du nombre de côtés : 20 x 3 = 60 côtés. Or chaque arête est formée de 2 cotés. Total des arêtes : 60/2 = 30

- *Polyèdre régulier ayant 3 pentagones en un sommet :*

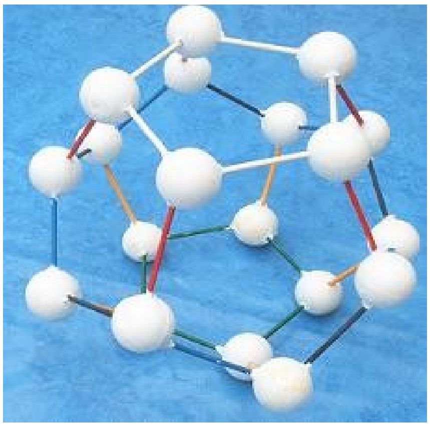
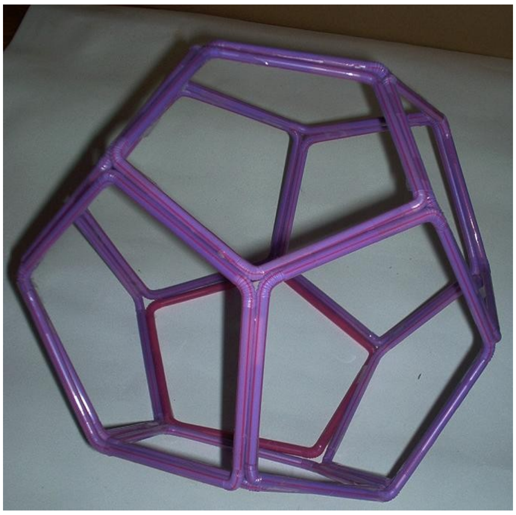
Nombre de faces :

	Si l'on pose le solide sur une face , on a : En haut : 1 pentagone. A chaque côté de ce pentagone est « accroché » un autre pentagone, soit 5 faces supplémentaires. Total pour le haut : 6 faces On peut faire de même pour le bas. Total final : 12 faces.

Nombre de sommets :

	D'après le modèle avec boules colorées : Couleurs du modèle : jaune,bleu, orange. Il y a 5 boules bleues, 5 boules oranges et 10 boules jaunes. Total : 20 sommets.
	Si l'on pose le solide sur une face , on a : 5 sommets sur la base supérieure. A chacun de ces sommets est « accroché » un nouveau sommet. On a ainsi 5 sommets supplémentaires. On a aussi 5 sommets sur la base inférieure. A chacun de ces sommets est également « accroché » un sommet. On a donc 5 sommet en plus. Total : 4 x 5 = 20 sommets.

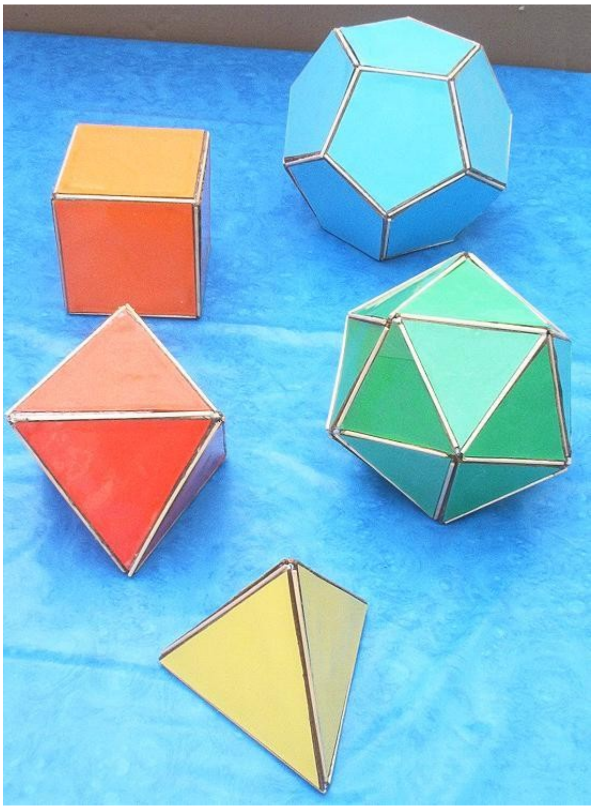
Nombre d’arêtes :

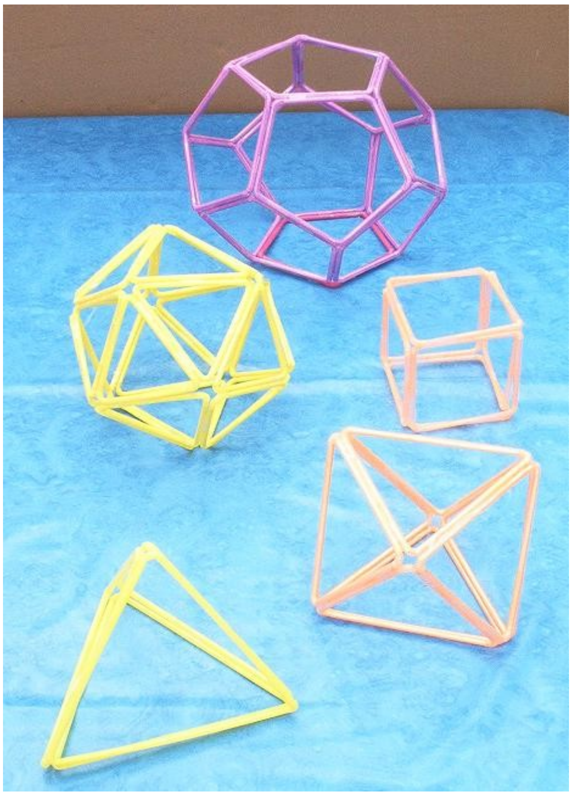
	D’après le modèle avec arêtes colorées : Couleurs du modèle : blanc, vert, bleu, rouge, noir, jaune. Il y a 5 arêtes de chaque couleur. Total : 30 arêtes.
	D’après le nombre de faces et le modèle «squelette ». Il y a 12 faces. Chaque face est formée d’un pentagone, polygone de 5 côtés. Total du nombre de côtés : 12 x 5 = 60 côtés. Or chaque arête est formée de 2 cotés. Total des arêtes : 60/2 = 30

