Alain Connes et Stanislas Dehaene dialoguent sur : *Le goût des mathématiques* Transcription d'une émission de France Culture le 28 août 2011

Charlotte Bouckaert
UREM-ULB

10 octobre 2011

France-Culture en association avec le *Collège de France* a diffusé l'émission *Croisements* animée par le journaliste Philippe Petit. Le 28 août 2011, l'émission qui a réuni Stanislas Dehaene et Alain Connes avait pour thème *Le goût des mathématiques*.
http://www.franceculture.com/emission-croisements-le-gout-des-mathematiques-2011-08-28.html

Présentation des intervenants

Alain Connes est professeur depuis 1984 au Collège de France où il occupe la chaire d'Analyse et Géométrie. Il est médaillé Fields 1982. (Voir en annexe la biographie d'Alain Connes sur le site du Collège de France.)

Stanislas Dehaene est professeur depuis 2005 au Collège de France où il occupe la chaire de Psychologie Cognitive Expérimentale. Il a étudié à l'Ecole Normale Supérieure, section mathématiques. Il a une Licence et une Maîtrise en Mathématiques Appliquées et Informatique.(Voir en annexe la biographie de Stanislas Dehaene sur le site du Collège de France.)

Le goût des mathématiques

Philippe Petit : Comment nous vient le goût des mathématiques ?

Stanislas Dehaene : . . . Le psychologue peut dire : au tout début, je veux vraiment dire dans les toutes premières années de vie de l'enfant, il y a déjà des mathématiques, et d'une certaine manière, donc, nous sommes tous des géomètres en puissance.

Mon point de vue de psychologue, c'est qu'il y a dans la psychologie et dans l'organisation même du cerveau des structures qui sont protomathématiques et qui font de nous des mathématiciens en puissance.

Alain Connes : . . . Je préfère donner l'exemple du fils d'un collègue littéraire, un ami de l'Ecole Normale Supérieure, perdu de vue et retrouvé quelques années plus tard lors d'un voyage en train. Il m'a parlé de son fils qui avait été malade vers 3 ou 4 ans. Il raconte qu'il était sur la plage avec son fils quand celui-ci avait 5 ans ; il voyait que celui-ci n'allait pas se baigner et était un peu pâlichon. Au bout d'une heure le fils est venu trouver son père et lui a dit : « Papa, il n'y a pas de plus grand nombre ». Le père, qui est littéraire, lui a dit : « Mais comment tu sais ça ? ». Son fils avait trouvé une démonstration. C'est ça les mathématiques. Quand vous demandez comment quelqu'un devient mathématicien, quand un enfant de cinq ans pose cette question, on sait qu'il est mathématicien. On le sait. On n'a pas besoin d'autre preuve.

Stanislas Dehaene : De ce point de vue là, on va pouvoir dire que tous les enfants sont des mathématiciens, parce que tous découvrent qu'il y a, par exemple, des nombres. Et peut-être les idées vont s'enchaîner ensuite et ils vont découvrir que l'addition de +1 permet de changer d'un nombre à l'autre, qui est un concept de successeur indispensable à l'axiomatisation des mathématiques.

On a fait chez nous des expériences qui sont un peu similaires à ce que vous décrivez, c'est-à-dire qu'on a la chance d'envoyer des expériences en Amazonie, chez des personnes qui non seulement n'ont pas un bon accès à l'éducation, pratiquement pas d'écoles dans le lieu où l'on va, chez les Indiens Mundurucus, mais également n'ont pas un langage pour parler des mathématiques. Par exemple, leurs nombres s'arrêtent à cinq. Ils ne peuvent pas vraiment compter avec. Ils n'ont pas de langage pour parler des parallèles ou des droites, des points ou des carrés. Ils n'ont rien de tout ça. Néanmoins, quand on fait des expériences de la bonne manière, c'est-à-dire en introduisant en une minute des concepts mathématiques élémentaires, on s'aperçoit que, comme l'enfant que vous venez de décrire, ils ont les bonnes intuitions.

Par exemple, on leur décrit un monde absolument plat (évidemment, on a en tête le monde d'Euclide, le plan euclidien). On leur dit : il y a des tout petits villages (les villages, ce sont des points évidemment), et puis des chemins qui vont d'un village à l'autre et qui vont absolument tout droit devant vous. Il suffit de quelques minutes pour introduire ce monde virtuel et immédiatement ces personnes qui n'ont pas reçu d'éducation particulière ont en tête les mêmes notions que nous concernant les droites et les parallèles. Il n'existe qu'une seule parallèle à une droite donnée passant par un point donné. La somme des trois angles d'un triangle ... tous ces concepts, sont là en puissance.

Evidemment, ils n'ont pas une démonstration. Et ce qui est particulier dans l'entreprise mathématique, c'est la notion de démonstration, mais les intuitions des objets mathématiques, elles sont déjà là.

Philippe Petit : Alors moi, je suis un peu naïf, mais je me pose la question de l'homogénéité ou pas de l'esprit mathématique. On a déjà évoqué l'éducation et la diversité culturelle des peuples. Néanmoins, il y a une histoire des mathématiques et Euclide n'était pas Amazonien (je ne sais pas si cela a de l'importance qu'il le fût). Et puis autre chose, un peu à la suite de cette question sur l'histoire des mathématiques : la légitimation des mathématiques. Il y a des mathématiciens qui deviennent des joyeux traders. Il y a un usage des mathématiques qui varie considérablement ...

Alain Connes : ... Il y a deux choses très importantes. D'abord, de mon point de vue, on ne devient mathématicien qu'en agissant. ... L'enfant dont je parlais, ... la chose qui était importante, c'est qu'il avait agi, c'est-à-dire qu'il s'était lui-même posé la question et qu'il y avait répondu par lui-même en trouvant une démonstration. Il avait donc fait un acte. C'est extrêmement important et, en ce sens-là, les mathématiques diffèrent de beaucoup d'autres sujets dans lesquels c'est en grande partie une question d'apprendre, d'éducation. On en vient très vite à la question « Comment est-ce qu'on apprend les mathématiques ? »

On parlait des peuples primitifs, mais il y a eu une évolution formidable, considérable au XXe siècle. Elle a eu des aspects extrêmement positifs mais aussi des aspects négatifs et il y a eu des critiques extrêmement fortes contre les mathématiques modernes. Je vais essayer de vous donner une de ces critiques et de vous montrer en quel sens elle est extrêmement limitée. Le mathématicien Arnold, disparu cet été, avait émis une critique extrêmement forte contre la manière d'enseigner les mathématiques en France. Il disait que quand on demande à un petit Français : « que vaut 2+3 ? », l'enfant répondait : 3+2 parce que l'addition est commutative.

Quand vous parliez de justification des mathématiques, pour Arnold, les mathématiques, c'est une partie de la physique.

Ce point de vue est extrêmement limitatif parce qu'il ignore l'évolution des mathématiques au XXe siècle. Ce que les mathématiques ont réussi à faire au XXe siècle, c'est à capturer dans leurs filets des concepts jusque là impossibles à décrire par défaut de langage pour les décrire. Les mathématiciens arrivent à décrire ces concepts avec une précision infinie, c'est-à-dire à les définir de manière parfaite.

Pourtant, la définition a un goût qui reste enfantin. C'est-à-dire que ça reste simple. De mon point de vue, cette évolution des mathématiques fait que, d'une certaine manière, les mathématiques ont pris le relais de la philosophie dans l'élaboration des concepts. Le langage mathématique a maintenant suffisamment mûri, s'est suffisamment développé pour qu'il arrive à donner un sens à des concepts courants que l'on n'arriverait pas à définir proprement si on n'avait pas le langage mathématique.

Philippe Petit : Un petit exemple de concept mathématique courant ?

Alain Connes : ... Avant les gens parlaient de nombres. Maintenant, comme on a des ordinateurs, qu'on voit des graphes, qu'on regarde la télévision, on ne s'intéresse plus aux nombres, on s'intéresse aux fonctions. Il y a quantité de notions mathématiques comme la convexité, la croissance ..., la dérivée première, qui sont des concepts qui ont un sens manifeste lorsqu'on regarde un tas de phénomènes, pas seulement la bourse, ...

Tous ces concepts-là sont à la fois très simples et d'une précision infinie.

Stanislas Dehaene : Je crois que c'est un point de vue tout à fait fondamental sur lequel Alain Connes porte attention. C'est la capacité des mathématiques à créer des concepts nouveaux ou des objets méthodologiques nouveaux pour le cerveau. L'enseignement des mathématiques est fondamental et c'est pour ça qu'on insiste également sur son importance à l'école parce qu'il va donner au cerveau de l'enfant des extensions de ces concepts, une extension qui est vraiment pyramidale d'une manière impressionnante.

En psychologie du tout petit enfant, on voit que les fondements sont les mêmes. C'est-à-dire que le fondement du nombre approximatif, le fondement du sens de l'espace sont présents chez tous. C'est intéressant de voir que c'est exactement présent de la même manière chez le petit garçon et chez la petite fille. Il n'y a aucune différence. Mais ensuite la construction commence et même des objets qu'on considère extrêmement élémentaires comme le concept de nombre exact sont issus d'une construction mathématique.

C'est-à-dire qu'on peut montrer qu'effectivement, chez nos Indiens d'Amazonie, par exemple, comme chez les tout petits enfants, le concept n'est pas encore totalement présent. Ce qui est présent, c'est un concept de nombre flou, de nombre qui a d'ailleurs la propriété d'être logarithmique. Ce qu'on veut dire par là, c'est qu'il y a une sorte de compression des nombres et deux nombres qui sont grands comme 8 et 9 sont plus proches mentalement que 1 et 2, alors qu'arithmétiquement, il y a une différence de 1 entre les deux.

