UREM-ULB
MATHEMATIQUE DU SECONDAIRE 95-96
En collaboration avec le CREM
FRANCIS BUEKENHOUT 29-11-1996

LES FONCTIONS

Niveau: 4e à 5e.

1 Premier tour
-Cuisenaire. Voir dossier ad-hoc.
Les fonctions en 1ère primaire à l'école Decroly.
Cuisenaire-Decroly même combat?
-Livre MathAssocAmer: the concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. 333 pages.
Livre Springer. Analysis by its History.
-Évolution de la notion de fonction (Boffa au Congrès de la SBPM et références standard d'histoire).
-Prendre de l'altitude : les fonctions, pas seulement de R dans R. Pour le prof et peut-être l'élève.
-La rencontre des fonctions usuelles, numériques, graphiques, transformantes,...
-Fonction=Transformation?
Un aspect statique et un aspect dynamique.
-Les fonctions par les fractals.
Semi-groupes.
-Les fonctions par les algorithmes.
-Fonction: cas particulier de relation? Si peu?
-La lente maturation historique: d'abord les équations sans symboles, puis les équations avec symboles, puis les coordonnées, les variables, les formules,...
-La fonction ensembliste. Composition (et, forcément: “inversion” ou “réciprocation”).Associatif.Neutre.
Donc groupe.
Pas très ancien? Apparemment.En fait, d'un usage implicite, non conscient, non analysé depuis des millénaires. Inévitable. Objet de luttes. Pourquoi? Voyez la réalisation d'une tapisserie et en fait, de toute oeuvre. Il y a des répétitions (transport) avec variations (transformation-analogie-isomorphisme) mais après la réalisation “on” ne voit plus que l'oeuvre achevée. Le dynamique s'efface pour le statique. L'oeuvre achevée peut concourir à une nouvelle dynamique: lecture, répétition, variation.
-Les fonctions les plus évidentes depuis les débuts (de quoi?) et jusqu'à présent sont celles dont la variable est le temps quelle que soit la modélisation plus ou moins rudimentaire de celui-ci. Il convient de noter que la notion de temps n'est pas présente dans toutes les langues (cultures): elle est elle-même l'objet d'une abstraction considérable et difficile. Il suffit

d'observer son acquisition difficile chez “nos” jeunes enfants.
Pour le mathématicien “standard” le temps est suspect: à jeter. Il se justifie en se référant à la physique. Tout ceci est l'héritage de Platon pour qui le monde idéal (celui des idées) est éternel, intangible et seul digne d'intérêt. Ce point de vue a fait l'objet de luttes dont Platon est manifestement sorti vainqueur. Entretemps, le temps a été associé de plus en plus à l'espace, notamment par un autre grand vainqueur: Kant, sur les épaules de Newton.En mathématique élémentaire, en bonne cohérence, on a jeté non seulement le temps mais aussi l'espace. On a vidé la géométrie de son sens, tout en avançant une foule de bonnes (?) raisons et on s'est aplati dans le plan. L'étude des fonctions exige souvent de s'aplatir sur la droite mais ça c'est trop et on s'en est sorti avec les formules et les graphiques. Comprendre les lois de Maxwell qui gouvernent une part considérable de nos existences demeure l'apanage de toutes petites minorités. Mais “tout le monde” peut apprendre à fabriquer une bombe.Il suffit de savoir lire des instructions et...un plan (un peu caricatural).

2 Contradiction.

Si c'est pour raconter ce qu'on peut faire avec le programme d'analyse de la 4è à la 6è d'autres que moi, peut-être présentes sont plus qualifiées (Frédérickx, Bouckaert, Gossez, Sengier, Parker...). Elles ont beaucoup à dire , c'est intéressant, hors des sentiers battus et indispensable mais j'aimerais qu'elles poursuivent cette mission. J'y ai parfois contribué.
Ici, je voudrais reprendre le fil beaucoup plus tôt malgré le niveau annoncé et sans trahir celui-ci du moins dans ma conception. On passera par le niveau d'expertise des Analystes professionnels.
Deux constats contradictoires.
Dans l'histoire, les fonctions apparaissent très tard et très difficilement du 17è siècle au 20è alors que leurs soeurs aînées, les équations, sont sur le marché (de Babylone, le mardi matin) depuis 3 millénaires et présentes dans tous les coups fumants. Mais on a vu avec une abondance de détails dans deux dossiers présentés par Michel Lartillier à quelle difficile évolution elles furent soumises avant d'aboutir à peu près à la vision et à l'écriture actuelles. A mon sens, avant d'aboutir à une notation il faut une notion. L'oeuf ou la poule? Peut-être. Il est probable que la formation de concepts et celle de notations s'épaulent mais tout de même. La notion sans notation autre que la représentation mentale (autistes) possède un sens. Tout le monde peut constater les excès du verbalisme (un langage creux).
De toute façon, dès que l'algèbre fut libérée de la géométrie au 17è siècle, par un processus de généralisation-abstraction avec son langage et ses notations, qu'elle eut “envahi” la géométrie par ses méthodes, les fonctions ne tardèrent pas à pointer le nez et lutter à leur tour pour une existence

cohérente et envahissante. L'analyse a fait le continu , les réels, à la Dedekind et Cantor. Tout se passe comme si le couple géométrie-algèbre devait atteindre un certain seuil de développement pour que l'analyse naisse.
D'autre part, dans un enseignement génétique, on peut distinguer et utiliser des fonctions dès la conception cardinale-bijective des premiers nombres chez l'enfant de 4 ans (à peu près) et faire des graphiques en 1ère primaire, sans disposer de nombres pour mesurer. Un comble! Cuisenaire et ses 12 isomorphismes refont surface. Pourquoi 12? Les couleurs, les longueurs, les noms, les symboles écrits donc 4x3 isomorphismes. CQFD.
Chacun des faits contradictoires évoqués rapidement est peu connu par les profs de maths. Dommage. Très sérieux.