Nom des polyèdres réguliers:

Le nom de ces cinq polyèdres dépend du nombre de faces :

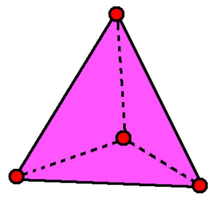
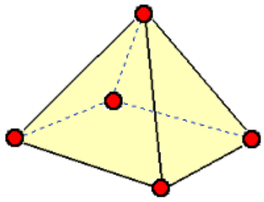
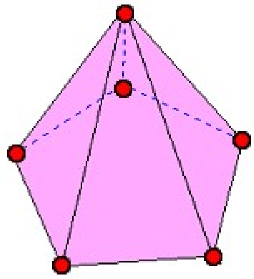
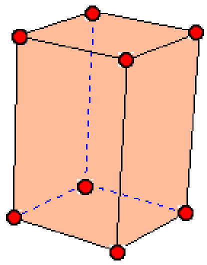
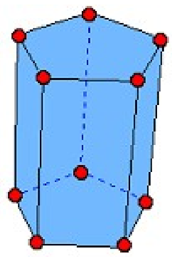
- polyèdres à 4 faces : tétraèdre (4 se dit tetra en grec).
- polyèdres à 6 faces : hexaèdre ou cube (6 se dit hexa en grec).
- polyèdres à 8 faces : octaèdre (8 se dit octa en grec).
- polyèdres à 12 faces : dodécaèdre (12 se dit dodeca en grec).
- polyèdres à 20 faces : icosaèdre (20 se dit icosa en grec)

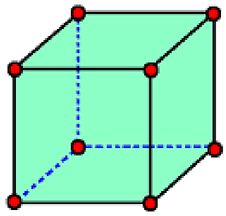
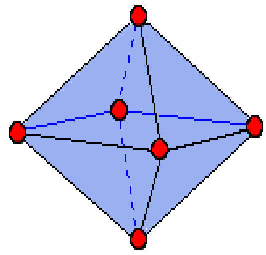
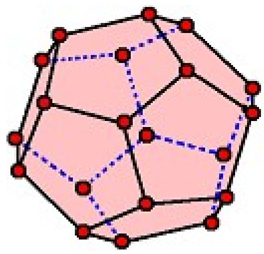
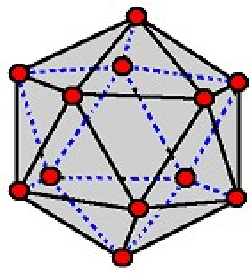




5. Relation entre le nombre de faces, sommets et arêtes :

Nous allons résumer nos calculs précédents dans un tableau :

nom	Nombre de				figures
	faces	sommets		arêtes	
tétraèdre régulier	4	+ 4	= 8	6	
Pyramide de base carrée	5	+ 5	= 10	8	
Pyramide de base pentagonale	6	+ 6	= 12	10	
Pavé de base carrée	6	+ 8	= 14	12	
Prisme de base pentagonale	7	+ 10	= 17	15	

Cube (Hexaèdre régulier)	6	+ 8	= 14	12	
octaèdre régulier	8	+ 6	= 14	12	
dodécaèdre régulier	12	+ 20	= 32	30	
icosaèdre régulier	20	+ 12	= 32	30	

Nous pouvons établir la relation donnée par Leonhard Euler:

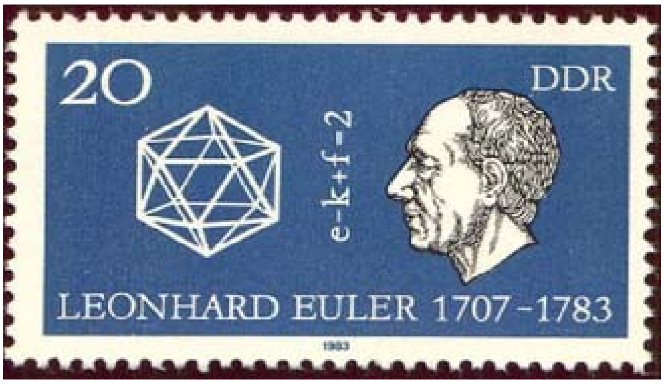
Le nombre de faces additionnées au nombre de sommets

est égal au nombre d'arêtes + 2.

ou sous une forme symbolique :

F + S = A + 2

où F est le nombre de faces, S est le nombre de sommets et A est le nombre d'arêtes.



Euler a énoncé cette égalité mais a déclaré n'en avoir pu obtenir la démonstration. Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème faisant appel à divers domaine des mathématiques **:** La théorie des graphes, la topologie, la géométrie spatiale. Une démonstration rigoureuse de la relation d'Euler a été donnée par le mathématicien Cauchy[1] alors âgé de 20 ans. C'est celle-ci que l'on va détailler par la suite. Mais avant de développer cette démonstration, découvrons un peu la vie d'un des plus proléfique mathématicien.

[1] **Augustin-Louis, baron Cauchy,** (né le 21 août 1789 à Paris et décédé le 23 mai 1857 à Sceaux dans la région parisienne), mathématicien français, pionnier dans l'analyse et la théorie des groupes de substitution (groupes dont les éléments sont classés séquences d'un ensemble de choses).

6. Brève biographie de Leonhard EULER :

Leonhard Euler est né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783. Il est issu d'une famille modeste vivant dans une ville près de Bâle en Suisse. Là, il suit des cours dans une école qui n'offre qu'un enseignement élémentaire et c'est son père qui l'initie aux premiers éléments des mathématiques. A 13 ans, il entre à l'Université de Bâle pour y étudier la philosophie et le droit. Il obtient son diplôme de philosophie à 16 ans mais son père qui souhaite le voir devenir pasteur, le pousse vers des études de théologie.