Donc, le concept de nombre change et de manière extraordinaire. Par exemple, nos Indiens d'Amazonie ou de très jeunes enfants en-dessous de 4 ou 5 ans, quand on leur demande : « Qu'est-ce qu'il y a entre 1 et 100 ? » ou « Qu'est-ce qu'il y a entre 1 et 9 ? », au milieu, ils mettent 10 entre 1 et 100 et 3 entre 1 et 9.

C'est la moyenne géométrique, le milieu sur une échelle logarithmique. Pour obtenir ce concept que les nombres forment une échelle linéaire, il faut déjà un enseignement des mathématiques. Alors, cela nous montre la profondeur de cet enseignement mathématique.

Philippe Petit : ... Vous avez prononcé à la fois l'expression d'apprentissage et en même temps d'intuition. Dans la mesure où vous parlez de prédispositions de l'homme à la numérosité et ce qui fait de l'homme une espèce particulière par rapport aux autre primates, quel est le contenu, qu'est-ce qu'on pourrait faire entendre aux auditeurs, Moi, j'ai retenu déjà le mot geste, le geste mathématique, je crois. Il y avait un philosophe Gilles Chatelet qui a essayé de conceptualiser, peut-être mal ...

Alain Connes : C'est pas ça. C'est qu'il faut être beaucoup plus précis que cela.

Philippe Petit : Il faut l'être certainement. Mais l'intuition ? Quel contenu donner à cette intuition, ne serait-ce que pour la faire entendre, comprendre ?

Stanislas Dehaene : De mon point de vue, l'intuition est définie de manière extrêmement empirique. Je crois qu'on appelle intuition un sens très souvent non conscient, inaccessible à l'introspection, extrêmement automatisé, qui nous donne une réponse sans avoir les moyens métacognitifs permettant de savoir d'où vient cette réponse.

Nous avons pu montrer que dans ce sens là, la compréhension des nombres, le fait de savoir quel nombre est plus grand que tel autre, par exemple, ou le sens de l'addition sont de pures intuitions. On n'a ni besoin des les apprendre, ni moyen de savoir comment on fait. Il y a d'autres choses qui ne sont pas des intuitions, par exemple, lorsqu'on fait des calculs à plusieurs chiffres, il faut absolument faire le déroulement complet du calcul dans un certain nombre de cas pour avoir la bonne réponse.

C'est un sens de l'intuition qui est absolument minimal, mais évidemment le grand mathématicien lui, va l'étendre à des objets mathématiques beaucoup plus élaborés.

Ce que j'espère, c'est qu'il va y avoir quelque chose de commun à ces notions d'intuition même pour des objets mathématiques beaucoup plus complexes, comme par exemple des espaces vectoriels de dimension infinie. J'espère que lorsque le mathématicien utilise le terme d'intuition, il fait référence en réalité à des objets mentaux dans son cerveau qui ont cette propriété d'automaticité et ce caractère non conscient.

Alain Connes : Je dirais la chose suivante. Prenez quelqu'un qui n'est pas musicien et qui voit dans le métro quelqu'un qui lit une partition musicale. Il ne comprendra rien. Prenez quelqu'un qui n'est pas mathématicien et qui voit dans le métro quelqu'un qui est en train de lire un article de mathématiques avec plein de formules. Il ne comprendra pas. Pourquoi est-ce que le mathématicien comprend ? Il comprend parce qu'il s'est déjà créé ce qu'on appelle des images mentales.

Lorsqu'il regarde des formules mathématiques, ce n'est pas la formule mathématique qu'il voit. Il fait un lien absolument instantané avec ce que dans sa tête il a construit. Il n'a pu construire cette image mentale dans sa tête, que par un acte actif, pas de manière passive.

Comment se manifeste l'intuition en mathématiques. De la manière la plus crue, elle se manifeste sous la forme suivante : le mathématicien dit « Il y a quelque chose là ». Il sent, de manière extrêmement diffuse qu'il y a quelque chose là. Il y a une force qui le met en mouvement comme un chasseur pour y aller voir. Mais il va voir avec toute sa rationalité, tout ce qu'il peut mettre de son intelligence. L'intuition, c'est donc une espèce de mise en mouvement.

Mais après, l'intuition se manifeste tout à fait autrement. Elle se manifeste par un sens esthétique. Une des armes qu'a le mathématicien et que n'a pas encore l'ordinateur (je pense qu'il ne l'aura pas pendant des années et des années), c'est le pouvoir de ce qu'on appelle en mathématiques : les analogies. Vous allez avoir un domaine des mathématiques qui va se dérouler d'une certaine manière et une machine qui va exister. Cette machine, vous l'aurez en image mentale, vous l'aurez dans votre tête et puis vous allez rencontrer un autre problème qui a priori, n'a rien à voir avec l'autre problème, absolument rien, mais vous allez vous apercevoir petit à petit qu'il y a un certain nombre de choses qui ont l'air de marcher de la même manière. mais elles ne marchent pas exactement de la même manière. Elles marchent de manière différente.

Stanislas Dehaene : Ce sens de l'analogie, on le voit nous très directement dans des opérations extrêmement élémentaires. Il existe maintenant une très belle démonstration de l'homogénéité complète du sens de l'espace, du temps et du nombre dans le cerveau. Ces trois concepts fondamentaux des mathématiques font appel aux mêmes types de structures dans le cerveau et d'une certaine manière nous les confondons en permanence. Nous faisons appel aux nombres pour faire référence à l'espace et vice-versa. Evidemment, c'est aux fondements des mathématiques. La géométrie repose là-dessus, la mesure, les espaces plus complexes, ...

Pour vous donner un exemple très simple qui met en valeur cette théorie que j'essaie de développer du recyclage neuronal. Nous réutilisons des aires cérébrales qui sont impliquées dans les mouvements des yeux dans l'espace.

Lorsque nous faisons des opérations arithmétiques, lorsque nous pensons à une addition, l'addition nous déplace vers les grands nombres lorsqu'on ajoute un nombre positif. Ce déplacement va se traduire par une activation des aires cérébrales qui commandent les mouvements des yeux vers la droite, parce que dans notre culture, les grands nombres vont vers la droite.

Inversement, quand on pense à une soustraction, on réutilise les circuits du cerveau qui nous font déplacer les yeux vers la gauche. Si vous avez quelqu'un dans le noir et vous lui demandez de générer des nombres aléatoires, vous pouvez deviner à quel nombre il va penser parce que s'il bouge les yeux en haut à droite, il pense à un grand nombre et s'il bouge les yeux en bas à gauche, il pense à un petit nombre.

Evidemment, c'est à un niveau extrêmement élémentaire, mais par exemple, pour prendre des objets mathématiques un petit peu plus élaborés, il est maintenant démontré que lorsqu'on fait de l'algèbre – l'algèbre, c'est le sens du déplacement, c'est l'étymologie – on déplace des objets symboliques. C'est un déplacement littéral dans les images mentales du cerveau. Si je vous demande résoudre $6 - 7x = 0$, le $7x$, on a le sentiment qu'on va le mettre de l'autre côté du signe $=$, on l'emmène à droite, eh bien, on peut le voir comme un déplacement mental. Si, par exemple en même temps il y a des points qui se déplacent dans la mauvaise direction dans le fond de l'image, la personne devient peut-être pas incapable, mais très ralentie pour faire le calcul.
Alain Connes : Je vais rebondir sur cette histoire d'algèbre. C'est assez amusant ce qui se passe pour un mathématicien. On parlait tout à l'heure de geste. Un musicien, il va faire un geste, il va, par exemple, jouer le morceau ; pour un mathématicien, il y a bien sûr la démonstration. Mais un mathématicien ne comprend pas vraiment une démonstration. Il peut bien sûr aller pas à pas à travers une démonstration et vérifier qu'elle est correcte, mais en fait, en faisant cela, il ne comprendra pas vraiment. Et la vraie compréhension d'une démonstration, c'est quand elle est zippée en quelque chose qui n'a plus de temps. Il n'y a plus d'épaisseur temporelle.

Stanislas Dehaene : Mais par contre, on le voit ...

Alain Connes : Bien sûr et ça devient visuel. D'où l'image mentale. Et c'est le moment où l'objet de pensée est déjà compressé au niveau du temps mais existe au niveau de l'image mentale. J'insiste beaucoup sur la distinction entre algèbre et géométrie. Parce que quand on parle d'image mentale, c'est aller un peu dans l'espace, c'est un peu au niveau des aires.

Mais alors, ce qui est très frappant dans l'algèbre, c'est que l'algèbre est un déroulement dans le temps, c'est-à-dire que quand on fait un calcul – cela peut être un calcul extrêmement compliqué – il y a toujours une inscription dans le temps. Il y a toujours un caractère temporel qui se produit. Je ne sais pas si ça correspond à des aires différentes du cerveau ...

Pourquoi ? Parce qu'il y a cette précision diabolique du langage, c'est quelque chose qui, a priori, appartiendrait plutôt à l'hémisphère gauche et qui a un côté précis. Quand on fait de l'algèbre, c'est extrêmement précis.

