PRÉSENTATION D'UN MÉMOIRE DANS LE CADRE DU CONCOURS DE L'ASCBR

THOMAS CONNOR

1. Titre original

Mon mémoire a pour titre *The sporadic group of Suzuki and apartments in coset geometries*. Ce titre se traduit en français par *Le groupe sporadique de Suzuki et appartements dans les géométries à classes latérales*. Je l'ai rédigé sous la direction de Dimitri Leemans et de Francis Buekenhout à l'Université Libre de Bruxelles durant l'année académique 2010–2011.

2. Cadre et contexte

Mon mémoire se situe dans le domaine des mathématiques, plus particulièrement en géométrie. Cette branche des mathématiques s'intéresse à la *symétrie* et aux objets abstraits qui permettent de l'appréhender. L'un de ces objets porte le nom de *groupe fini*.

Une catégorie remarquable de groupes finis est celle des *groupes simples finis*. Ils constituent en quelque sorte les atomes en lesquels tout groupe fini peut se décomposer selon des lois complexes dites d'*extensions de groupes*. Les groupes simples finis ont reçu beaucoup d'attention depuis quelques décennies. Un théorème des années 1980, dont la preuve prend environ 15.000 pages, affirme que tous les groupes simples finis sont connus. Ils se répartissent en 19 familles.

Une connaissance géométrique approfondie des groupes est un élément crucial pour les nombreux développements qu'offre la théorie des groupes. Ces développements se situent aussi bien en mathématiques pure que dans beaucoup de branches scientifiques telles que la physique ou la chimie. Il existe également des retombées plus concrètes, comme la conception de codes correcteurs d'erreurs.

La *théorie des immeubles*, due au mathématicien belge Jacques Tits, donne une interprétation géométrique de la grande majorité des groupes simples finis. Cependant, deux familles échappent à cette théorie : les groupes *alternés*, qui constituent une famille infinie, et 26 groupes appelés *sporadiques*. Cette dernière catégorie contient certains des groupes parmi les plus difficiles à appréhender. Ils échappent en quelque sorte à toute tentative de classification. Des géomètres ont alors voulu considérer le problème suivant : trouver une théorie qui permette d'interpréter uniformément et de manière géométrique tous les groupes simples finis, y compris les groupes alternés et sporadiques.

Un mathématicien belge, Francis Buekenhout, a cherché à généraliser la théorie des immeubles en affaiblissant les axiomes requis dans le but de répondre à cette gageure. Cette nouvelle théorie porte le nom de *théorie des géométries à diagrammes*. La démarche

Date: 11 septembre 2011.

adoptée consiste à poser un ensemble d'axiomes qui définissent une *géométrie* sur laquelle un groupe agit. La théorie se base sur un langage efficace entre géométries et groupes qui donne lieu au concept de *géométrie à classes latérales.* A ce jour, un ensemble d'axiomes a été dégagé ; une géométrie satisfaisant ces axiomes est qualifiée de *géométrie BCDL*, d'après les noms des quatre initiateurs du projet, Buekenhout, Cara, Dehon et Leemans.

Une question surgit : le concept de géométrie BCDL permettra-t-il de fournir l'interprétation unifiée recherchée ? Tout l'enjeu est alors de déteminer si l'ensemble d'axiomes BCDL est suffisamment porteur, en le testant en particulier sur chacun des groupes sporadiques.

3. Objectifs

L'objectif de mon mémoire était double. Il consistait d'une part à étudier une généralisation du concept d'*appartement*, inspiré de la théorie des immeubles, aux géométries à classes latérales. Un appartement d'une géométrie est lui-même une sorte de géométrie atomique. L'existence d'un appartement dans une géométrie assure d'une certaine manière une grande richesse de symétrie à la géométrie et constitue donc une propriété souhaitable. Cette généralisation est due au travail de Buekenhout et Leemans. Une question se pose : sera-t-il intéressant d'ajouter ce concept aux axiomes BCDL ? Pour tenter d'y répondre, Buekenhout et Leemans ont eu l'idée d'écrire un algorithme permettant de tester systématiquement la propriété "appartement". Ils ont entamé cette analyse pour les groupes sporadiques. Mon objectif était de poursuivre ce travail.

D'autre part, j'avais pour but d'étudier cinq géométries connues pour un groupe sporadique appelé le groupe de *Suzuki.* Ce groupe, découvert en 1969 par le mathématicien japonais Michio Suzuki, possède 448.345.497.600 éléments ainsi qu'une structure très complexe. Mon second objectif était donc de poursuivre l'analyse de l'ensemble d'axiomes BCDL pour ce groupe.

La conjonction de ces deux axes de recherche m'a amené à déterminer l'existence ou la non-existence d'appartements dans les géométries que j'ai considérées pour le groupe de Suzuki.

4. Résultats et impact

Les deux objectifs fixés ont été pleinement atteints. En poursuivant l'analyse systématique de la propriété "appartement" pour les groupes sporadiques, j'ai été amené à concevoir et à écrire un algorithme, en collaboration avec Dimitri Leemans. Il a permis de répondre à de nombreuses questions ouvertes. Cet algorithme a donc non seulement considérablement amélioré nos recherches, mais fait aussi l'objet d'un article soumis pour publication.

La collection des résultats obtenus conforte notre généralisation du concept d'appartement et ouvre la voie à des recherches plus poussées.

D'autre part, j'ai analysé les cinq géométries que je m'étais fixées pour le groupe de Suzuki. J'ai déterminé que quatre d'entre elles sont des géométries BCDL et que deux d'entre elles vérifient la propriété "appartement". Ces derniers résultats, loin d'être décevants, permettent à nouveau d'envisager des recherches supplémentaires, et font l'objet d'un article que je rédige actuellement.