Mais Euler devient l'élève de *Johann Bernoulli* (1667 -1748) un ami de son père et éminent mathématicien qui remarque son talent pour les mathématiques. Il poursuit alors ses études dans cette nouvelle voie.

Par la suite, la Suisse ne lui permettant pas de faire une carrière ambitieuse en Sciences, il va rejoindre à Saint-Pétersbourg, *Daniel* et *Nicolas Bernoulli,* les fils de *Johann*, avec lesquels il s'était lié d'amitié.
Euler quitte Bâle, le 5 avril 1727. Il traverse le Rhin en bateau, passe par les Länder allemands par malle postale, puis par bateau à partir de Lübeck et arrive à Saint-Pétersbourg, le 17 Mai 1727.
Il y travaille en tant que professeur de mathématiques à l'académie des Sciences.

La santé d'Euler était assez fragile. A 33 ans, il perd son oeil droit et bientôt il ne peut distinguer que de grands caractères tracés à la craie sur une ardoise.

En 1741, *Frédéric II le Grand*, roi de Prusse, le fait venir à Berlin pour rejoindre l'Académie des Sciences. C'est là qu'il rencontre le français Voltaire.
Mais il ne s'entend que moyennement avec ce dernier qui le surnomme le "Cyclope mathématique" en référence à son handicap. Il retourne à Saint-Pétersbourg en 1766, à la demande de l'impératrice CatherineII, ville qu'il ne quittera plus.

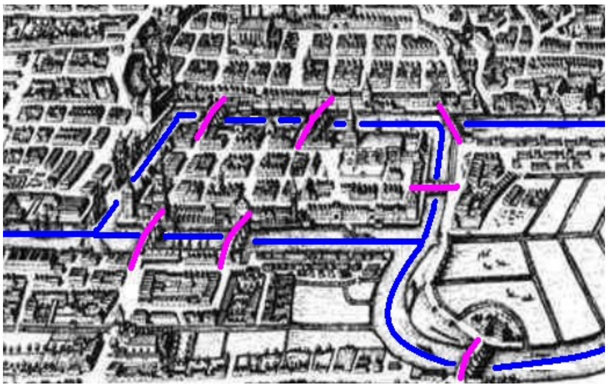
Son oeuvre est considérable. Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), et les mathématiques, Malgré qu'il ait été complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de la totalité de son travail durant cette période. Il continuait à dicter ses texte scientifiques à ses fils ou à son valet grâce à sa mémoire colossale. On raconte que se préparant à sa cécité inéluctable, il s'était progressivement habitué à ne plus écrire mais à dicter ses démonstrations.

Euler rencontre la fille d'un artiste russe avec laquelle il aura 13 enfants dont 8 meurent très jeunes. Quant aux autres, il devinrent presque tous des scientifiques respectables. L'ainé, Jean Albert (1734, Saint-Pétersbourg - 1810) enseigna la physique à St-Pétersbourg. Charles(1740-1800), remporta également plusieurs prix à l'Académie des Sciences et exerça la médecine à Saint-Pétersbourg (il fut même médecin de l'empereur). Christophe,(1743,Berlin-1805), se consacra au génie militaire.

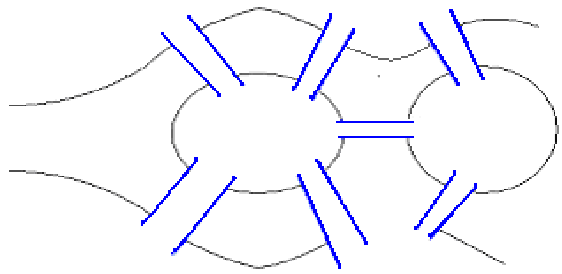
Euler a résolu le problème des promenades de Königsberg.

Königsberg (aujourdh'ui Kaliningrad) est une ville qui aujourd'hui fait partie de la Fédération de Russie dans l'enclave russe sur la mer Baltique, entre la Pologne et laLituanie.

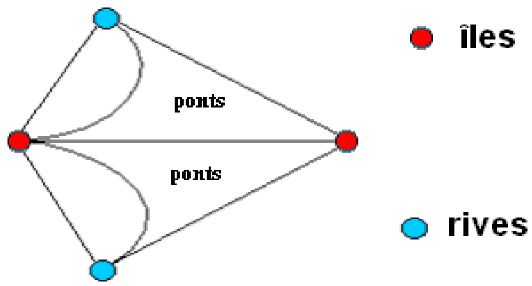
L'anecdote est la suivante :
Au 18ème siècle, les habitants de Königsberg aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg située sur la rivière Pregel comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-après. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?



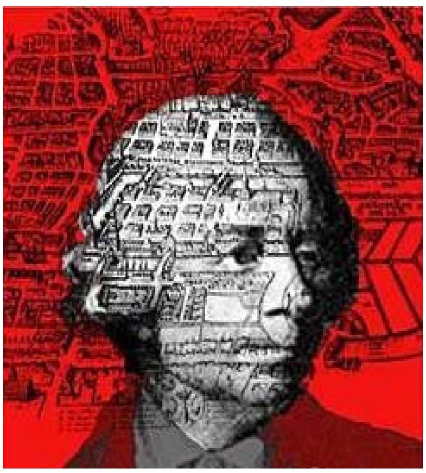
Leonhard Euler donna à ce problème la première résolution mathématique. Il commença par faire un schéma représentant la promenade de la façon suivante :



Ensuite, il rendra une représentation plus formelle :