Par contre, quand on a une image mentale, ça peut être très flou et beaucoup plus robuste. Quand il y a une lésion cérébrale au niveau du calcul, ça peut être fatal, alors que pour les ordres de grandeur ou pour des choses qui sont beaucoup plus qualitatives, là c'est beaucoup plus robuste.

Stanislas Dehaene : Nous avons montré quelque chose de cet ordre là au laboratoire. C'est-à-dire qu'effectivement, lorsqu'il s'agit de dérouler tout un calcul, il y a une grande intervention du langage, notamment pour le calcul exact, notamment pour les tables de multiplication qui font appel très fort à une langue particulière, celle dans laquelle on les a apprises au départ chez un bilingue.

Mais alors, par contre, et ça c'est très important pour la pédagogie, lorsqu'on a fait un calcul, il faut absolument apprendre aux enfants ce que dit Alain Connes, c'est-à-dire, prendre du recul, regarder la totalité de ce qu'on a fait et voir si le résultat qu'on a obtenu colle avec les données du problème de départ. Et cette opération-là qui peut conduire à penser que, par exemple, le résultat est complètement faux parce qu'il est beaucoup trop loin de ce à quoi on devrait s'attendre, fait appel à des régions complètement différentes, qui sont des régions pariétales du cerveau, qui sont des régions associées au sens de l'espace et du nombre, ce sens, cette fois-ci, complètement non-verbal, totalement indépendant de la langue particulière dans laquelle le problème est formulé.

Je pense que l'école, malheureusement, méprise le deuxième au profit du premier. Il faudrait que l'éducation mathématique ouvre l'esprit des enfants plus tôt à ce sens vraiment de la sémantique des mathématiques plutôt qu'à la mécanique.

Philippe Petit : Plutôt qu'à la mécanique, justement, l'été, les nuits sont courtes. Vous avez évoqué le trajet, la mise en mouvement de la découverte, ce temps de latence parfois nécessaire pour aboutir à une démonstration, qui nécessite l'intervention de l'intuition et vous avez dit « ... sur ce point, l'ordinateur, il n'est pas prêt de nous rattraper. »

Alain Connes : Non, c'était sur l'analogie.

Philippe Petit : Oui.

Stanislas Dehaene : et l'esthétique.

Philippe Petit : Est-ce que le travail du rêve, à votre avis, porte pour une découverte ? Est-ce qu'on continue à travailler la nuit ?

Alain Connes : Non, non. Il faut comprendre le rêve d'une autre manière. Voyez, si vous vous dites : bon, je vais m'endormir et puis je saurai démontrer le théorème le lendemain, ça peut arriver. Ça peut arriver que vos idées se clarifient parce que vous êtes plus reposé, etc. Mais, c'est pas sous cette forme-là qu'il faut entendre le rêve. Non. Ce qu'il faut comprendre, si vous voulez, c'est que, justement, il y a deux étapes absolument distinctes et fondamentales dans le travail du mathématicien.

Il y a la première période dans laquelle le mathématicien doit, comment dire, ne pas trop se préoccuper du détail, suivre son intuition, et suivre précisément cette capacité qui est présente dès le départ, de pouvoir rêver. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire, si vous voulez, d'être capable, justement, de créer non seulement les images mentales péniblement acquises à travers, si vous voulez, un état de travail préliminaire, mais ensuite, justement, être capable de deviner, exactement comme avant, comme si on était dans un véhicule, qu'on se déplaçait et qu'on allait tourner à l'angle d'une montagne et qu'on essayait de deviner le paysage.

Et bien, le mathématicien doit être capable de rêver en ce sens-là. C'est bien sûr un rêve éveillé. Evidemment. Mais ça joue un rôle absolument fondamental. Pourquoi ? Parce qu'en étant capable de donner des noms à des choses non encore capturées, en étant capable, si vous voulez, d'imaginer leurs interrelations, etc., on les fait déjà exister. Et en les faisant exister, elles créent par cette existence-là un pouvoir attractif qui fait que le cerveau se met en mouvement. Et c'est là le geste dont on parlait tout à l'heure.

C'est-à-dire qu'il y a certaines idées mathématiques, bon, l'idée à laquelle on revient toujours, si vous voulez, c'est le début des mathématiques modernes, c'est Galois, etc. Et il y a certaines idées mathématiques qui ont cette capacité extraordinaire qu'elles sont des générateurs de mouvement. C'est-à-dire que l'idée par elle-même met le cerveau en mouvement et lui permet de rêver et lui permet, par là même d'accéder à des domaines, des régions qu'il ne connaîtrait pas. Alors, évidemment, après, il faut savoir ... Est-ce qu'on va rêver complètement ? Où est-ce qu'il y a une réalité derrière ?

Philippe Petit : Vous me permettez une question d'enfant ? Est-ce que le fait que Galois savait qu'il allait se battre en duel et qu'il allait mourir, est-ce que cela a joué ?

Alain Connes : Non ! Non ! Ça n'a absolument pas joué.

Philippe Petit : C'est de la légende ?

Alain Connes : Non ! C'est pas de la légende. C'est comme ... Si vous voulez, Galois a eu une vie absolument terrible, au sens où, je veux dire, il a fait des choses extraordinaires alors qu'il était en prison et qu'il avait vingt ans et que – je pense, je sais pas si c'est Nerval ou qui l'a vu et a dit – il avait l'air d'avoir 50 ans. Donc, il a souffert dans sa chair par le fait qu'il continuait à faire des mathématiques dans des circonstances absolument épouvantables. Donc il ne faut absolument pas ...

Stanislas Dehaene : Il a surtout rédigé un travail qu'il avait fait dans les mois précédents.

Philippe Petit : C'est à ça que je pensais.

Stanislas Dehaene : Néanmoins, il s'est surtout précipité sachant sa probable mort prochaine en duel pour léguer à la postérité ses résultats.

Mais je suis très intéressé par cette notion qu'on doit séparer dans le travail des mathématiciens, un travail d'incubation de la période d'illumination à proprement parler. Cette période d'incubation survient peut-être effectivement dans le sommeil.

Il y a beaucoup de données qui suggèrent que le sommeil est d'abord une période extrêmement active et deuxièmement une période où les idées sont mises en collision, où les problèmes non résolus refont surface, et il y a une très belle démonstration, récemment parue dans la revue *Nature*, d'un exemple très concret de résolution d'un problème mathématique pendant le sommeil.

C'est-à-dire qu'avant le sommeil les personnes pratiquaient un exercice mathématique sans se rendre compte qu'il y avait un raccourci extrêmement, disons direct, mais qui n'était pas évident dans la forme de surface du problème. La plupart d'entre elles ne le voyaient pas. Puis, on les envoyait dormir, et le lendemain matin, deux tiers d'entre elles avaient la solution.

Alain Connes : Alors je vais vous répondre. Je veux dire, je crois que c'est un sujet effectivement assez intéressant ... mais j'ai eu une expérience, j'ai eu une seule expérience qui n'est pas une expérience de sommeil, qui est une expérience très troublante.

C'est quand j'étais élève en 6e. J'étais élève au Lycée Saint-Charles à Marseille et on avait un prof de math en 6e qui était ..., qui avait été parachuté là, alors que c'était un prof de math-sup et math-spé. Il avait fait des études. Il était absolument inadapté à la 6e. Et, il avait une particularité, c'est qu'il avait un regard hypnotiseur extrêmement frappant.

Et alors, l'événement qui s'est produit – j'ai mis énormément de temps à pouvoir m'en remettre de cet événement-là – J'étais dans sa classe et il nous posait en général des problèmes qui étaient absolument impossibles. Et alors, un jour, il avait écrit au tableau un problème de géométrie qui était un problème vraiment pas du tout de la 6e. C'est-à-dire, il y avait plusieurs cercles circonscrits etc. Puis il fallait montrer que plusieurs points étaient sur le même cercle. Enfin, c'était un truc d'apparence impossible. Et puis, il m'interroge. Il m'interroge. Il ne dit rien. Pas un mot. Et je lui donne la réponse. Et après lui avoir répondu, il m'a fallu une demi-heure, une demi-heure pour comprendre pourquoi ce que je venais de lui dire était la réponse au problème qu'il m'avait donné.

Ça, c'est vraiment ... Alors, je sais pas. Peut-être qu'il avait un pouvoir hypnotiseur tel qu'il m'avait hypnotisé au point que je lui donne la bonne réponse. Mais, il y a une autre possibilité. C'était que, bon finalement, je comprenais quand même l'énoncé qu'il m'avait donné et que, comme j'avais a priori moi, si vous voulez, la peur de me tromper etc., il avait réussi par son attitude à libérer quelque chose qui était en moi mais qui était déjà présent et puis qui était la solution. Mais qui était pas conscient. C'était absolument évident que c'était pas conscient, puisqu'il m'a fallu une demi-heure après pour comprendre pourquoi c'était la réponse. Donc c'était évidemment pas du tout au niveau conscient.

Et alors, il n'est pas du tout exclu effectivement que pendant la période de sommeil il y ait un travail qui ... Vous savez tous que quand on parle d'une maison, le cerveau au bout de trois minutes vous dit : « Vous avez oublié les clefs, ou de fermer l'eau » ou un truc comme ça. Donc, il est bien évident que le cerveau continue à fonctionner et ça, le mathématicien le sait tout le temps, et on se réveille la nuit et on se dit : « Zut ! j'ai dû me tromper dans tel truc ... ». Et puis on a des moments d'anxiété absolument terribles. Donc, bien sûr, le cerveau continue à fonctionner.