3 Contradiction (bis)

À un stade plus avancé, on peut avoir deux visions opposées quoique complémentaires sur les fonctions.
La vision Bourbakiste procédant du général au particulier ce qui représente une effective économie de pensée dès qu'on a accompli le parcours du combattant et, bien entendu une vision unifiée de nombreux chapitres (des mathématiques modernes, antiques, médiévales et contemporaines).
Dans ce schéma, on sait lire, écrire et compter. Il y a d'abord les ensembles. Puis le couple d'éléments, puis le produit ensembliste ou cartésien de deux ensembles. Puis un sous-ensemble de celui-ci ou relation binaire (ou graphe mais là les disputes commencent). Et puis la fonction qui est un cas particulier de relation binaire appliquant la "loi du singleton" (un néologisme).
Quiconque ayant accompli ce parcours du combattant sait qu'on peut abréger et simplifier mais en fin de compte la fonction est bien un ensemble de couples et si deux d'entre eux avaient par hasard la même origine, ils ne seraient pas vraiment deux. J'exagère bien entendu mais à peine et on voit comme c'est difficile à exprimer sans utiliser des symboles réconfortant le pédagogue qui sommeille en nous mais laissant d'autres scientifiques de bois.
L'autre vision, procédant par abstraction, est génétique (nous y revoilà) ou plutôt algébrique. On y ramasse et collectionne les fonctions comme elles se présentent avec un fouillis d'autres notions. Un beau jour de printemps, on met un peu d'ordre (encore...), on se pique au jeu et on crée un petit artisanat, grâce à une machine à fonctions algébrique (la machine). Avec les

réels, ses opérations, une notion générale de fonction (tout de même présente discrètement), la composition, la fonction constante et la fonction identique, on crée la fonction du premier degré, celle du second, celle du rez-de-chaussée, la fonction exponentielle, la logarithmique et il ne manque plus bientôt que le sinus pour engendrer tout le reste jusqu'aux fonctions elliptiques de 2è candi.

Entretemps on a pu passer peut-être au stade industriel des espaces fonctionnels, une barrière toujours tenace pour l'enseignement élémentaire.

En pratique, certains jouent des deux visions en alternance et en modifiant le dosage de façon subtile. Je recommande de réfléchir à un double processus d'abstraction et concrétisation, à un dialogue entre ces processus, une contribution philosophique originale de Paul Libois. Il y a deux messages:

-la dualité abstraction-concrétisation;

-le processus plutôt que l'état; abstraction plutôt qu'abstrait.

Mais la plupart des profs optent (bien forcés) pour le prêt-à-porter d'un et un seul cours dont ils disposent, qui a de bons exercices et ne soupçonnent jamais ou guère ce qu'on vient de voir et s'ils le savent encore faut-il le mettre en oeuvre. Ceci ne les empêche pas d'élaborer un cours personnel et de faire leur métier. Et d'opposer le concret à l'abstrait ou vice versa.

Il n'y a pas de concret, ni d'abstrait en mathématique si ce n'est à titre personnel. Excessif? Non. Ce vocabulaire est statique donc figé et mortel. Le concret est la réalité que j'ai péniblement constituée en oubliant (donc par abstraction) les efforts d'abstraction et de concrétisation accomplis. L'abstrait est la réalité que j'élabore péniblement en oubliant (par concrétisation) le confort qu'elle m'apportera. La vie, et la réalité en construction, sont mouvement. La vie mathématique procède par abstraction-concrétisation. Notamment.

La contradiction de l'approche Bourbakiste et de l'approche artisanale me semble ainsi résolue...

4 La difficile émergence de nos fonctions

1684. Leibniz. Emploie le mot <<fonction>>, dans un manuscrit, pour indiquer toute quantité qui varierait d'un point à un autre d'une courbe: par exemple, la longueur de la tangente,etc. C'est encore Leibniz qui introduisit les termes << constante>>, <<variable>> et enfin <<paramètre>>, ce dernier ayant été employé dans le développement d'une famille de courbes. (Voir Morris Kline 1972, pp339-340).

1748 Euler. Introductio in analysim infinitorum (qui a ce bouquin? Il est au CREM). Adopte la définition de Jean Bernouli (1718). “Une fonction d’une quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière avec cette variable et des quantités constantes”. Une influence énorme. Avec Euler l’analyse cesse d’être l’étude d’objets géométriques: courbes, aires, angles. Chez lui, l’analyse focalise sur des quantités variables, leur différentielle (ou fluxion).
En 1772 (puis surtout en 1797), Lagrange choisit d’abandonner les différentielles, les fluxions et les limites en faveur du concept de fonction. Il veut prouver que toute fonction est développable en série de Taylor. Il en tire les dérivées. A rapprocher de notre Calcul Symbolique.
- J. Mawhin. Analyse. De Boeck. Comprend une foule de petites anthologies. L’une d’elles se trouve dans le dossier.
-Un article superbe: Man-Keung Siu. Concept of function. Its history and teaching. In Learn from the Masters! MAA. Dans le dossier.
-1923. P.Suppes.

$$\text{A est une relation} \leftrightarrow$$
$$(\ x)(x[A \rightarrow (\exists y)(\exists z)(x=<y,z>))$$
$$\text{f est une fonction} \leftrightarrow \text{ f est une relation \&}$$
$$(\ x)(\ y)(\ z)(xfy \ \& \ xfz \rightarrow y=z)$$

Moderne, précise mais formidable (Man-Keung Siu).
-A.Dauzat. Dictionnaire étymologique de la langue française. Larousse. Paris. 1938. Voici la première apparition en français (connue en 1938) de quelques mots (à ne pas confondre avec le concept).
1675 décimal
1680 équation, exposant
1697 polynôme
1717 cosinus
1741 paramètre
1749 positif
Surprenant non?