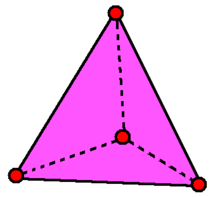
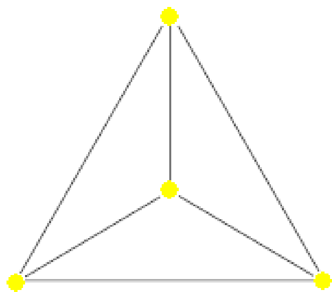
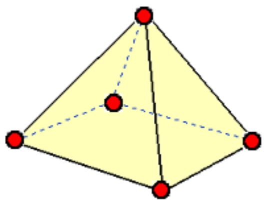
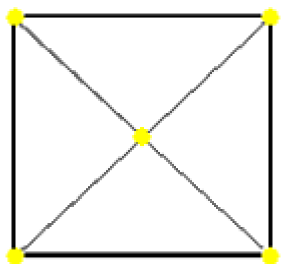
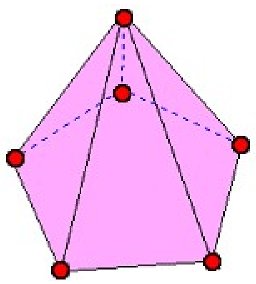
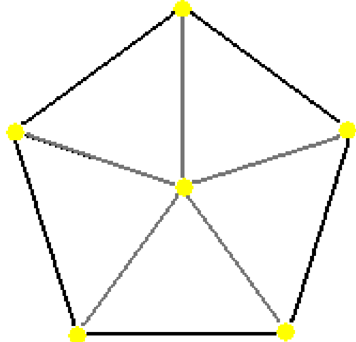


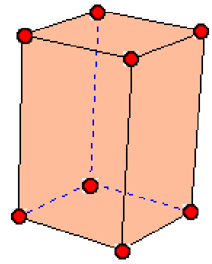
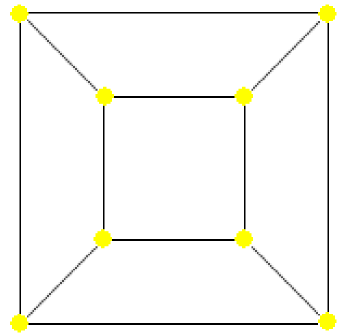
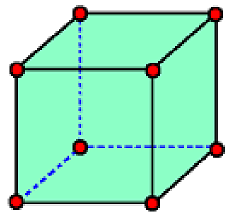
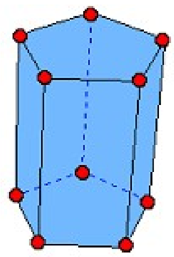
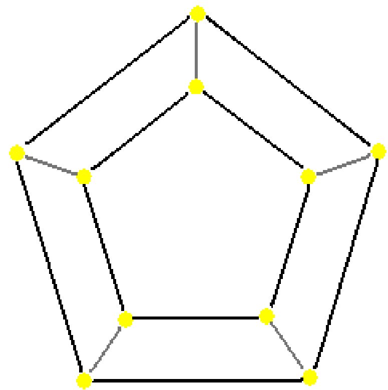
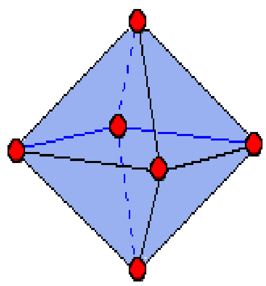
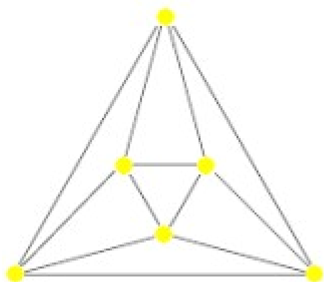
Ce problème est le début de la *théorie des graphes*. C'est en représentant les solides d'une manière similaire qu'il trouva la formule liant le nombre de faces, de sommets et d'arêtes.

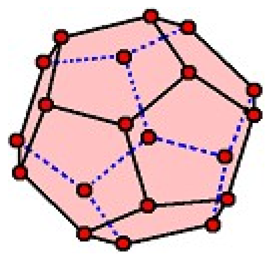
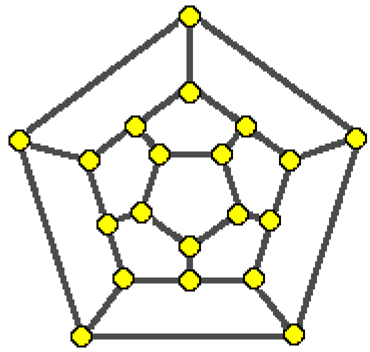
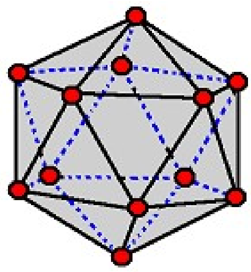
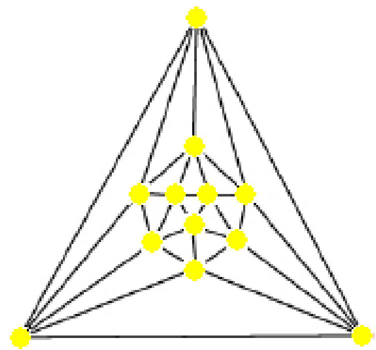


8. Démonstration de la relation d'EULER : **F + S = A + 2**

1. Aplatissement, étirement & déformation des solides :
   Prenons un polyèdre convexe dont on enlève une face. En écartant vers l'extérieur les côtés de cette face manquante, on déforme le polyèdre en l'aplatissant et on obtient alors une figure plane formée de polygones.
   Voici pour les solides précédemment étudiés la représentation de ces déformations :

	Solides	Diagramme par « aplatissement »
tétraèdre régulier		
Pyramide de base carrée		
Pyramide de base pentagonale		