Mais, j'ai un autre exemple de fonctionnement comme ça pendant le sommeil, qui est un peu hilarant. Je vais quand même vous le dire parce que c'est tellement drôle. J'étais un jour à la campagne. je n'avais pas mes bouquins avec moi et puis le soir, je me suis dit « Ah, mais le signe qui est devant ce terme, dans une action qui était reliée à la gravitation, c'est pas le bon » Et puis alors, j'avais pas le bouquin pour vérifier, etc. J'ai commencé à faire les calculs moi-même. J'étais fébrile donc, je savais pas si le calcul était bon. Je n'avais pas ce qu'il fallait pour vérifier. Ça m'a pris jusqu'à deux heures du matin. A deux heures du matin, j'étais tellement fatigué que je suis tombé dans un demi-sommeil. D'accord ? Et dans ce demi-sommeil, j'ai fait un rêve ...

Philippe Petit : Ah bien, voyez on y revient ...

Alain Connes : Oui, on y revient. Alors, j'ai fait un rêve. Et quel était ce rêve ? J'avais mon professeur de Math-sup qui me disait : « Prenez votre voiture ». A ce moment-là, j'avais une grosse voiture. Et il me disait : « Démontez-la ». Je prenais ma voiture, je la démontais en tout petits morceaux, pièces, ... Alors après, il me disait : « Remontez-la maintenant ». Donc, je remontais la voiture avec toutes les pièces et tout ça. Et puis il disait : « Mettez en route et regardez si elle roule dans la bonne direction ».

Stanislas Dehaene : Ça, c'est le signe moins. Ça me fait penser à ...

Je dois vous avouer, Alain Connes, je suis aller vous écouter à l'Académie, une fois, spécialement, et je me souviens que vous avez présenté un transparent qui m'a laissé absolument pantois, qui était une équation arrangée sur, je crois, 27 lignes ou peut-être plus, qui était évidemment truffée de symboles mathématiques que personnellement je ne comprenais pas, mais qui était une équation que vous aviez dérivée, qui comprend la totalité du système de la physique contemporaine.

Alain Connes : Le modèle standard couplé à ...

Stanislas Dehaene : Je me souviens très bien que l'un de vos collègues a posé la question : « Mais à la ligne 27 là, il y a une erreur ! ». Et vous avez répondu : « Non, parce que, en fait à la ligne 26 ... »

Voilà la question que j'avais envie de vous poser : Cette équation, est-ce que vous pensez vraiment qu'elle capture la totalité de la physique. Ce qui voudrait dire que les mathématiques sont le langage de l'Univers – c'est ce que prétendait Galilée – ou bien est-ce que c'est notre meilleure approximation ? est-ce qu'il y a la possibilité selon vous que les mathématiques capturent la physique,

Philippe Petit : Alain Connes : c'est la question de l'invariance ?

Alain Connes : Je vais vous répondre à deux niveaux. Parce que, si vous voulez, en l'occurrence, ce que j'ai montré sur ce transparent, c'était ce que les physiciens ont trouvé. C'est-à-dire, si vous voulez, les physiciens ont trouvé qu'il y a un certain nombre de particules. Il y a l'électron, le neutrino, les quarks, etc. Il y a les forces fondamentales et puis il y a la gravitation. Et donc, à partir de ça, les physiciens écrivent une certaine équation qui est effectivement l'équation que j'ai montrée. Quoique ... J'avais même pas la gravitation dans celle que j'ai montrée.

Donc, c'est une équation qui lorsqu'on l'écrit vraiment, paraît infiniment complexe. Et quel est le travail du mathématicien dans ce cas ? Le travail du mathématicien, c'est se dire : la nature ne peut pas être si compliquée que ça. C'est pas possible. Et ce que j'ai trouvé, en l'occurrence, un petit pas, si vous voulez, c'est que, en fait, cette équation, elle ne fait que calculer mathématiquement un concept qui lui est extrêmement simple.

Et qui dit quoi ? Qui dit que la texture de l'espace ou de l'espace-temps n'est pas celle que l'on croit – c'est à dire le continu à toute échelle, mais qu'elle a une structure fine et que dès qu'on introduit cette structure fine et qu'on fait de la gravitation pure sur ce nouvel espace qui a cette structure fine – eh bien, on ne trouve pas la gravitation pure, mais on trouve la gravitation couplée avec le modèle standard.

Donc c'est une simplification. Ça veut dire que je peux montrer cette équation, en fait, simplement pour montrer que ce que les physiciens ont trouvé par des années et des années de dialogues avec l'expérience, a l'air très très compliqué. C'est une équation très compliquée, mais cette équation peut être dérivée de quelque chose qui est infiniment simple et qui est géométrique et qui nous dit quelque chose de l'espace-temps.

Mais, bien entendu, jamais personne ne pourrait prétendre que c'est là la réponse ultime, ...

Philippe Petit : ... ce n'est pas la réponse ultime mais, est-ce que ça vous permet d'établir un lien entre l'unité de la physique et l'unité des mathématiques ?

Alain Connes : Non. Ce que ça vous dit, si vous voulez, c'est que, en fait, la structure géométrique – la géométrie, c'est quand même né du fait que nous, on est dans l'espace et dans le temps. La géométrie fondamentale, c'est quand même celle de l'espace et du temps. – Cette explication de cette formule en quelque chose de simple, c'est de dire qu'à l'échelle où on est maintenant, on est capable de voir (en gros l'échelle de 10^{-16} cm. Avec ce qu'on voit au CERN, maintenant on va plus loin) ... eh bien ça dit, à cette échelle-là, l'espace n'est pas purement du continu. Il y a une espèce de structure discrète.

C'est un peu comme si vous aviez une feuille avec les deux côtés. C'est-à-dire, on n'a pas l'espace qui est simplement d'un seul côté, mais il y a les deux côtés. Donc, il y a une structure discrète qui s'introduit, une structure fine et que, justement, en comprenant cette géométrie, on remplace quelque chose qui est infiniment compliqué qui est cette formule qui a l'air infiniment compliquée parce qu'elle est écrite dans l'ancien espace par quelque chose qui est infiniment simple, c'est-à-dire qui est simplement spectral, c'est-à-dire qui consiste à compter un certain nombre de valeurs propres d'un opérateur. Donc, ça c'est ce qui est derrière.

Stanislas Dehaene : Ce que j'aime bien en vous écoutant, c'est une des visions du cerveau qui est la notion que le cerveau, pour produire du sens, doit comprimer l'information.

Alain Connes : Assurément. C'est exactement ça.

Stanislas Dehaene : Et je crois que les mathématiques sont l'épitome de ça. Comprimer l'information, ça veut dire qu'on a de très nombreuses variables, mais quand on trouve une loi, la loi résume et d'une manière, en quelque symboles, la totalité de ce qu'on peut extraire comme régularité.

Alain Connes : Exactement.

Stanislas Dehaene : Et les mathématiques sont les championnes de ça. Parce que par le biais de formulations ... Il y a un rôle de la notation mathématique qui est très important. La création de notations très compactes permet au cerveau de continuer à manipuler des objets qui sont extraordinairement lourds potentiellement, mais qui ont été réduits à une forme extrêmement compacte.

Alain Connes : Je voudrais rebondir là-dessus, parce que, si vous voulez, justement, c'est ça qui est étonnant. Ce qui est étonnant, c'est que cette potentialité incroyable n'a pas encore atteint la compréhension générale par le public. Je vais vous donner un exemple. Un des grands acquis du XX^e siècle, c'est, bien sûr, ce qu'on appelle la mécanique quantique. Et bon, on entend beaucoup de gens parler de la mécanique quantique, en fait, sans trop savoir de quoi ils parlent.

Mais, il y a un énoncé qui est presque de nature philosophique, si vous voulez, et qui résume bien tout le contenu de la mécanique quantique. Et cet énoncé, c'est le suivant. C'est que la réalité est en fait la superposition de tous les possibles imaginaires. Je vais essayer de vous expliquer ça. Si vous voulez, c'est quelque chose d'incroyable et d'habitude, lorsqu'on parle de la réalité, on a toujours en tête une configuration classique. Bon. Une explication rationnelle au sens classique du terme. On ne parle jamais de mécanique quantique.

Or la merveille de la mécanique quantique, c'est que précisément, si vous voulez, tous les possibles ont un rôle. C'est pas comme si il y a une seule chose qui va se produire. Tous les possibles ont un rôle. Mais, contrairement à ce qui se passerait dans le calcul des probabilités ordinaire – dans le calcul des probabilités ordinaire, on donnerait une probabilité à chacun des possibles et on dirait : voilà comment ça se produit – dans la mécanique quantique, c'est pas comme cela que ça se produit.

Ce qui se produit, c'est qu'à chaque possible est associé un nombre complexe de module 1. C'est-à-dire, autrefois, on appelait ça des nombres imaginaires. C'est pour ça que j'ai parlé d'imaginaire dans ma phrase, parce que ces nombres imaginaires, en fait, ils ont un rôle crucial. alors donc, ce sont des nombres imaginaires qui sont sur un cercle et la réalité, c'est la somme de tous ces nombres imaginaires. Et ce qui est absolument incroyable, c'est que c'est comme ça que la physique fonctionne.

La physique fonctionne en tenant compte de tous les possibles. Et, c'est quelque chose qui n'est pas du tout encore compris, pas du tout accepté.

Philippe Petit : Excusez-moi, Bernard d'Espagnat a écrit un livre qui s'appelle *Le réel voilé*, métaphore qui vaut ce qu'elle vaut, mais tout simplement pour indiquer que les formulations, disons physico-mathématiques ne pouvaient pas prétendre à décrire la totalité du réel. Est-ce que ce que vous appelez réalité, est le réel ?