5 Les tables et les calculettes
Toute table livre une fonction au sens le plus strict, définie sur un ensemble fini quel que soit le nombre d’entrées de la table. Ceci vaut pour les calculatrices qui sont de fantastiques machines à tables.
J’ai un peu exagéré. Une table de nombres premiers est un peu tordue si

on veut y voir une fonction. Il faut nuancer en disant “Certaines tables...”. J’estime qu’un devoir du prof de maths de chaque année de 6 à 20 ans est de parler de ce sujet au moins durant une heure.
Un beau jour, il dit de manière opportune: “A table”.
Il montre une table nouvelle ou plutôt, il met en pratique, l’enseignement en spirale. Il reprend l’importante spirale des tables. Demande de rappeler les précédentes. Demande ou explique comment construire cette table et comment s’en servir. A quoi ça sert. Question à poser avant de commencer et à poser régulièrement selon l’avancement de la spirale.
Cette approche des fonctions est développée dans BUEKENHOUT 1980 ; elle est demeurée peu fréquentée dans les manuels semi-belges me semble-t-il. Me démentir S.V.P.
Les exemples historiques intéressants foisonnent, depuis les Babyloniens et leurs tables de carrés et d’inverses d’entiers.
Tables d’addition et de multiplication des naturels inférieurs ou égaux à 10 dans le primaire (mon dernier Math-Jeunes en parle sous la plume de Michel Ballieux en invoquant Al-Khwarizmi (un nom que je présente comme je peux)). Mais étudie-t-on encore ces tables? Bien sûr. Mais les étudie-t-on à un moment comme une structure ordonnée ou se met-elle en place dans le désordre? Quid de Wittmann? D’où ça vient? Pourquoi les connaître par coeur?
Table des sinus. Voir l’exposé de Simone TROMPLER et la lutte de Claude PTOLÉMÉE pour obtenir sin1° (ou une valeur assez petite de ce style) lui permettant de construire la table entière dont il estime avoir besoin pour son Astronomie. Il obtient la table grâce aux formules d’addition de sinus et cosinus. Souvenons-nous de notre surprise en découvrant qu’il use massivement de deux théorèmes un peu oubliés pour nous, le théorème de la bissectrice qu’il ne faudrait surtout pas enseigner dans un autre contexte [comme le voudraient des créatures étranges et actives parmi nous qui veulent faire croire que le 19è siècle fut surtout consacré à la géométrie du triangle!!!] et son théorème sur les quadrilatères inscriptibles.
Et bien d’autres tables...
Le domaine de ces fonctions est fini. Il faut bien l’admettre mais rares sont ceux qui l’admettent clairement et sans être gênés.
Une autre histoire non moins passionnante est de suivre l’idée du raffinnement de ces tables. Passer d’un domaine de 10 éléments à un domaine de 10000 éléments toujours dans un même intervalle est une

performance. C’est d’une utilité difficile à expliquer. Mais à notre niveau théorique, rien n’est changé. Le domaine est fini. Les prouesses mathématiques relatives au calcul approché de racines carrées ou de π avec je ne sais combien de décimales ne modifient pas cet état de choses.
Reconnaître que les domaines sont finis permettra un progrès majeur: étudier de façon consciente des fonctions dès l’âge de 6 ans et poursuivre cette initiation tout au long de la scolarité sans changer grand chose aux programmes mais en formant les profs. Puis gagner la lutte de l’analyse comprise par beaucoup plus d’élèves.
Formation permanente. Pas de réforme. Une spirale des fonctions.
Le reconnaître conduit aussi à mettre R en question et aboutit soit à comprendre mieux sa nécessité soit à admettre qu’il existe des alternatives à creuser prudemment.
Bien entendu, je connais l’objection des profs de classes avancées et de candis qui vous expliqueront que pour beaucoup d’élèves, après avoir vu la théorie des fonctions dérivables, tout ce qu’ils sont capables de faire est d’établir précisément une table au moment où on demande de construire un graphique.
En fait, ce ne peut être une objection à ce que je viens d’expliquer.
Il faut d’abord observer que nul ne peut plus guère (quoique...) rivaliser avec les splendides dessins réalisés par certaines calculatrices.
L’anthropomorphisme fait qu’il suffit effectivement de les construire sur un domaine fini donc ces “stupides” machines infligent une défaite difficile à admettre et même injuste pour les dérivées et pour la globalité des graphiques. Pour celle-ci, je renvoie à la section suivante. Ce n’est pas à 17 ans qu’il faut découvrir ce thème et surtout pas après avoir fait des dérivées qui sont d’abord un sujet local. Il y a à dire aussi sur les dérivées mais je renvoie à nouveau à l’enseignement Frédérickx-Buekenhout de 5è (voir Buekenhout 1980). Il y a aussi des dossiers antérieurs de Math. du Secondaire . Et des dossiers CeDoP. Voir la Bibliographie.

6 Lecture d’annuaires et indicateurs

6.1. Prenez un annuaire du téléphone. C’est une fonction qui fait correspondre à une personne identifié un numéro de téléphone.
Rares sont ceux qui savent s’en servir. Il donne plus que cette fonction. La plupart du temps il livre une deuxième fonction: l’adresse. Il s’agit toujours de fonctions à domaine fini mais dont la taille peut atteindre (je devine) l’ordre de grandeur de plusieurs centaines de milliers d’éléments (ou du

million?). L’identification de la personne ou variable, exige une connaissance orthographique parfaite du nom, parfois du prénom. Il arrive que l’adresse aide. Les deux fonctions s’épaulent. Ce sont des bijections. En théorie, connaissant le n° de téléphone on devrait aussi pouvoir trouver le nom de la personne. Pour un annuaire informatisé ce serait peut-etre “cool”. C’est la machine qui travaille: pour toute fonction, penser à la fonction inverse si elle a un sens.
L’annuaire et la taille du domaine ramènent d’autres éléments de maths. Les identités de personnes sont totalement ordonnées de manière structurée grâce à l’ordre lexicographique, un concept qu’il vaut mieux expliquer aux élèves s’ils ne le connaissent pas bien. En maths, une connaissance de l’alphabet avec son ordre total est indispensable.
Si vous pensez le contraire, essayez de leur faire consulter un dictionnaire mathématique ou l’index en 5 pages d’un manuel.
Je renvoie aussi au prochain exposé d’Arlette VAN WINKEL (13 décembre 96) et à son important Mémoire.