Pavé de base carrée		
Cube (Hexaèdre régulier)		
Prisme de base pentagonale		
octaèdre régulier		

dodécaèdre régulier		
icosaèdre régulier		

2. Réajustement de la formule :
   Avant la déformation des solides, on a enlevé une face.

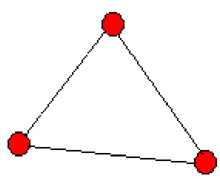
   La nouvelle formule s'écrit donc : $\boxed{F + S = A + 1}$

   Après transformations, les faces sont devenues des figures polygonales et les arêtes des côtés. On peut alors donner une nouvelle formulation de la relation :

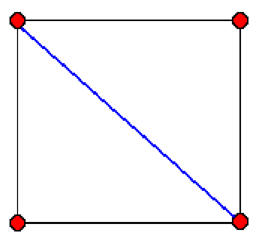
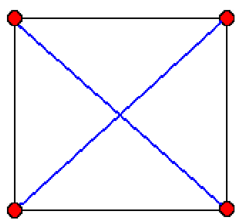
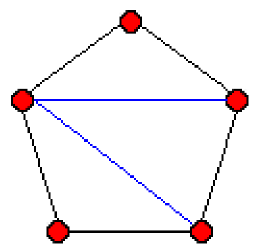
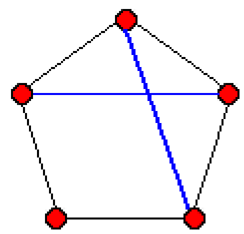
   $$\boxed{F + S = C + 1}$$

   où F est le nombre de figures planes,
   S est le nombre de sommets de ces figures,
   C est le nombre de côtés.

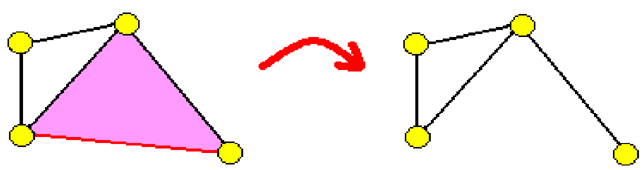
3. Finalitéde la démonstration :
   Le but de la preuve est d'obtenir un triangle après avoir enlevé successivement des sommets, côtés et polygones tout en respectant l'égalité à démontrer.
   Dans ce cas, la formule est bien vraie :

	F = 1 ; S = C = 3 On a bien $\boxed{F + S = C + 1}$

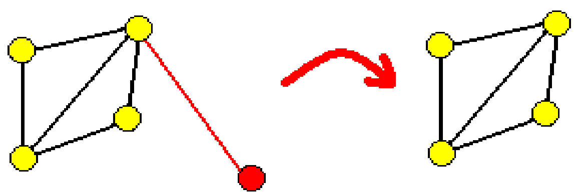
4. Triangulation :
   Pour uniformiser la démonstration et terminer par un triangle, il est plus facile d'avoir uniquement comme polygones tous des triangles.
   Deux possibilités se présentent :
   - Tous les polygones obtenus par aplatissement sont des triangles ou
   - Il existe des figures autres que des triangles. Dans ce cas, il faut décomposer ces polygones en triangles en traçant toutes les diagonales issues d'un même sommet. L'égalité ne changera pas :

Bon	Mauvais
 On rajoute un côté et une figure.	
 On rajoute 2 côtés et 2 figures.	

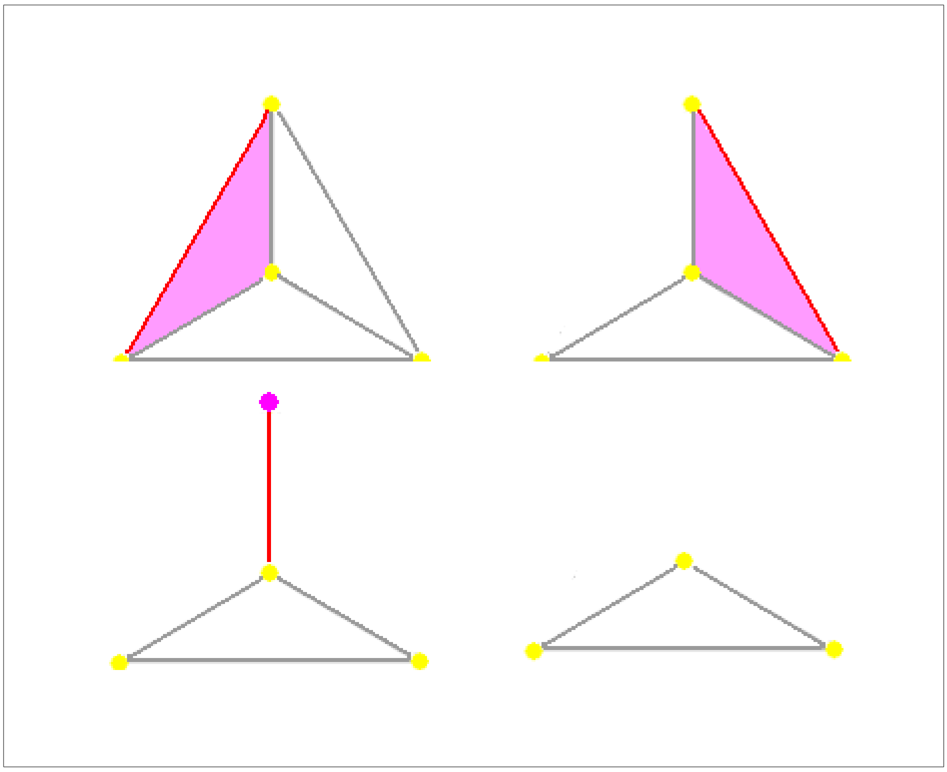
5. Schéma de la démonstration :
   On va progressivement réduire le nombre de triangles, de sommets et de côtés en commençant par l'extérieur de la figure plane.
   Deux options sont possibles :
   a) On enlève une arête de façon à avoir un triangle de moins :