Alain Connes : Non. Non. Non. Ce qu'il faut bien comprendre, si vous voulez, c'est qu'en gros l'activité humaine peut être ...

Philippe Petit : ... soit c'est une construction ...

Alain Connes : Non, non. Non, non. Je vais essayer de vous expliquer. L'activité humaine en gros consiste à réécrire le quantique, à réécrire ce qui s'est passé, sous une forme classique et à trouver une causalité classique dans ces choses-là. La philosophie actuelle n'a pas encore compris, n'a pas encore pris la mécanique quantique en pleine figure, si vous voulez, et n'a pas encore compris, justement, quelle est cette originalité incroyable du quantique par rapport au classique.

Stanislas Dehaene : Dans cette discussion entre le réel, la nature, et les représentations que peut en construire le mathématicien, moi je crois qu'il y a une vraie construction mentale. Il y a vraiment quelque chose de difficile qu'il a expliqué pour nous, qui est le fait que les objets de pensée puissent s'ajuster à la réalité. Et ça, c'est quelque chose qui est difficile.

Le point de vue du psychologue cognitif serait le suivant : c'est que le cerveau commence d'abord avec une histoire évolutive. C'est-à-dire que nous avons hérité, nous, comme d'ailleurs de nombreuses autres espèces animales, nous avons hérité de concepts fondamentaux qui sont ceux de nombre, d'espace, de temps, une certaine forme de logique, de probabilité.

Tous ces concepts, qui ont été sélectionnés dans notre cerveau parce qu'ils sont adéquats pour la survie de l'individu. Et puis, dans un deuxième temps, et ça c'est propre à l'espèce humaine, il y a la génération d'analogies, la construction de systèmes de symboles, tous ceux dont on a parlé auparavant.

Et quand j'écoute les constructions, par exemple, sur la mécanique quantique, c'est assez frappant de voir qu'on continue de faire appel à des analogies extrêmement simples, qui sont la notion de possible, le sens de l'espace etc.

Donc, construction d'objets nouveaux, et à nouveau sélection, parce qu'il y a évidemment dans l'histoire des mathématiques plusieurs milliers d'années de sélections d'objets qui se sont trouvés adéquats. Soit adéquats directement avec la physique, soit adéquats d'une façon un petit peu plus indirecte, c'est-à-dire adéquats pour décrire nos propres structures mentales, parce qu'ils sont utiles.

C'est ce fameux concept de boîte à outils mathématiques. Donc voilà. Avec ce double niveau de sélection, il me semble qu'on commence à pouvoir comprendre pourquoi nos outils ne sont pas complètement à côté de la réalité.

Maintenant, la manière dont l'outil colle parfois de façon très très étroite avec la réalité, reste évidemment un challenge considérable.

Alain Connes : J'avoue que je suis un peu sceptique. Je vais vous dire pourquoi. Evidemment, je comprends que cela ait un certain pouvoir explicatif par l'adaptation, etc.

Mais, ce qui me laisse, moi, toujours rêveur, si vous voulez, c'est moins ça que le fait qu'en poussant très loin, lorsqu'on pousse suffisamment, eh bien, on retrouve par exemple, la table périodique des éléments à partir de choses purement mathématiques. Et ça devient troublant, ça devient vraiment troublant, c'est-à-dire qu'on se dit : « Des gens qui seraient dans un autre système, dans une autre galaxie, eh bien, ils trouveront la même chose. ».

Alors bon, en fait, si vous voulez, ce qui est frappant, c'est que lorsque on pousse suffisamment loin, on s'aperçoit que c'est plus qu'un pouvoir explicatif, c'est-à-dire qu'on arrive à retrouver presqu'à l'intérieur des mathématiques cette réalité extérieure ... on arrive presqu'au sentiment ...

A un moment donné, je m'étais aperçu que dans le langage courant les mots ne commutent pas, c'est-à-dire ce qu'on appelle la non commutativité, cela engendre le temps. Ça, c'est quelque chose d'incroyable. On pourrait dire, oui, beh d'accord, on va avoir une espèce de réalité complètement figée, complètement statique, et tout ça ...

Mais non. Même la notion de temps, elle apparaît lorsqu'on réfléchit suffisamment.

Philippe Petit : Alain Connes, est-ce que vous voulez dire que c'est plus qu'une construction de l'esprit, c'est une vérité ?

Alain Connes : Voilà. Exactement. Je peux vous dire quelque chose de très simple.

Philippe Petit : Une vérité, c'est le mot qu'on n'a pas prononcé ...

Alain Connes : Voilà.

Stanislas Dehaene : Est-ce qu'on est si sûr que tous les esprits convergeraientt nécessairement vers la même ..., vers le même objet ?

Philippe Petit : C'est le problème des vérités mathématiques alors ...

Stanislas Dehaene : ... parce qu'il me semble que nous, nous ne pouvons pas sortir de la structure de notre esprit humain et donc nous avons l'impression que nous ne pouvons pas penser autrement.

Mais, c'est Poincaré qui disait que peut-être l'esprit des poissons – c'était un peu une plaisanterie – mais enfin, il disait : Les poissons qui vivent dans un monde fluide pourraient avoir des mathématiques différentes des nôtres, puisqu'il n'y a pas d'objets discrets et par contre, tout ce qui est turbulence serait totalement intuitif pour eux. ... leur esprit convergerait vers une autre sorte de mathématiques.

Alain Connes : ... le poisson, sauf s'il vit complètement tout seul, il aura quand même l'idée : un poisson, deux poissons, trois poissons ...

Stanislas Dehaene : Sans doute ... Effectivement, ça a été prouvé ... Est-ce qu'il y a plus de congénères ... Nous vivons tous dans un monde où il y a des objets discrets ...

Philippe Petit : Un mauvais exemple de Poincaré

Stanislas Dehaene : J'aimerais parler de la mécanique des fluides et cette notion que peut-être on aurait des intuitions extraordinairement différentes si le monde dans lequel on vivait n'était pas, par exemple, à la même échelle. Effectivement, à l'échelle à laquelle nous vivons, il y a des objets discrets, il y a un sens de l'espace très largement euclidien. Ces idées sont spontanées et elles sont adéquates. Je pense qu'on ne peut pas exclure que d'autres personnes aient d'autres idées.

Alain Connes : ... Bien sûr, je suis d'accord avec tout ça, mais ... Ce qui est beaucoup plus troublant, c'est lorsque les explications atteignent un niveau tellement fondamental qu'on arrive à expliquer le tableau périodique par des choses ... On part de rien, on part de rien de la mécanique quantique et on arrive a expliquer qu'on a tous ces corps chimiques.

Donc, on peut pas imaginer que ... Je veux dire, peut-être que des gens d'un autre système solaire, d'une autre galaxie, n'auront pas encore trouvé ça. Mais, on ne peut pas imaginer qu'on n'a pas trouvé là quelque chose d'absolument fondamental et qui a à voir avec une vérité.

Je veux dire, on ne peut pas dire : on a fait ça par sélection naturelle. En tout cas, moi, l'image que je prends toujours. Je dis : La sélection naturelle a un pouvoir explicatif absolument extraordinaire. Mais, on n'est pas allé sur la Lune par sélection naturelle.

Stanislas Dehaene : L'hypothèse de la sélection darwinienne des objets mathématiques n'exclut pas, évidemment, qu'il y ait une régularité dans le monde extérieur. Tout le monde s'accorde sur l'idée – sauf si on est solipsiste – je pense qu'on est bien obligé de s'accorder sur l'existence d'un monde extérieur qui est organisé.

Mais là où le débat pourrait porter, c'est : est-ce qu'il est vraiment organisé suivant les lois mathématiques ou bien est-ce que les lois mathématiques sont le fait de notre espèce avec notre cerveau et ses limitations. Je me demande toujours, par exemple, si vous pensez que le mathématicien a des limites représentationnelles et cela peut à un moment arrêter l'entreprise mathématique.

Alain Connes : Je reviens à ce que je disais au départ sur Arnold. Parce que justement, penser que le mathématicien construit tout ce qu'il fait à partir de la physique, à partir d'un monde physique, justement, c'est un peu le point de vue d'Arnold quand il disait : les mathématiques font partie de la physique et on a décidé au XX^{e} siècle de diviser entre mathématiques et physique et ça a été une grande catastrophe et que beaucoup de mathématiciens ne connaissaient que la moitié de leur sujet puisqu'ils ne connaissaient pas la physique.

Stanislas Dehaene : Ce n'est pas ça que je dis. Il s'agit vraiment de structures mentales qui dépassent la physique.

Alain Connes : Justement. Et alors, ce qui est étonnant dans les mathématiques modernes, c'est-à-dire, les mathématiques du XX^{e}, siècle, c'est que justement elles arrivent à aller complètement au-delà du monde physique. Et c'est ça qui est fantastique, et finalement, à la fin, en fin de compte, si on essaie de réfléchir à ça, si on essaie de revenir sur ses pas, etc., on a l'impression, beaucoup plus, que le monde physique est à l'intérieur des mathématiques que l'inverse.

C'est ça, l'impression qu'on a. A la fin du compte, on a l'impression qu'il y a un monde incroyablement structuré qui est le monde mathématique et je vais essayer de vous expliquer en quel sens il est distinct des élaborations du cerveau, et que le monde physique se situe à l'intérieur.