6.2. Indicateur de chemin de fer.

Exercice. J’ai expliqué l’annuaire du téléphone comme fonction(s).

6.3. Annuaire des anciens de l’ULB.

6.4. Divers.

7 Des graphiques sans formules avec des translations, étirements, etc.

7.1 Géométrie et travaux sur graphiques donnés, sans calculs. La globalité des graphiques qu’il faut développer absolument ne doit pas être abordée à 16 ans. C’est trop tard. Elle doit être présente de 6 à 22 ans selon une spirale bien mise au point. Monique Frédérickx et moi (voir Buekenhout 1980) avons mis au point un enseignement global portant sur des graphiques de fonctions sans formules... appliqué ensuite aux graphiques provenant de formules. Cette piste a été développée d’avantage par Monique Frédérickx, Charlotte Bouckaert et d’autres dans diverses formations et leurs dossiers demeurent évidemment disponibles. Il me semble que nous demeurons des pionniers dans cette voie mais si la tache s’étend il faut me le dire. Qui fait des graphiques et des maths sur ceux-ci sans formules?

7.2 Une variante: usage de formules non maîtrisées encore et de DERIVE pour en obtenir le graphique puis travailler sur celui-ci. Plus tard on se rendra maître de la fonction sans machine. On peut envisager aussi que celle-ci livre le résultat et que l'élève soit chargé de démontrer que ce résultat est correct.

7.3 Un malentendu sur les démonstrations en passant. J'entends dire constamment par divers collègues qu'il est peu intéressant pour l'élève de faire une démonstration de propriété acquise. Je ne suis pas d'accord. Ceci provient d'un malentendu dans la présentation de la mission. Si la Vérité est connue il convient aussi de l'établir.

Tout chercheur même à un niveau modeste, sait quelle économie de travail représente le fait de pouvoir deviner correctement le résultat. Si ce stade est atteint, ce qu'il ne sait pas mais qu'il sait parfois, il reste à établir les faits. On sait bien que Thalès et d'autres ont démontré des propriétés évidentes au plan physique. Ils inventaient-découvraient la Raison. Les mathématiciens-pédagogues ne renoncent-ils pas trop vite à la rationnalité? Pour découvrir des vérités cachées par les maths il faut peut-être s'entraîner aussi à établir des vérités connues ou mieux...à les comprendre.

7.4 Lecture de graphiques

Autre gros objet de critiques de physiciens, chimistes, etc.

Nous sommes de plus en plus soumis à [ajout 2011: je ne sais plus à quoi].

8 Les fonctions trigonométriques

Un sujet difficile dont l'histoire n'est pas si bien connue au niveau élémentaire. Ce n'est pas une partie de l'histoire de la trigonométrie. Et le sujet conduit à l'Analyse Harmonique.

Citons COOKE 1996.

“Le vaste empire dans le monde mathématique connu comme l'analyse de FOURIER ou analyse harmonique est une des histoires les mieux établies de tous les sujets mathématiques. Cet empire est gorgé de villes grouillantes, de hameaux morts, de monuments fous et peut-être de quelques quartiers sordides. En fin de compte, basée sur le théorème de Pythagore qui remonte en toute généralité à des tablettes cunéiformes au Moyen-Orient plus d'un millénaire avant Pythagore, la trigonométrie fut développée par les Grecs au temps d'Euclide comme l'étude de la relation entre cordes et arcs de cercles afin de construire des modèles du mouvement des étoiles et des planètes. Si on avait demandé aux astronomes du temps de Ptolémée ce qu'ils faisaient avec les modèles mathématiques ils auraient probablement exprimé leur foi qu'un nombre fini d'épicycles par dessus des épicycles pouvait approcher la trajectoire d'un

corps céleste dans les limites de l’erreur d’observation de leur temps (plus d’observations signifieraient seulement plus d’épicycles). Cette foi, vue dans la perspective de l’analyse harmonique du 20è siècle revient à croire que la trajectoire d’un corps céleste peut se décrire par une fonction presque périodique du temps. Le voyage de 2000 ans de la foi vers une compréhension claire est marqué par de grands événements.
Le remplacement intelligent de la corde par une demi-corde (le sinus) semble due à des mathématiciens Hindous des débuts comme ARYABHATA (6è siècle). [note de bas de page: “Après être passé par l’Arabe, le mot descriptif en Sanskrit utilisé par ARYABHATA pour le sinus, à savoir *jya* , signifiant corde d’arc , vint en Latin comme le mot complètement non-descriptif *sinus*, signifiant une cavité.”] . Une définition des fonctions trigonométriques avec le potentiel d’abstraction au-delà des confins des cercles et des triangles est due au mathématicien Hindou du 16è siècle JYESSTHADEVA, qui décrit de manière explicite une série de puissance équivalente à la série de Maclaurin d’arc tangente. L’Écossais James GREGORY dérive la même série à peu près un siècle plus tard. Une expression similaire en série de puissances pour le carré d’un arc comme fonction de sa hauteur et du diamètre du cercle fut donnée au Japon par TAKEBE KENKO quelques décades après GREGORY.
Presque dès le moment où les fonctions trigonométriques furent comprises, ces fonctions se mirent à trouver des applications dans la description des phénomènes naturels. Il s’avéra que ces simples et très concrètes fonctions possèdent une richesse en propriétés de symétrie basée sur la loi fondamentale qu’est leur périodicité. De ce matériel apparemment grossier des motifs toujours plus élaborés pouvaient être tissés. LE résultat est une énorme tapisserie pleine de belles images dont beaucoup n’ont en commun que d’apparaître sur le même tissu de base. Trouver un fil commun entre eux est un défi. Par exemple, pour considérer un exemple bien connu cité par Loomis, rien moins qu’une étude intensive du théorème Taubérien de Wiener comme Wiener l’énonça et le théorème disant que tout idéal fermé de $L^1(R^1)$ est contenu dans un idéal maximal ne révélerait aucune connexion entre eux, pourtant le dernier théorème est connu comme le théorème Taubérien de Wiener dans le contexte des algèbres de Banach. (Bien entendu, ce que le théorème original avait à voir avec des résultats du type Taubérien était loin d’être évident pour le rapporteur, même après avoir lu la version que Wiener en donne).