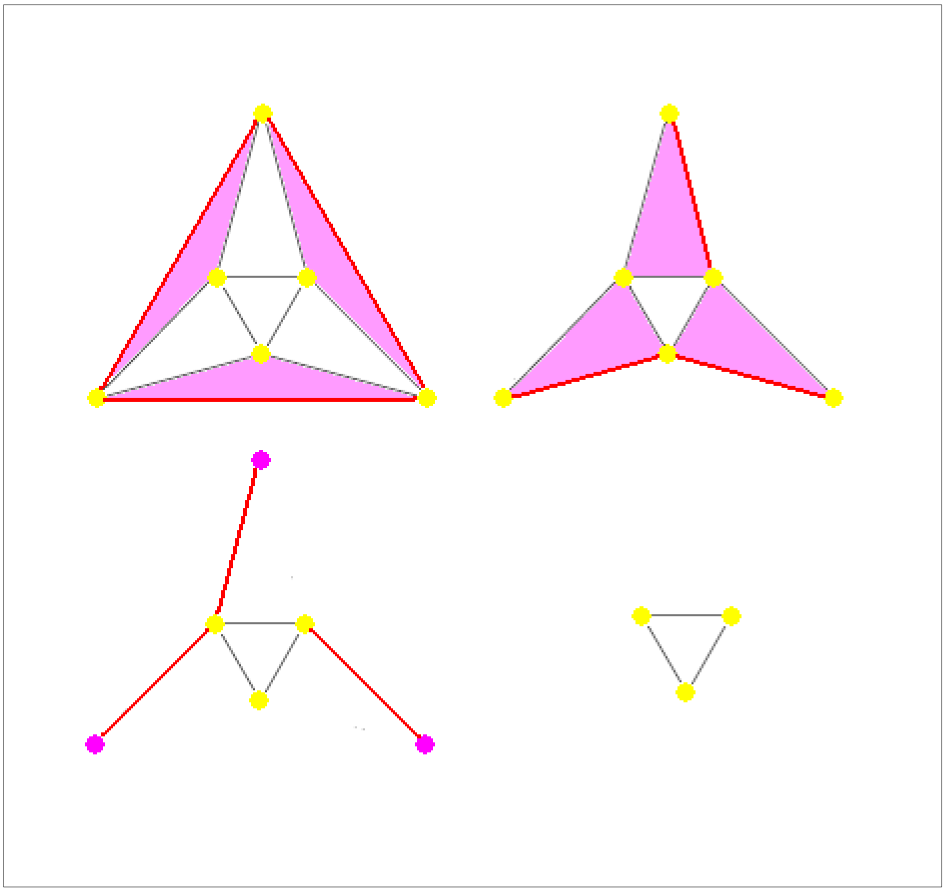
   b) On enlève un sommet et un côté tout en gardant le même nombre de triangles :



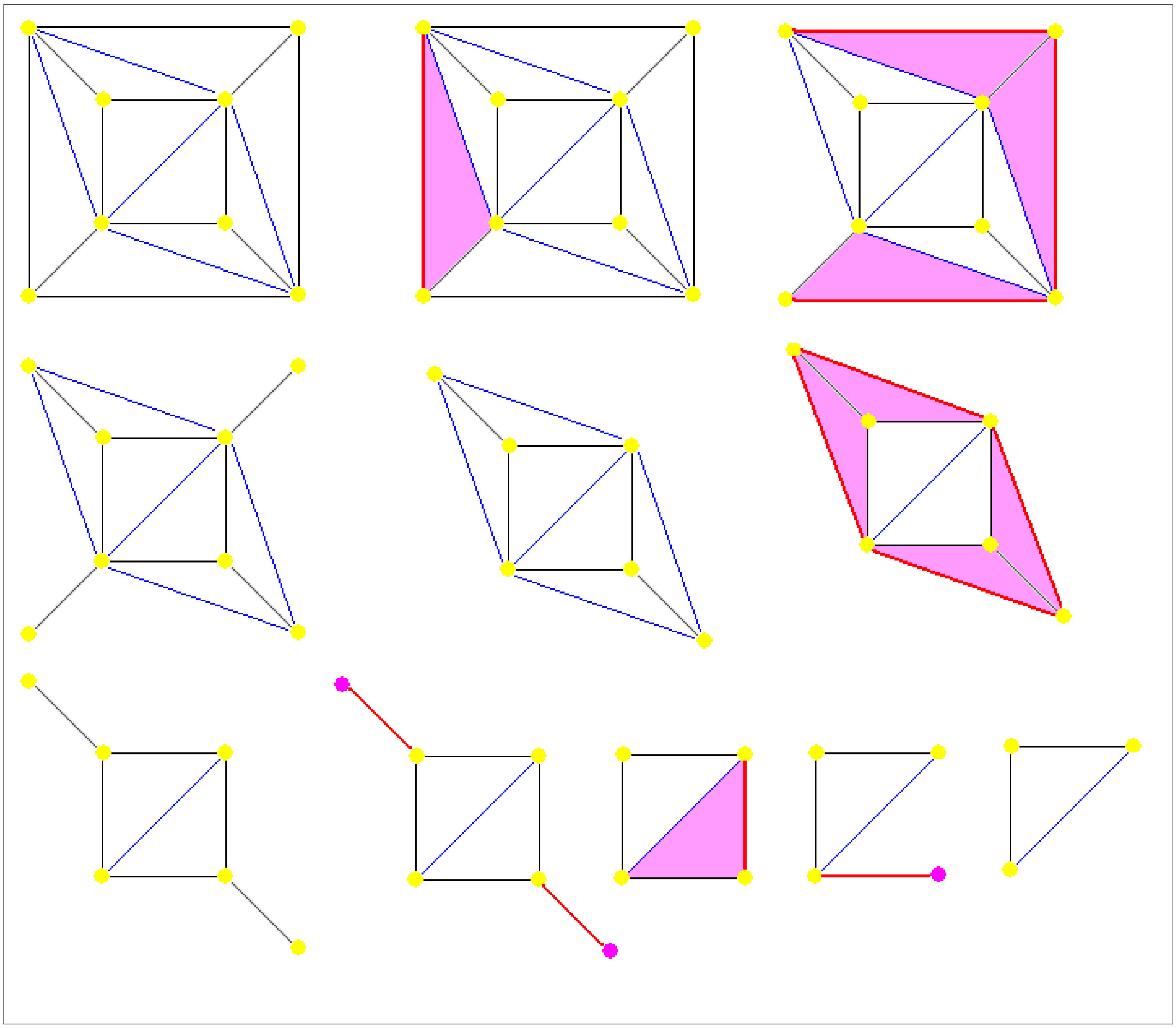
6. Démonstrations sans paroles :
Pour le tétraèdre :