C'est ça l'impression qu'on ressent, au bout du compte. Et ça, c'est extrêmement frappant. Et justement, c'est là qu'il faut arriver à distinguer entre les constructions du cerveau qui sont très importantes, bien sûr, qui nous permettent d'accéder à ce monde et le monde mathématique tel qu'il est.

Stanislas Dehaene : Mais, moi je ne crois pas à l'existence de ce monde platonicien. C'est quelque chose qui divise très profondément. Je crois que ce serait très juste de dire que la majorité des mathématiciens sont effectivement platoniciens et qu'inversement, la majorité des biologistes ne le sont pas.

Et bon, la théorie que moi j'aimerais essayer de développer – je conçois que pour l'instant, elle ne s'applique qu'à des objets mathématiques très élémentaires – c'est l'idée que ces objets sont des constructions de notre cerveau et pour devenir un grand mathématicien, il faut les rendre tellement intuitives qu'il faut les transformer en réels objets mentaux comme s'ils avaient une existence objective.

On a parlé de ces images mentales. Je pense que ça donne aux mathématiciens une extraordinaire impression de réalité. C'est une introspection dont il faut absolument rendre compte. Moi, je pense que le psychologue doit rendre compte de l'introspection. Mais ça n'est qu'une introspection et il est tout à fait possible qu'elle ne soit pas juste.

Alain Connes : Oui. Alors, je crois que je vais essayer de vous donner justement une image mentale de ce que je pense être la situation. Et cette image mentale, elle vient en fait de la logique. Et alors, en gros, si vous voulez, ce qui se produit ... Je vais vous donner un exemple d'un fait mathématique qui est vrai mais qui n'est pas démontrable.

Et alors, – ça va vous paraître extrêmement bizarre, parce que vous allez dire : mais comment vous savez que c'est vrai ? C'est pas démontrable. – Et une fois que je vous aurai donné l'exemple, que je vous l'aurai expliqué un petit peu, l'analogie que je voudrais que vous compreniez ... l'analogie du mathématicien par rapport à la réalité mathématique, c'est exactement la même que l'analogie du tribunal par rapport à la vérité.

Les démonstrations qu'il fait avec un système d'axiomes et cette réalité mathématique. Pour être concret, il suffit pour démontrer ce que je vais vous dire, de parler des entiers. C'est-à-dire qu'on n'a pas besoin de construction très compliquée, mathématique, etc. Il suffira que je vous parle d'entiers pour vous donner un fait qui s'énonce dans ce que l'on appelle l'arithmétique de Peano, c'est quelque chose de très simple, c'est la mathématique des entiers telle qu'on la connaît.

Ça va être un fait qui va être vrai et je pourrais vous expliquer pourquoi on sait qu'il est vrai, mais qui ne sera pas démontrable dans cette arithmétique de Peano.

Donc j'espère que j'ai un peu de temps pour vous expliquer ça. Je veux pas prendre trop de temps mais je vais essayer de vous expliquer. C'est la fable du lièvre et de la tortue. La voilà réalisée mathématiquement. On part d'un nombre, par exemple le nombre 4, on l'écrit en base 2 et on écrit tous les exposant en base 2, les exposants des exposants, etc. Donc 4 ça fait 2^2. Le lièvre arrive et il remplace tous les 2 par des 3. Ça va faire 3^3 ? Ça fait 27. La tortue arrive. Elle soustrait 1. Ça va faire 26. Le lièvre prend le résultat et il l'écrit en base 3. Ça va faire ... [$26 = 2 \times 9 + 2 \times 3 + 2 = 2.3^2 + 2.3^1 + 2.3^0 = 222_3$] ... La tortue arrive et elle soustrait 1. Eh bien, il se fait qu'au bout d'un nombre fini d'étapes ... Vous allez me dire, mais le lièvre fait des pas énormes, parce que le lièvre, après il remplace tous les 3 par des 4, puis tous les 4 par des 5. Ça va croître énormément ... [Voir en annexe l'explication concernant le théorème de Goodstein].

Et le fait que – on peut faire un devoir de vacances que je conseille fortement – au bout d'un nombre fini d'étapes (mais on ne peut pas le faire à l'ordinateur), au bout d'un nombre fini d'étapes, c'est comme dans la fable, c'est la tortue qui gagne, c'est-à-dire on arrive à zéro. Le nombre d'étapes qu'il faut faire dans le cas du nombre 4 est colossal. C'est un nombre, si vous l'écrivez, vous pourrez pas l'écrire sur un cahier tellement il est grand. Vous ne pourrez pas l'écrire avec ses chiffres décimaux, vous ne pourrez pas l'écrire sur un cahier. D'accord ?

Eh bien, maintenant, le fait qui est vrai, dont on sait qu'il est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano, c'est que quel que soit l'entier n, vous faites la même histoire, eh bien, c'est la tortue qui gagne. Alors, pourquoi on sait que c'est vrai ? On sait que c'est vrai d'après la théorie des ordinaux. On remplace l'exposant 2 par le premier ordinal dénombrable et on sait que ça marche.

Pourquoi on sait que ce n'est pas démontrable ? Eh bien, en fait, parce qu'on sait démontrer que la fonction qui consiste à mesurer le nombre d'étapes qu'il faut pour que la tortue gagne est une fonction qui croît plus vite que tout ce qu'on peut écrire. Et on sait que s'il y avait une démonstration dans l'arithmétique de Peano, on pourrait écrire la fonction en question.

Stanislas Dehaene : Tout ça, c'est merveilleux. C'est un exemple magnifique, mais qu'est-ce que ça veut dire ? ... c'est difficile de s'aventurer dans ce domaine, mais ... Je suis un peu dépassé par l'exemple ...

Mais malgré tout, est-ce que ça ne traduit pas tout simplement la capacité du cerveau à construire des modèles enchâssés dans lesquels, effectivement, – et je crois que Gödel avait déjà vu – il y a moyen de créer une première axiomatisation et puis il y a cette capacité extraordinaire du cerveau de redécrire ses propres objets de pensée, de voir que quelque chose n'est pas démontrable dans un système d'axiomes, mais néanmoins est vrai, peut éventuellement produire un axiome supplémentaire et on ne se prive pas de le faire en mathématiques, de changer les systèmes d'axiomes.

Et c'est ça l'activité mathématique. Ça consiste à générer des systèmes d'axiomes, des démonstrations, mais aussi des intuitions qui sortent des axiomes. Je ne crois pas que notre cerveau fonctionne avec des axiomes. On l'a dit au départ ...

Alain Connes : Je veux quand même vous dire la chose suivante : c'est que, justement, les gens en général ne savent pas ce que Gödel a démontré. Ils croient que ce que Gödel a démontré, c'est que dans tout système d'axiomes, il y aura des choses qui seront indécidables.

Or, en fait, après les travaux de Gödel, ce qu'a démontré Gödel, ce que les gens ont montré, c'est que quel que soit non pas le système d'axiomes, mais même une infinité d'axiomes qu'on peut rajouter comme ça, si vous regardez la proportion des choses vraies et des choses démontrables, la proportion des choses vraies parmi les choses démontrables tend vers zéro.

...Qu'est-ce que ça veut dire ? Comment je perçois ça ? Je le perçois en disant que il y a une réalité, cette réalité mathématique archaïque sur les nombres, où il y a des choses vraies, et puis il y a le tribunal qui a, en gros si voulez, le système déductif qu'a le mathématicien et malheureusement il n'épuisera jamais qu'une toute petite partie, une partie infinitésimale, c'est-à-dire la proportion tendra vers zéro et pour moi, cette réalité elle est aussi réelle que la réalité extérieure.

Stanislas Dehaene : Je trouve ça passionnant, mais, évidemment, même au tribunal, c'est pas tout à fait évident qu'il y ait *une* vérité. Ça fait partie de la discussion ...

... Non, pas toujours. Bien entendu, de temps en temps, les deux personnes qui s'opposent ont chacune leur vérité. C'est très difficile de savoir. C'est pas toujours facile de savoir quelle est *la* vérité.

Philippe Petit : Nous n'allons pas conclure sur ce tribunal des idées. mais, puisque *Croisements* était consacré au goût des mathématiques, un tout petit mot pour donner ce goût et revenir quand même sur l'éducation. Vous connaissez les travaux de Stella Baruk. Il y a une pression énorme et nous avons une obsession française de la note. Alors comment échapper à cela ?

Stanislas Dehaene : Nous avons une responsabilité de rendre les mathématiques aussi passionnantes qu'elles le sont – comme je crois, on l'a vu aujourd'hui.

Nous pouvons chez les très jeunes enfants – en particulier, je crois que cela se joue dans les premières années – tous les enfants sont capables de se passionner pour les mathématiques. Tous ont les structures mentales responsables de cette construction. Il faut les nourrir d'objets mathématiques passionnants – je pense en particulier aux casse-têtes et aux problèmes élémentaires – qui très vite vont leur donner cette impression du caractère pétillant des mathématiques. Et c'est possible.

Alain Connes : Moi je dirai un seul mot : Le goût de l'effort. Pour moi, les mathématiques, c'est d'abord agir et pas apprendre. Surtout pas. Ce qui est extraordinaire, c'est qu'un élève peut avoir raison contre le professeur. Et ça, c'est parfaitement valable en mathématiques. Ça le sera probablement pas en chimie, probablement pas en littérature.

