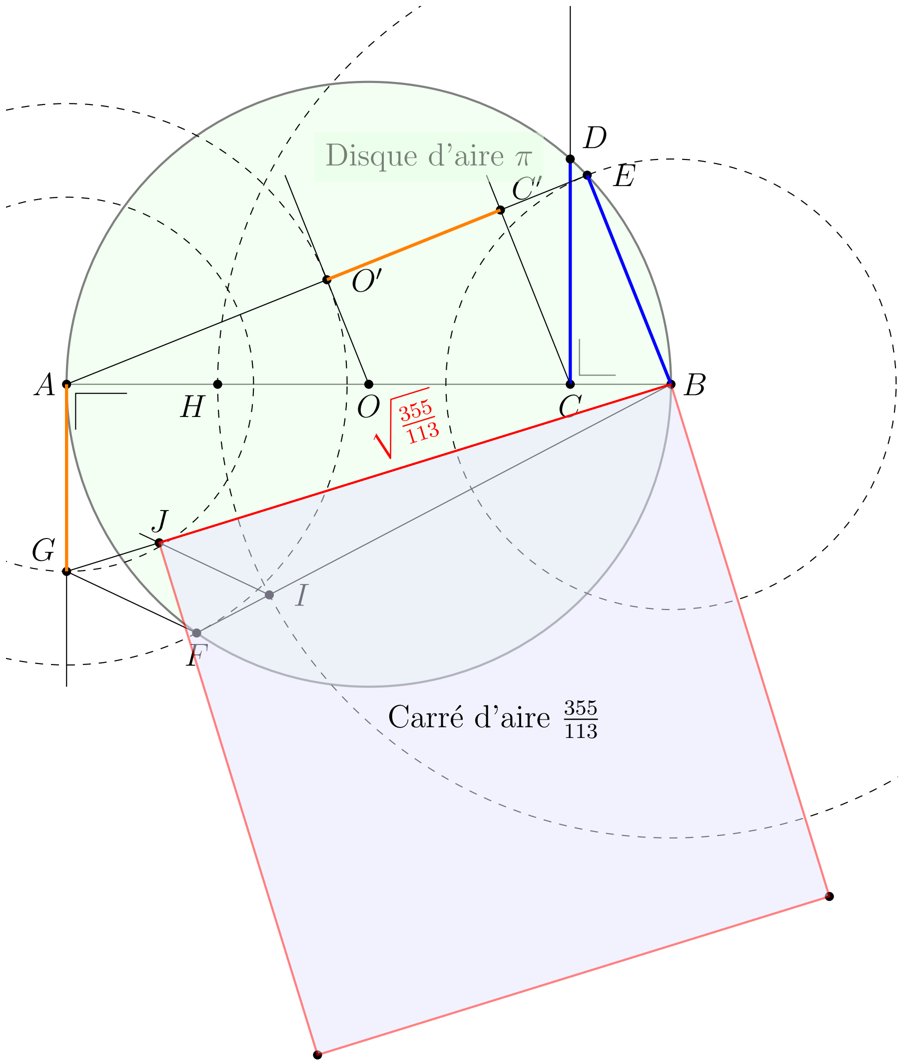
Une quadrature *approchée* de π

On sait qu'il est impossible, à la règle et au compas, de construire un carré d'aire π. Si on dispose d'une approximation (constructible) α de π, il n'est pas pour autant facile de trouver une construction de $\sqrt{\alpha}$ en un nombre *raisonnable* d'étapes.
La construction qui suit est reprise de "Théorie des Corps" de Jean-Claude Carrega (Hermann) et a été proposée par Ramanujan en 1913.



Description

- AB est un diamètre du cercle Γ de rayon unité,
- C est tel que $OC = \frac{2}{3}OB$,
- D est une intersection de la perpendiculaire à AB par C avec Γ,
- E est tel que $BE = CD$,
- O' et C' sont sur AE et sur les parallèles à EB passant respectivement par O et C,
- F est tel que $AF = AO'$ et $F \in \Gamma$,
- G est sur la tangente à Γ en A et est tel que $AG = O'C'$,
- H est le milieu de AO,
- I est sur BF et est tel que $BI = BH$,
- J est sur BG et est sur la parallèle à GF passant par I.

Le carré de côté BJ a alors une aire égale à $\frac{355}{113}$ qui est égale à π à 10^{-6} près.

Justification

Thalès, Pythagore et le théorème sur les triangles rectangles inscrits à un cercle suffiront à nos besoins :

- $OC = \dfrac{2}{3}$, donc $CD^2 = AC \cdot CB = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{9}$ d'où $BE = CD = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- $OO' = \dfrac{1}{2}\,BE = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$
- $AF = AO' = \sqrt{AO^2 - OO'^2} = \sqrt{1 - \dfrac{5}{36}} = \dfrac{\sqrt{31}}{6}$
- $AG = O'C' = \dfrac{2}{3}\,AO' = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\sqrt{31}}{6} = \dfrac{\sqrt{31}}{9}$
- $BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{4 - \dfrac{31}{36}} = \dfrac{\sqrt{113}}{6}$
- $BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{4 + \dfrac{31}{81}} = \dfrac{\sqrt{355}}{9}$
- $BI = BH = \dfrac{3}{2}$ et donc, par Thalès, $BJ = BG \cdot \dfrac{BI}{BF} = \dfrac{\sqrt{355}}{9} \cdot \dfrac{3/2}{\sqrt{113}/6} = \sqrt{\dfrac{355}{113}}$

On pouvait bien sûr construire $\frac{355}{113}$, qui est un rationnel, comme on demande à un élève de 12-13 ans de construire le rationnel $\frac{9}{7}$, comme application de Thalès. Mais pratiquement, reporter 355 fois une longueur sur une demi-droite est irréalisable...

Pour en savoir plus...

D'autres constructions, basées sur des approximations irrationnelles ont été proposées :

- $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,14153$ (erreur relative $\epsilon_r = 0,15\,\%$)
- $\sqrt{4 + \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 3,1415919$ (Koshansky, 1865)
- $\dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{3}{5}\right)\sqrt{1 + \left(2 + \dfrac{1}{5}\right)^2} \approx 3,1415919$ (D.Specht, 1836)
- $\dfrac{6}{5}\,(1 + \varphi) \approx 3,14164$ où $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (Dixon, 1991)

On consultera à ce sujet :

- `http://mathworld.wolfram.com/CircleSquaring.html`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_circle`