Si les analystes harmoniques sont autorisés un jour à élaborer leur propre calendrier, son époque-le Jour Un- sera au milieu du 18è siècle, quand le fameux problème des cordes vibrantes (l'équation d'ondes de dimension un) fut résolu par Daniel Bernoulli en utilisant des variables séparées et des coefficients indéterminés pour superposer les fonctions que nous reconnaissons aujourd'hui comme les fonctions propres de manière à remplir les conditions initiales. Cette solution fameuse fut suivie d'une controverse célèbre sur l'admissibilité de telles représentations, conduisant finalement à la clarification de ce qu'on entend par une fonction. Un demi-siècle plus tard, ces fonctions prouvèrent à nouveau leur valeur dans l'étude classique de la conduction de la chaleur par Joseph FOURIER à partir duquel le sujet tout entier fut appelé.
Comme ces épisodes l'ont montré, les fonctions trigonométriques furent une mine d'or, mais la mise à jour de l'or exigea la construction d'une machinerie très compliquée. La recherche frustrante de conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier conduisit à la prolifération des contre-exemples sauvages qui font encore toujours de l'analyse réelle le chemin de croix des étudiants doctorants. Ce sont les séries trigonométriques qui ont procuré les premiers exemples de fonctions continues, nulle part différentiables. En dehors de cette contribution plutôt négative, les fonctions trigonométriques ont joué un rôle positif dans la croissance à la fois de l'analyse réelle et complexe. LEGENDRE, par exemple, reconnut que les intégrales elliptiques qui émergeaient si souvent en mécanique élémentaire et dans des problèmes géométriques avaient une forte ressemblance avec les intégrales qui définissent les fonctions trigonométriques inverses, et il suggéra que les inverses de ces intégrales seraient plus simples à étudier que les intégrales mêmes. Il avait raison, bien sûr, comme ABEL et JACOBI le montrèrent; à la fois la double périodicité des fonctions elliptiques comme fonctions d'une variable complexe et les fonctions thèta qui les domptent naissent des mêmes racines que les fonctions trigonométriques.
En ce qui concerne l'analyse réelle, il est bien connu que Georg CANTOR était engagé dans l'investigation des points où une série trigonométrique devrait converger vers zéro si elle convergeait vers zéro partout ailleurs quand il rencontra l'idée cruciale d'un point d'accumulation; c'est ce concept qui le conduisit à l'idée d'un ensemble de points abstrait (abstrait au moins pour les standards de son temps-ses premiers ensembles étaient encore

des ensembles de nombres réels). Bien que Borel et Lebesgue développèrent d'abord leur théorie de l'intégration pour d'autres motifs, Lebesgue fut prompt à réaliser son potentiel en vue d'apporter ordre et unité dans l'étude des séries trigonométriques et des intégrales. Essayez, si vous le pouvez, d'imaginer comment nous expliquerions ces choses aux étudiants de licence sans être en mesure de parler de convergence et de sommabilité pour les L^p-fonctions ou l'ensemble de Lebesgue d'une fonction comme ensemble minimal sur lequel sa série de Fourier doit être sommable....".

9 Les logarithmes en fin de rhéto si on a de la chance?

Ce choix immuable au niveau des programmes depuis environ 1968 est une des pires hérésies que je connaisse. Si on veut que l'enseignement des maths échappe aux mathématiciens sous la pression de tous les autres scientifiques, il faut poursuivre dans cette voie. Tout prof qui se réfugie derrière les programmes pour dégager sa responsabilité est coupable aussi. Je ne mâche donc pas mes mots. [En 2011, il est coupable s' il sort des programmes. J'ignore toujours ce qu' il faut entendre par là].

Faut-il encore redire que des sciences très peu mathématisées comme la "science des dinosaures" utilisent des mesures converties en nuages de points afin de dégager des "lois". Celles qui sont très mathématisées font de même, massivement. Nos collègues chimistes de 1è candidature pour tous les domaines de sciences dites exactes ont des demandes précises à cet égard et sont à juste titre furieux. Adapter une droite à un nuage de points, s'il possède une "allure de droite" est tout à fait possible dans le cadre du programme de 4è. Le cas non-linéaire peut se voir certainement en 5è et 6è. Mais il vaut mieux disposer de l'outil logarithmique. Une définition et la propriété principale. Celle qui permet de passe au graphique semi-logarithmique ou logarithmique. Il y a même des profs de maths qui ne savent pas ce que c'est. Collègues, comme ne dit pas Dudley, ceci n'est pas un jeu. C'est sérieux!!!

Voilà pour la nécessité.

Ici, ce n'est pas d'abord de calculette qu'il peut s'agir.

Il y a autre chose.