Annexe 1 : Le théorème de Goodstein

Alain Connes fait manifestement allusion au théorème de Goodstein. On peut lire ci-dessous une explication simple trouvée sur Internet :

> La notation d'un entier en base 2, par exemple : $u_1 = 23_{10} = 10111_2$, signifie que $23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Pour l'obtenir en superbase 2, nous devons faire disparaître tous les chiffres plus grands que 2, soit : $23 = 2^{2^2} + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Gardons cette même définition pour les bases 3, 4, etc.
>
> Appliquons maintenant le processus suivant. Remplaçons tous les 2 par des 3, et soustrayons 1. Nous obtenons $u_2 = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1 + 3^0 - 1 = 7625597485017 = 3^{27} + 3^3 + 3^1$. Nous le réécrivons en superbase 3 et nous recommençons : $u_2 = 3^{3^3} + 3^3 + 3^1$, donc notre terme suivant est $u_3 = 4^{4^4} + 4^4 + 4^1 - 1$ qui est déjà un nombre de 155 chiffres. On définit de même $u_4, u_5, \dots u_n, \dots$; des nombres gigantesques.
>
> En 1944 R.L. Goodstein a prouvé :
>
> Théorème : (u_n) est stationnaire en 0.
>
> Pour sa démonstration, Goodstein utilise une certaine classe d'ensembles infinis appelés ordinaux. Ceux-ci disposent de règles arithmétiques analogues, mais non identiques, à celles de $\mathbb{N}$. La transformation que nous faisons subir à un entier u_n pour former u_{n+1} peut être transposée chez les ordinaux. Goodstein majore chaque terme entier u_n (donc fini) par un ordinal α_n (infini) — une majoration très large, qui est conservée à chaque étape. Mais la transformation, chez les ordinaux, vérifie : $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. Or il n'existe aucune suite strictement décroissante d'ordinaux : stationner en 0 est inéluctable.
>
> Ce résultat surprenant n'est que le premier étage du paradoxe. La démonstration de Goodstein est un peu gênante : pour justifier une propriété des nombres entiers, formulable dans l'arithmétique de Peano (AP), elle fait intervenir des ensembles infinis. L'existence de ces derniers est assurée par la théorie des ensembles classiques (ZF — [1]), mais AP ne suffit pas pour les construire. On a donc cherché (longtemps) une preuve du théorème de Goodstein qui ne ferait appel qu'à des propriétés et des objets de AP. C'était impossible.
>
> En 1981, L. Kirby et J. Paris ont démontré que le recours aux ensembles infinis était effectivement indispensable à la démonstration du théorème de Goodstein. Il n'existe donc aucun espoir de prouver ce dernier en restant strictement dans le cadre de AP. La démonstration est considérablement plus difficile que celle du th. lui-même. Elle utilise la notion de calculabilité : le nombre d'étapes N pour atteindre 0 à partir de la valeur u_1 n'est pas une fonction calculable (cf. les fonctions non calculables) ; grosso modo, elle croît plus vite que toute fonction pouvant s'exprimer à l'aide de formules algébriques contenant des entiers. À titre d'illustration, si l'on part de $u_1 = 4$ alors $N = 3.2^{27+3.2^{27}-1} - 2$, un nombre de plus de 120 millions de chiffres décimaux.
>
> Plus précisément, Kirby et Paris ont prouvé que le th. de Goodstein impliquait la consistance [1] de AP. Or il est notoire, depuis Gödel, que cette dernière ne peut être prouvée à l'intérieur de AP. Le théorème de Goodstein est ainsi un indécidable [1] de l'arithmétique de Peano. C'est une propriété profonde, enracinée dans la logique, la théorie des nombres et des ensembles. Il suffirait d'ajouter au principe de récurrence (qui illustre le notion d'infini potentiel) l'existence d'un ensemble infini (infini actuel) pour pouvoir prouver Goodstein, qui est très précisément à la frontière entre ces deux notions.
>
> Note [1] cf. les indécidables
>
> Source : `http://math.pc.vh.free.fr/divers/paradoxes/goodstein.htm`

Annexe 2 : Commentaire de Roland Hinnion sur le dialogue Connes–Dehaene

Mon impression : sur le fond mathématico-logique, M. Connes explique (pas très clairement, à vrai dire) un exemple de "fait arithmétique" (l'existence d'une fonction au comportement surprenant) démontrable dans ZF= Zermelo-Fraenkel (donc la théorie des ensembles sous-tendant nos mathématiques "standard"), mais non démontrable dans Peano (le système axiomatique de l'arithmétique).

Il dit que ce fait est "vrai" (il dit "vrai" tout court), mais non démontrable (dans Peano). En tant que logicien j'exprimerais ça plus prudemment comme : "démontrable dans ZF, non démontrable dans Peano", sans tirer d'autres conclusions, en tout cas rigoureuses. Mais je suppose que M. Connes a le sentiment (on a le droit d'en avoir, bien sûr) que ZF est l'extension ensembliste "naturelle" de Peano.

On peut "argumenter ds ce sens" (pas démontrer) : ZF est un système très bien adapté aux maths classiques, et permet d'avoir tous les beaux théorèmes habituels. Mais ZF n'est (loin de là) pas la seule extension de Peano "raisonnable" (raisonnable signifiant en gros : dont on pense que c'est consistant (= non contradictoire) et efficace pour la construction des structures mathématiques).

Il est facile par exemple d'ajouter à la partie "Z" (= Zermelo = ZF moins les axiomes de remplacement) des axiomes cohérents avec Z, mais qui "démolissent" la (belle) théorie des ordinaux (dont on a besoin pour démontrer Goodstein). Or rien n'exclut qu'un jour une observation empirique en physique par exemple n'amène à penser que les "bonnes" mathématiques (celles modélisant le monde physique) sont celles qu'on développe dans ce Z + ordinaux inhabituels, plutôt que dans ZF classique. En logique mathématique par exemple, il y a énormément de variantes de Z, de ZF ,mais aussi des systèmes tout-à-fait différents qui sont étudiés. Bref : pour ma part,la préférence (vrai=démontrable dans ZF) de M. Connes pour ZF "standard", parmi des tonnes d'autres systèmes, est d'ordre psychologique ... Il n'y a pas de mal à ça. Juste faut-il se méfier de l'ambiguïté dans l'usage du mot "vrai".

Annexe 3 : Biographie d'Alain Connes

Alain Connes
Analyse et géométrie
Biographie
Né le 1er avril 1947 à Draguignan (Var)
Elève à l'Ecole Normale Supérieure, 1966-1970.

CARRIÈRE PROFESSIONNELLE

1970-1974 Stagiaire, puis attaché, puis chargé au CNRS

1975 Coopération à Kingston (Canada)

1976-1980 Maître de conférences, puis professeur à Paris VI

1981-1984 Directeur de recherches au CNRS

Depuis 1976 Professeur Léon Motchane à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures sur Yvette

Depuis 1984 Professeur au Collège de France, titulaire de la chaire d'Analyse et Géométrie

Depuis 2003 Professeur à l'Université de Vanderbilt, États-Unis

EDITEUR DES JOURNAUX SUIVANTS

- Journal of Functional Analysis
- Inventiones Mathematicae (1978-1998)
- Communications in Mathematical Physics
- Journal of Operator Theory
- Ergodic Theory and Dynamical Systems (1981-1993)
- Comptes rendus de l'Académie des sciences
- Letters in Mathematical Physics
- K-theory

- Selecta Mathematica
- Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.
- Advances in Mathematics
- Journal of Noncommutative Geometry

PRIX

1975 Prix Aimé Berthé de l'Académie des sciences

1976 Prix Peccot-Vimont du Collège de France

1977 Médaille d'argent du C.N.R.S.

1980 Prix Ampère de l'Académie des sciences

1982 Médaille Fields

2000 Prix Clay

2001 Prix Crafoord

2004 Médaille d'or du C.N.R.S.

DISTINCTIONS HONORIFIQUES

- Conférence au Congrès international des mathématiciens de 1974 (Vancouver, États-Unis).
- Conférence en séance plénière au Congrès international des mathématiciens de 1978 (Helsinki, Finlande).
- Conférence au Congrès international des mathématiciens de 1986 (Berkeley, États-Unis).
- 1979 Docteur Honoris Causa de l'Université de Kingston, Canada
- 1997 Docteur Honoris Causa de l'Université de Rome Tor Vergata, Italie
- 1999 Docteur Honoris Causa de l'Université d'Oslo, Norvège
- 2009 Doctor Honoris Causa, Université d'Odense, Danemark
- 2010 Doctor Honoris Causa, Université libre de Bruxelles, Belgique
- 1980 Membre étranger de l'Académie royale des sciences du Danemark
- 1980 Membre correspondant de l'Académie des sciences
- 1983 Membre de l'Académie des sciences
- 1990 Membre étranger honoraire de l'Académie américaine des arts et des sciences
- 1993 Membre étranger associé de l'Académie norvégienne des sciences
- 1996 Membre étranger de l'Académie royale du Canada
- 1997 Membre étranger associé de l'Académie nationale des sciences aux États-Unis
- 2003 Membre étranger associé de l'Académie russe des sciences

Biographie d'Alain Connes sur le site du Collège de France
`http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/ana_geo/biographie.htm`

Annexe 4 : Biographie de Stanislas Dehaene

Collège de France > Enseignement > Sciences du vivant > Psychologie cognitive expérimentale > Biographie
Stanislas Dehaene
Psychologie cognitive expérimentale
Biographie
Né le 12 Mai 1965 à Roubaix (59)
Marié, trois enfants
E-mail : Stanislas.Dehaene@cea.fr
Unité INSERM-CEA de Neuro-Imagerie Cognitive
CEA/SAC/DSV/DRM/NeuroSpin
Bât 145, Point Courrier 156 F-91191 GIF/YVETTE, FRANCE
Tél : 01 69 08 83 90 Fax : 33 (0)1 69 08 79 73
Site Web : www.unicog.org

Stanislas Dehaene est ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure et docteur en psychologie cognitive. En Septembre 2005, il a été nommé professeur au collège de France, sur la chaire nouvellement créée de Psychologie Cognitive Expérimentale, après avoir occupé pendant près de dix ans la fonction de directeur de recherches à l'INSERM. Ses recherches visent à élucider les bases cérébrales des opérations les plus fondamentales du cerveau humain : lecture, calcul, raisonnement, prise de conscience. Ses travaux ont été récompensés par plusieurs prix et subventions, dont le prix Louis D. de la Fondation de France (avec D. Le Bihan), le prix Jean-Louis Signoret de la fondation IPSEN, la centennial fellowship de la fondation américaine McDonnell, et le prix Boehringer-Ingelheim de la Fédération Européenne des Neurosciences.