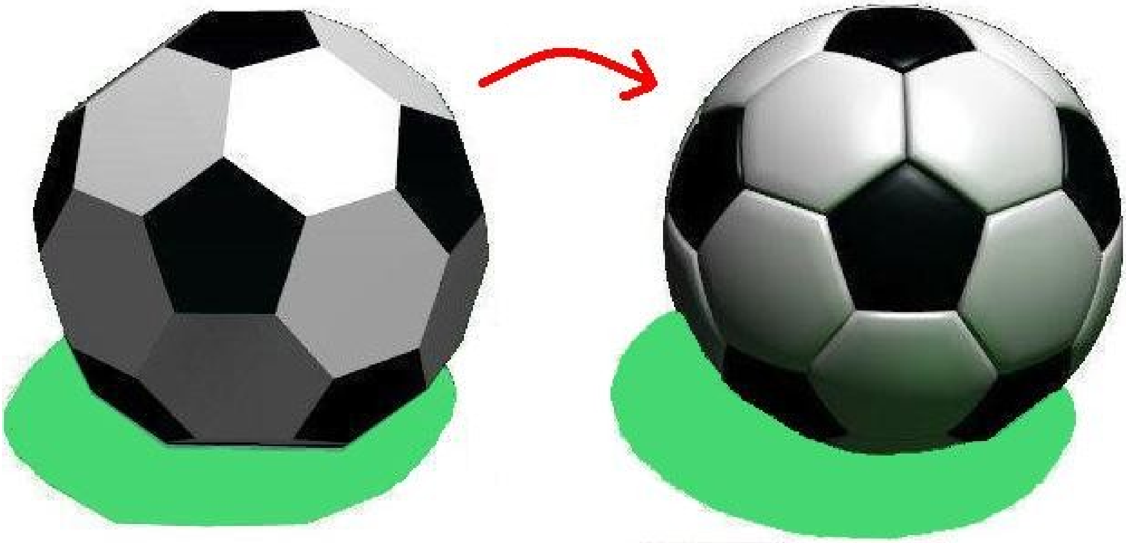
Pour l'octaèdre :



Pour le cube :



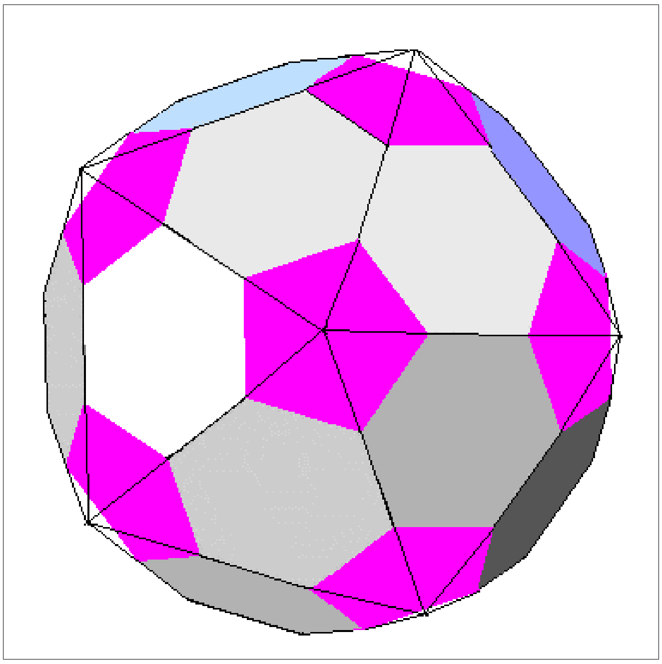
9. De l’icosaèdre au ballon de football :



Dans le jargon des journalistes sportifs, le « ballon rond » désigne souvent le football, par opposition à son frère ennemi le rugby qui utilise un « ballon ovale ».
Le ballon idéal aurait évidemment la forme d'une sphère, mais comment fabriquer un tel objet dans la réalité ? Les ballons style « ballons de plage », en « tranches de melon» ne sont pas assez résistants, les ballons faits de bandes découpées non plus - on les réserve au volley -, les ballons en caoutchouc moulé (comme au basket) pas assez souples.

Il faut donc une structure adaptée précisément au football, une balle qui évolue dans toutes les directions avec la même facilité, dont la vitesse et la trajectoire ne dépendent pas d'autres facteurs que du coup de pied du joueur qui l'envoie.
Les concepteurs vont se tourner de manière naturelle vers les polyèdres réguliers, à faces planes évidemment, mais qui, une fois gonflés, vont «imiter » le mieux la sphère. Les mathématiciens savent depuis l'Antiquité qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers.

Le polyèdre qui possède le plus de faces est l'icosaèdre (20 faces en forme de triangles équilatéraux qui se rejoignent par cinq à chaque sommet), mais les sommets sont encore trop « pointus ».



Alors, on va le tronquer en coupant chaque arête au tiers de sa longueur,
si bien que ce qui reste de chaque face triangulaire forme un hexagone, tandis que les pyramides enlevées à chaque sommet donnent lieu à des pentagones réguliers.
Le polyèdre obtenu s'appelle icosaèdre tronqué

Calcul du nombre de coutures de ce ballon de football :

Recherche du nombre de faces :

- Chaque « pointe » (sommet) devient un pentagone après avoir tronqué l'icosaèdre régulier. Comme il y a12 sommets dans l'icosaèdre, on aura 12 faces pentagonales.
- Chaque face triangulaire de l'icosaèdre devient après coupures un hexagone. Comme l'icosaèdre possède 20 faces, on obtient 20 faces hexagonales pour l'icosaèdre tronqué.