L'enseignement le plus élémentaire, même avant 6 ans, a désormais intégré la notion d'équation. C'est un progrès des 20 dernières années et il est fameux. Ayant une opération comme l'addition, la multiplication, etc. que j'écrirai @ tous ses profs,

commencent par des exercices de type a@b=   , ce qui revient pour nous à penser a@b=c, à considérer a et b comme donnés et à déterminer c. Ensuite, on donne a et c et on fait déterminer b. On résout donc une équation. La troisième issue est de donner b et c.
Toute opération livre donc trois types d'équations. J'ai dit que l'enseignement primaire a intégré cette notion capitale mais je fais remarquer qu'il tend à ne plus rien voir d'autre et à verser dans le syndrome de la "calculite" ou de la "symbolite" qui occulte les maths. Mais ceci était une parenthèse. Dans le secondaire, on peut croire à première vue que ce fil conducteur subsiste. Il subsiste effectivement tant qu'il s'agit d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division. De plus on explicite la notion d'inconnue et on écrit celle-ci. Parfait.
Mais dès qu'une nouvelle opération est rencontrée, il n'y a plus trois types d'équations mais un seul, ou deux. Les conséquences sont catastrophiques. Prenons l'élévation à une puissance soit a^b=c. Considérer d'abord c comme l'inconnue est évidemment pratiqué. Considérer a comme l'inconnue se fait de même de manière progressive. D'abord avec b=2, ce qui livre la racine carrée. Ensuite les autres racines. Mais b comme inconnue est à peu près exclu. Même 2^b=c? Oui. A mon sens, dès que l'élévation à une puissance est acquise (en 1ère), il faut, la même année ou en 2è, passer à la fonction exponentielle par excellence qu'est 2^x et à 10^x. C'est une molécule de la spirale des logarithmes. Ensuite, avec un décalage très bref, comme au primaire, il faut se demander ce qu'est x quand 10^x=29. Et voilà les logarithmes. Tout ceci peut et doit se rencontrer en 1è et 2è, se systématiser en 3è et en 4è mais...on est loin de compte.
Dans Buekenhout e.a. 1980, c'est un leit-motiv de la 1è à la 6è. Nous voyons notamment ce qu'est la dérivée de 2^x avant même d'avoir fait une théorie systématiséee de la dérivée. Et encore bien avant les limites. Mais celles-ci sont encerclées (en spirale) et le moment venu, elles acquièrent leur sens et éclairent tout ce qui vient de se dire. C'est utile, c'est génétique, c'est beau, c'est pour l'honneur de l'esprit matheux et...c'est un jeu.
Quelles références? Dossiers CeDoP. Wittmann? Manuels?

Bibliographie

Celle-ci se limite aux références citées et un petit nombre d'autres. Il y en a d'autres dans ma bibliographie de R. L'effort accompli pour R devrait se faire pour les fonctions, au prix de redites.

Le sigle FB après une référence signifie que j'en dispose personnellement au moment d'écrire.

LES DOSSIERS DE MATHS DU SECONDAIRE PAR BUEKENHOUT.

23-10-1992 et 13-11-1992. La spirale de l'Analyse de la 1ère à la 3è.

22-10-1993. Dérivées et différentielles: que faire?

3-12-1993. Quelques tendances récentes dans l'enseignement du Calculus aux USA.

30-9-1994. La limite sinx/x, l'aire du cercle et...un cercle vicieux.

4-11-94. Les axiomes de l'intégrale.
3-11-95. Qu'est-ce qu'une courbe?
24-11-95. La fonction exponentielle imaginaire: bien plus élémentaire qu'on ne le croit. Niveau: 4e-6e.
AUTRES DOSSIERS DE MATHS DU SECONDAIRE .

5-11-1993. Monique FRÉDÉRICKX et Charlotte BOUCKAERT. Du neuf sur la lecture, l'utilisation et l'interprétation des graphiques.

15-10-1993. Maggy SCHNEIDER (Fac.NDLP à Namur et GEM). Comparer des volumes de solides à partir d'aires de sections planes. Niveau:4ème à 6ème.
26-11-1993. Simone TROMPLER. Les logarithmes et l'exponentielle dans une perspective historique.
30-9-94. Jacques GOLDSTEINAS. De l'équation de la droite par deux points à quelques belles formules d'Euler.
6-10-1995. Renée GOSSEZ. Le logiciel DERIVE pour tous.
10-11-95. Michel LARTILLIER. Les tribulations de l'équation du second degré.

****

Publications de l'UREM-ULB (CeDoP)
BOUCKAERT Charlotte et Francis BUEKENHOUT. [1994]. Histoire des mathématiques. Bibliographie commentée à l'intention des professeurs de mathématiques. 36 pages. Format A4. FB 100
Permet aux professeurs de s'orienter dans la littérature concernant l'histoire des mathématiques. Tout niveau.
FRÉDÉRICKX Monique. [1994]. Une étude de coniques. 7 pages. Format A4. FB 30
Etude d'une situation de vol aérien. Niveau: 5e-6e.
FRÉDÉRICKX Monique. [1995]. Modéliser les stratégies face à un test à choix multiple. 12 pages. Format A4. FB 40.
Niveau:4e-5e. Etude d'une situation de la vie courante conduisant à une fonction peu habituelle, à une première confrontation avec les probabilités et au développement du sens critique.
FRÉDÉRICKX Monique. [1995]. Suite de polygones. 12 pages. Format A4. FB 40.
Découverte ou renforcement de: suite convergente, série, limite, fonction trigonométrique, fonction exponentielle. Niveau: 6e.
FRÉDÉRICKX Monique et Monique PARKER. [1995].Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques. 34 pages. Format A4. FB 100.

Ce texte présente des matériaux directement utilisables par les professeurs dans des classes de 16-18 ans. Il concerne des applications scientifiques compréhensibles de la fonction linéaire et de sa compagne logarithmique $y=ax^b$. On y voit comment on peut déterminer la “loi” de certains phénomènes ayant fait l’objet de mesures expérimentales conduisant à un nuage de points sur un graphique. Ce thème figure parmi les passages les plus fréquentés des liens entre les mathématiques et leurs applications.