Les nombres dans le cerveau

Stanislas Dehaene est l'expert reconnu des bases cérébrales des opérations mathématiques, domaine dont il a été le pionnier depuis plus de 15 ans. Il a conçu de nouveaux tests psychologiques de calcul et de compréhension des nombres, et les a appliqués aux patients atteints de lésions cérébrales et souffrants de troubles du calcul. Son travail a conduit à la découverte que l'intuition des nombres fait appel à des circuits particuliers du cerveau, en particulier ceux du lobe pariétal. Stanislas Dehaene a utilisé les méthodes d'imagerie cérébrale afin d'analyser l'organisation anatomique de ces circuits, mais aussi leur décours temporel, démontrant notamment dans un article dans Science en 1999 que le calcul approximatif fait appel à des régions partiellement différentes de celles du calcul exact. En collaboration avec le neurologue Laurent Cohen, il a observé de nouvelles pathologies de ces régions, qui conduisent certains patients « acalculiques » à perdre toute intuition du nombre. Il a également montré des homologies frappantes entre le traitement des nombres chez l'homme et chez l'animal.Ainsi, les fondements de nos capacités arithmétiques trouvent leur origine dans l'évolution du cerveau.

Les travaux les plus récents de Stanislas Dehaene montrent que des pathologies de la région pariétale, d'origine traumatique ou génétique, peuvent exister chez l'enfant. Elles entraînent une « dyscalculie » – un trouble précoce du développement comparable à la dyslexie, mais affectant l'intuition du nombre. Le diagnostic, la compréhension, et la rééducation de la dyscalculie constituent des objectifs majeurs de recherche d'un réseau international de l'OCDE et de projets européens auquel participe Stanislas Dehaene. Stanislas Dehaene a résumé ses recherches sur le cerveau et les mathématiques dans un livre à destination du grand public : « La Bosse des maths » (Editions Odile Jacob ; Prix Jean Rostand en 1997)

Lecture subliminale et prise de conscience

Stanislas Dehaene a réalisé les premières expériences d'imagerie cérébrale du traitement subliminal des mots (Nature, 1998 ; Nature Neuroscience, 2001, 2005). Ces expériences ont démontré que des mots ou des nombres présentés trop brièvement pour que l'on en prenne conscience activent néanmoins une série de régions cérébrales spécialisées. La prise de conscience d'un mot est associée à l'entrée en activité soudaine et coordonnée de multiples régions supplémentaires, notamment dans le cortex préfrontal. Avec Jean-Pierre Changeux, Stanislas Dehaene développe des modèles mathématiques de cet « embrasement cortical » qui permet à l'information consciente d'être mémorisée et rapportée (PNAS 1998,2003 ; PLOS :Biology : 2005).

Vers un déchiffrement du code neural

Les recherches actuelles de Stanislas Dehaene tentent de repousser les limites de l'imagerie cérébrale. L'objectif est de déchiffrer le code propre à chaque région corticale et d'en comprendre l'origine au cours du développement. Imagerie cérébrale de la lecture, de la compréhension des phrases, du bilinguisme ; visualisation de l'activité du cerveau du nourrisson ; variabilité du cerveau d'une personne à l'autre Dans ces domaines où l'imagerie cérébrale tisse des liens entre psychologie et neurosciences, les nouvelles recherches développées par Stanislas Dehaene et Denis Le Bihan, dans le cadre du futur centre d'imagerie NeuroSpin, ouvrent des perspectives renouvelées de compréhension du cerveau humain.

CARRIÈRE PROFESSIONNELLE

2005- Professeur au Collège de France, chaire de Psychologie Cognitive Expérimentale

2002- Directeur de l'unité mixte INSERM-CEA 562 de Neuroimagerie Cognitive, Service Hospitalier Frédéric Joliot, Orsay, France.

1997-2005 Directeur de Recherches à l'INSERM

1992-1994 Séjour post-doctoral, Institute of Cognitive and Decision Sciences, University of Oregon (USA), directeur Michael Posner

1989-1999 Chargé de Recherches INSERM au Laboratoire de Sciences Cognitives et Psycholinguistiques, Paris (directeur J. Mehler)

1984-1989 Ecole Normale Supérieure, section mathématiques.

1982-1984 Ecole préparatoire Ste Geneviève, Versailles (section mathématiques).

DIPLÔMES

1999 Habilitation à diriger des recherches, Ecole des Hautes études en Sciences Sociales (E.H.E.S.S.).

1989 Thèse de troisième cycle en psychologie cognitive, Ecole des Hautes études en Sciences Sociales (E.H.E.S.S.).

1986 Diplôme d'Etudes Avancées en psychologie cognitive, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales (E.H.E.S.S.).

1985 Maîtrise de Mathématiques appliquées et Informatique, Université de Paris VI.

1985 Licence de Mathématiques appliquées et Informatique, Université de Paris VI.

DISTINCTIONS ET PRIX SCIENTIFIQUES

2011 Chevalier de la Légion d'Honneur

2010 Professeur Honoraire, East China Normal University (Shanghai)

2010 Membre de National Academy of Sciences USA

2010 Correspondant de British Academy

2010 Membre de American Philosophical Society

2008 Dr A.H. Heineken Prize for Cognitive Science

2008 Membre de l'Académie Pontificale des Sciences

2008 Chevalier de l'Ordre national du mérite

2007 Grande médaille d'or, Association Arts-Sciences-Lettres

2005 Membre de l'Académie des Sciences

2003 Grand Prix de la Fondation Louis D. de l'Institut de France (avec D. Le Bihan)

2002 Médaille Pie XI de l'Académie Pontificale des Sciences

2002 Prix Boehringer-Ingelheim de la Fédération des Sociétés des Neurosciences Européennes (FENS)

2001 Prix Jean-Louis Signoret de la Fondation Ipsen2000 Prix Villemot de l ?Académie des sciences

1999 Centennial Fellowship de la Fondation McDonnell

1997 Prix Jean Rostand pour le livre La Bosse des Maths

1996 Prix Fanny Emden de l'Académie des sciences]

RESPONSABILITÉS ADMINISTRATIVES

2010- Membre de Conseil scientifique de la Direction générale de l'enseignement scolaire [D.G.E.S.C.O].

2009-2010 Membre de Conseil pour le Développement des Humanités et des Sciences Sociales (C.D.H.S.S.).

2009- Membre du Conseil d'administration du SARAH Network of Rehabilitation Hospitals (Brasil).

2009- Membre du Conseil Scientifique de l'Institut De La Vision, Paris

2008- Membre du Conseil Scientifique en Neurosciences, University College London

2008- Membre du Conseil Scientifique de l'INSERM

2005-2007 Comité de pilotage du programme Neurosciences de l'ANR

2001- Conseil de l'International Association For The Study Of Attention And Performance

2001-2005 Conseil d'administration de la Société française des Neurosciences

2001-2005 Commission Avenir de l'INSERM

1999- Conseil scientifique de l'IFR 49 de neuroimagerie

1999-2005 Conseiller scientifique, programme « Cerveau et Education » de l ?OCDE

1997-2005 Conseil scientifique de la Fondation Fyssen

1990-2000 Fondateur et animateur avec L. Cohen du Club Parisien de Neuropsychologie à l'hôpital de la Salpêtrière

1990-1992 Enseignant au D.E.A. de Sciences Cognitives

RESPONSABILITÉS ÉDITORIALES

2011 Conseiller éditorial, Trends in Cognitive Science

2008- Board of Reviewing Editors, Science

2008- Editeur associé, Frontiers in Neurosciences

2006- Conseiller éditorial, Mind Brain and Education

2003- Conseiller éditorial, revue PLOS Biology

2001- Conseiller éditorial, revue Neuroimage

1999-2005 Editeur associé, revue Cognition

1998-2003 Editeur associé, revue Cognitive Neuropsychology

1996- Conseiller éditorial, Editions Odile Jacob

1991-1997 Conseiller éditorial, revue Mathematical Cognition

Biographie de Stanislas Dehaene sur le site du Collège de France :
`http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/psy_cog/biographie.htm`

Remerciements

Merci à Francis Buekenhout qui a permis à ce document de prendre forme grâce à ses relectures minutieuses et critiques et ses suggestions pour structurer le texte.

Merci à Roland Hinnion de m'avoir mise sur la piste des paradoxes.