Total du nombre de faces : 12 + 20 = **32**

Recherche du nombre de sommets :

Chaque « pointe » (sommet) devient un pentagone qui a 5 sommets. Or l'icosaèdre possède 12 sommets.

Le nombre de sommets est donc de 12 x 5 = **60**

Recherche du nombre d 'arêtes (les coutures du ballon de football) :

Chaque « pointe » (sommet) se transforme en un pentagone avec 5 côtes. Comme l'icosaèdre a 12 sommets, nous avons ajouté 12 x 5 côtés aux 30 autres arêtes.

Nous avons donc au total 60 + 30 = **90** arêtes.

Nous pouvons le vérifier avec la relation d'EULER :

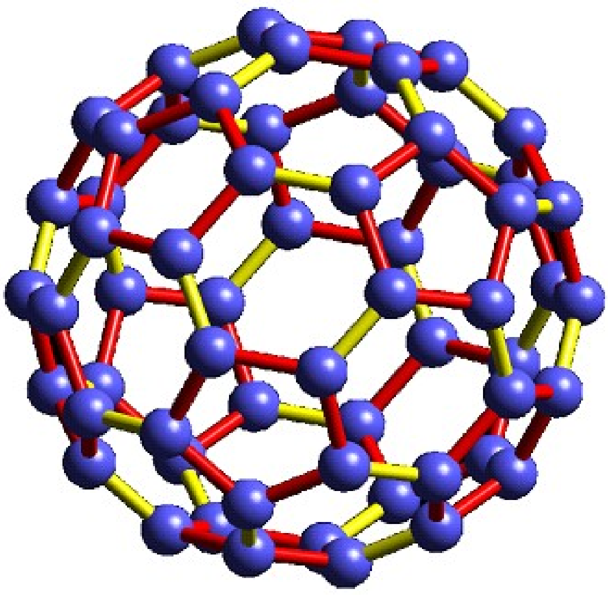
$$32 + 60 - 2 = 90$$

Il faut ainsi faire 90 coutures différentes pour construire le ballon de football.

10. Polyèdres et nanosciences :

La physique et la chimie aussi se sont emparées des polyèdres pour représenter les différentes molécules. D'abord en ***cristallographie***, où les propriétés des polyèdres ont permit de classer les cristaux selon des critères de symétrie.
Plus récemment, s'est développé la ***nanoscience**,* qui est l'étude des phénomènes et manipulations de matériaux à l'échelle atomique et moléculaire, où les propriétés diffèrent significativement de celles à plus grande échelle.
Les physiciens, chimistes, biologistes et ingénieurs étudient depuis longtemps des entités à taille nanométrique.Pour analyser cet univers*,* on peut partir des atomes et molécules pour constituer progressivement des amas, les *nanomondes*. Lorsque le nombre d'atomes croît, les arrangements géométriques varient et les structures des atomes sont répartis suivant des polyèdres.

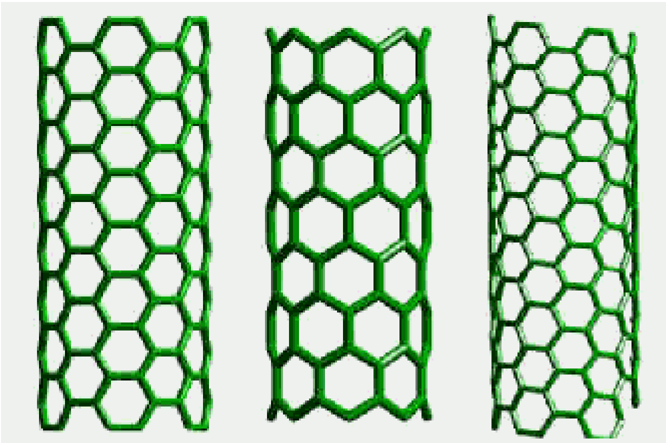
En 1985, trois chercheurs, Richard Smalley, Robert F. Curl et Harold W. Kroto découvraient une nouvelle forme allotropique du carbone, la molécule C_{60} constituée de 60 atomes de carbone répartis sur les sommets d’un polyèdre régulier formé de facettes hexagonales et pentagonales. Chaque atome de carbone a une liaison avec trois autres. Cette forme est connue sous le nom de Buckminsterfullerene ou Buckyball et doit son nom à l’architecte et inventeur américain Richard Buckminster Fuller qui a créé plusieurs dômes géodésiques dont la forme est analogue au C_{60}.



En 1996, ils reçurent tous trois le prix Nobel de chimie.

Plus généralement, les fullerènes dont fait partie le C_{60}, sont une nouvelle famille de composés du carbone. Leur surface se compose d'une combinaison d'hexagones et de pentagones à l'instar des facettes d'un ballon de football. Cette disposition leur confère des structures toujours fermées en forme de cage de carbone.

Il fallut néanmoins attendre 1990, pour que Huffman et Kramer de l'Université de Heidelberg, mettent au point un procédé de synthèse permettant l'obtention de ces molécules en quantités macroscopiques. Les nanotubes ont été identifiés six années plus tard dans un sous-produit de synthèse des fullerènes



Pour pouvoir maîtriser, utiliser et produire ces matériaux de nouvelles technologies se sont développées sous le nom de ***nanotechnologie***.
Actuellement, cette technique permet une amélioration de la qualité de fabrication sans précédent. Les atomes étant placés de façon précise, les problèmes liés aux impuretés et aux défauts dans les matériaux disparaissent presque entièrement. Il est ainsi possible de fabriquer des matériaux plus solides, utilisant beaucoup moins de matière.