FRÉDÉRICKX Monique. [1995]. Les dérivées et les ...boîtes de conserve. 7 pages. Format A4. FB 30.

Un problème concret qui conduit à une recherche de minimum.

FRÉDÉRICKX Monique et Monique PARKER. [1996]. Apprendre à parler graphique. 33 pages. Format A4. 100F.

Bon nombre de situations peuvent être exprimées par un graphique, par une formule et par une phrase. Une notion n’est vraiment bien assimilée qu’à partir du moment où l’on peut passer d’un langage aux deux autres. La question est traitée sur une foule d’exemples.

FREUDENTHAL Hans. [1994] (traduction F. Buekenhout) La tradition mathématique. Chapitre 1 du livre “Mathematics as an educational task”, Reidel, Dordrecht, 1973. 9 pages. Format A4. FB 30.

Permet à tout professeur de situer son enseignement dans une perspective historique conduisant de manière concise de l’Antiquité à nos jours, axée sur l’évolution de l’enseignement et enrichie de questions qui invitent à la réflexion.

FREUDENTHAL Hans [1994] (traduction C.Bouckaert) Développer le concept de nombre depuis les méthodes intuitives jusqu’aux algorithmes et la rationalisation Chapitre 12 de “Mathematics as an educational task”, Reidel, Dordrecht, 19 pages. Format A4. FB 100. Niveau: 6-16 ans.

Analyse la genèse des diverses notions de nombre de 6 à 16 ans.

FREUDENTHAL Hans [1994] (traduction M. Frédérickx). Le Professeur de Mathématiques . Chapitre 10 de ” Mathematics as an educational task ” Reidel, Dordrecht, 1973. 7 pages. Format A4. FB 30.

Analyse de la formation des maîtres. Niveau: 4e-6e.

FREUDENTHAL Hans [1995].(traduction M.Parker).Le cas de la géométrie. Chapitre 16 de” Mathematics as an educational task”Reidel, Dordrecht, 1973. 53 pages. Format A4. FB 120.

Ce texte d’accès difficile conserve son actualité dans les débats engagés sur l’enseignement de la géométrie. C’est un instrument précieux enfin accessible en français.

PARKER Monique. [1996]. Huit questions à propos du Lotto. Format A4. 21 pages. 70FB.

Le Lotto constitue une situation pédagogique fort riche, basée sur des règles simples et soulevant de nombreuses questions soit avant l’étude du calcul des probabilités soit comme application de celui-ci.

GOSSEZ Renée et Jacqueline SENGIER [1994]. Quelques propositions de leçons de
mathématique intégrant le logiciel DERIVE. Partie 1: les intégrales. 36 pages. Format A4. FB 100.

Niveau:6e. Présentation du logiciel. Scénarios détaillés de leçons s’appliquant à divers aspects de l’intégrale définie.

GOSSEZ Renée et Jacqueline SENGIER [1995]. Quelques propositions de leçons de
mathématique intégrant le logiciel DERIVE. Partie 2: à propos des fonctions. 15 pages. Format A4. FB 70.
Scénarios détaillés de leçons. niveau: 6e.
GOSSEZ Renée et Jacqueline SENGIER [1996]. Utilisation du logiciel DERIVE en algèbre linéaire. 22 pages. Format A4.
70 FB.
Activités adaptées aux programmes entrés en vigueur en 1994.
TROMPLER Simone [1995]. L'histoire des logarithmes. Format A4. FB 100.

Les commandes peuvent être adressées à
ULB-CeDoP
CP 186 -50 Av. F.D. Roosevelt-1050 Bruxelles
Tél. 02/650.40.35

****

Baton B., R. Giot & Yolande Noël. 1996. L'initiation à l'algèbre. CREM, Nivelles et CDS, Mons. FB. (A VOIR!!!).

Bouckaert Charlotte et F. Buekenhout. 1994. Histoire des mathématiques. Bibliographie commentée à l'intention des professeurs de mathématiques. 36 pages. CeDoP-ULB.

Bourbaki N. 1974. Éléments d'histoire des mathématiques. Hermann. Paris. 376 pages.

Buekenhout F., Meunier -De Clerq Huguette, Tallier Michèle et Frédérickx Monique. 1980 à 1986. Vivre la Mathématique. Vol 1 à 6. Didier Hatier. Bruxelles. (1à 3) et Université de Bruxelles (4 à 6). FB.

Buekenhout F. 1996. Ensembles totalement ordonnés ou les nombres sans opérations. Dossier UREM. Université Libre de Bruxelles. 32 pages. FB.

Buekenhout F. 1996. R. Dossier UREM. Université Libre de Bruxelles. 83 pages.

Buekenhout F. 1995. The rise of incidence geometry and buildings in the twentieth century. Colloqium Carolus Magnus. 1200 Jahre Wissenschaft in Mitteleuropa. 19-26 März 1995. Preprint. 28 pages. FB.

Buekenhout F. 1996. Ensembles totalement ordonnés ou les nombres sans opérations. Dossier UREM. Université Libre de Bruxelles. 32 pages. FB.

Cantor G. 1871. De l'extension d'une proposition de la théorie des séries trigonométriques. (Traduit de l'allemand: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Annalen 5, 123-132). REM de Toulouse.

Castelnuovo Emma. 1970. La via della matematica. I numeri. La Nuova Italia. FRenze. 504 pages. FB.
Cerquetti-Aberkane Françoise. 1992. Enseigner les mathématiques à l'école. Hachette. Paris. 256 pages. FB.
Chabert J.L. e.a. 1994. Histoire d'algorithmes. Belin. Paris. 592 pages. FB.
Courant R. et Robbins H. 1941. What is mathematics? Oxford U.P. Londres. 1977 (1ère édition en 1941); 521 pages. FB.
Cooke R. 1996. Recension de livre. Harmonic analysis, 2nd edition, by Henry Helson. Hindustan Book Agency and Helson Publishing. Bull. Amer. Math. Soc. 33, 505-508. FB.
D'Alembert. 1759. Essais sur les éléments de la philosophie naturelle.
Dedekind R. 1858. Essays on the theory of numbers. Traduit de l'allemand par W.W. Beman. Dover. New York.1963. 115 pages. Comprend deux articles: Continuity and Rrational numbers. 1872. (Stetigkeit und Rrationale Zahlen. Vieweg. Braunschweig). The nature and meaning of numbers. 1887. (Was sind und was sollen die Zahlen? Vieweg. Braunschweig). Le premier article est disponible en traduction française par J. Milner et Hourya Sinaceur. REM de Toulouse. FB.
De la Vallée Poussin Ch. J. 1909. Cours d'analyse infinitésimale. Gauthier Villars. Paris.
Deledicq.
Dhombres J. 1996. Les grandeurs: évolution historique d'un concept mathématique flexible. Conférence à Liège. Notes prises par FB.
Dieudonné J. 1965. Fondements de l'Analyse moderne. Gauthier-Villars. Paris. (traduction d'après un livre en anglais paru en 1960). 374 pages. FB.
Dieudonné J.(directeur).1978. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Hermann. Paris. 392+470 pages. FB.
Du Bois-Reymond P. 1882. Théorie générale des fonctions. (Traduit de l'allemand par G. Milhaud et A. GRot). Nice, 1887. 223 pages. FB.
Dugac P. 1978. Fondements de l'Analyse. In Dieudonné, Abrégé. 335-392. FB.
Edwards C.H. 1979. The historical development of the Calculus. Springer-Verlag. Berlin. FB.
Edwards H.M. 1989. Kronecker's views on the foundations of mathematics.. In Ed. D.E. Rowe & J. McCleary. The history of modern mathematics. Academic Press.Boston. 66-77. FB.
Encyclopédie Diderot-d'Alembert.

Freudenthal H. 1973. (traduction Charlotte Bouckaert) Développer le concept de nombre depuis les méthodes intuitives jusqu'aux algorithmes et la rationalisation Chapitre 12 de "Mathematics as an educational task", Reidel, Dordrecht, CeDoP-ULB. 19 pages. Niveau: 6-16 ans. FB.
Freudenthal H. 1983. Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel. Dordrecht. 595 pages. FB.
Guillaume M. 1978. Axiomatique et logique. Chapitre 13 de Dieudonné 1978, 315-430. FB.
Guillaume M. 1994. La logique mathématique en sa jeunesse. In Pier 1994, 185-368. FB.
Hauchart Christiane et Rouche N. (éditeurs) 1992. L'enseignement de l'Analyse aux débutants. Erasme. Namur. 126 pages.
Kline M. 1963. Mathematics. A cultural approach. Addison-Wesley. Reading, MA. 1963. FB.
Kline M. 1972. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press. Oxford. FB.
Lartillier M. 1995. Les tribulations de l'équation du second degré. Dossier UREM. Université Libre de Bruxelles. *pages.
Lartillier M. 1996. La genèse des nombres complexes. Dossier UREM. Université Libre de Bruxelles. 90 pages. FB.
Lebesgue H. 1932. Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique. 1932-1935. 191 pages. 31e année, 1932, 173-206; 32e année, 1933, 23-51; 33e année, 1934 , 22-47, 177-213, 270-284; 34e année, 1935, 176-219.
Lelong-Ferrand Jacqueline. 1964. Les notions mathématiques de base dans l'enseignement du second degré. Ensembles, algèbre et analyse. Arrmand Colin. Paris. 232 pages. FB.
Lenz H. 1976. Grundlagen der Elementarmathematik. Carl Hanser Verlag. München. 415 pages. FB.
Noël G. 1976. Faut-il enseigner la continuité? Math. Péda. n°6, 99-116; n°7, 139-152. FB.
Noël G. 1984. L'analyse à 16 ans? Math. Péda. n°46, 11-22.
Noël G.1992. Pourquoi l'analyse n'est pas rationnelle. In Hauchart C. et Rouche N. (éditeurs). L'enseignement de l'Analyse aux débutants. Erasme. Namur. 95-107.
Noël G. 1992*. Les débuts de l'analyse. Bull. Soc. Math. Belg. *175-181. FB.
Pétry A. (éditeur). 1996. Méthodes et analyse non-standard. Cahiers du

Centre de Logique. 9. Université Catholique de Louvain. 168 pages. FB.
Rouche N. e.a. 1995. Les mathématiques de la maternelle à 18 ans. CREM. 324 pages.
Trompler Simone .1995. L'histoire des logarithmes. CeDoP-ULB . 39 pages.
Van Dieren-Thomas Françoise e.a. et GEM 1993. De questions en questions. 1, 2,...Didier Hatier. Bruxelles. FB.
Van Winkel Arlette 1996. La perception qu'ont les professeurs de mathématique d'un de leurs outils: le manuel scolaire. Mémoire de licence en Faculté de Sciences Psycho-Pédagogiques. ULB. FB.
Wilson M. 1994. One preservice secondary teacher's understanding of function: the impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. Journal for Research in Math. Education. 25, 346-370. FB.
Rouche N. e.a. 1995. Les mathématiques de la maternelle à 18 ans. CREM. 324 pages. FB.
Trompler Simone .1995. L'histoire des logarithmes. CeDoP-ULB . 39 pages. FB.
Wittmann E. 1975. Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik. Beiträge zum Mathematikunterricht. Hannover. 226-235. ***
Wittmann E. e. a. 1994. Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr Nordrhein-Westfalen .102 pages. Das Zahlenbuch. Mathematik im 2. Schuljahr Nordrhein-Westfalen. 110 pages. 1995. Klett. Leipzig. Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr Nordrhein-Westfalen. 110 pages. 1996. Klett. Leipzig. FB.