ULB

Francis Buekenhout, Charlotte Bouckaert,
Claude Culus, Monique Frédérickx, Annie Goovaerts,
Jacqueline Sengier.

buekenhout@skynet.be
charlotte.bouckaert@scarlet.be
mgfrederickx@tele2allin.be
anniegoovaerts@yahoo.fr
sengier@ulb.ac.be

centre de documentation pédagogique

Classification objective des quadrilatères

UREM http://www.ulb.ac.be/sciences/urem/

Les Cahiers du CeDoP
http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html

1 – Introduction

Lors d'une des multiples discussions que notre équipe a eue au sujet de la fleur chinoise [1], Francis Buekenhout nous a parlé de logiciels qui permettent de déterminer tous les sous-groupes d'un groupe G déterminé et ce à conjugaison près. Le groupe dont nous nous occupions était le groupe des automorphismes du cube, Aut (cube) qui est d'ordre 48.

Une thèse de Francis Buekenhout est que, étant donné un objet, une structure géométrique Γ et son groupe d'automorphismes G, pour tout sous-groupe H de G, il doit exister une interprétation géométrique de H qui n'est pas forcément unique. Par ailleurs, on voit bien que Γ enrichi d'un aspect géométrique, d'un ajout K à la structure, donne lieu à un sous-groupe de G, à savoir le sous-groupe de G qui conserve cet ajout géométrique. Exemples : Γ est le plan et K est un carré ; Γ est un cube et K une direction d'arêtes. Le nom donné en physique à ce processus est une brisure de symétrie. Le cas que nous envisagions était celui de G = Aut (cube).

Tout ceci est fort complexe. Par souci de simplification, nous avons étudié le groupe d'automorphismes du carré, G = Aut (carré) qui est le groupe diédrique d'ordre 8, D_8. Nous avons recherché une interprétation géométrique pour chacun de ses sous-groupes. Il s'avère que cette approche livre une classification des quadrilatères.

Nous obtenons ainsi une classification des quadrilatères reposant sur un critère très précis, à savoir le groupe des automorphismes du quadrilatère et la manière dont il agit sur l'ensemble des sommets. Si H est un sous-groupe de D_8, la famille de quadrilatères de type H est constituée des quadrilatères dont le groupe de symétries contient H. Pourquoi avoir choisi le mot « contient » plutôt que l'expression « est égal à » ? Parce que nous souhaitons tous qu'un carré (dont le groupe est d'ordre huit) soit aussi dans la famille des rectangles (dont le groupe H est d'ordre quatre).

2 – *Classifications classiques et non classiques des quadrilatères*

Il existe plusieurs manières de classer et de définir différents types de quadrilatères.

La manière classique présente de nombreuses failles, le classement se fait selon des critères qui ne sont pas explicités ou plutôt qui n'existent pas.

Première tradition :

On dispose d'un stock de noms (rectangle, carré, losange, parallélogramme, trapèze) qu'on s'évertue à utiliser correctement sans y parvenir. Cet état de fait débute à la maternelle et perdure largement à tout niveau d'étude. Le stock de noms ne s'enrichit jamais (ou presque), par exemple, on ne verra que rarement un cerf-volant ou une pointe de flèche en mathématique. Des formes familières durant des millénaires au paléolithique et au néolithique n'entreront pas dans notre discipline. Ces dernières méritent également notre attention car nous les rencontrons souvent sans peut-être nous en rendre compte.
Les chasseurs cueilleurs du paléolithique maîtrisaient des quadrilatères qui ont échappé à leurs descendants mathématiques. Ils fabriquaient de manière systématique des pointes de flèches et harpons qui réalisent deux quadrilatères que nous appelons delta-plane et cerf-volant.

paléolithique ancien et moyen

pointe de flèche –40000

pointe de flèche néolithique

pointe de flèche pédonculée à ailerons
(Mancey) – L. 2,5 cm

Ne perdons pas de vue que ces objets représentent aussi des formes de dimensions 3 qui sont des « octaèdres pointes de flèches » ou des « dipyramides pointes de flèches ».
Citons un ouvrage consacré à la géométrie du paléolithique : Keller [2]

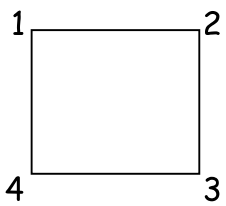
<u>Deuxième tradition:</u>
On insiste sur les caractéristiques suivantes : égalité de longueurs et d'angles, parallélisme des côtés. Ces critères ne sont pas explicités pour un quadrilatère général.
Nul ne sait pourquoi la convexité du quadrilatère est souvent supposée de manière implicite et pourquoi le cerf-volant est souvent ignoré malgré sa convexité.
Qui sait que tout quadrilatère convexe du plan euclidien possédant quatre angles égaux est un rectangle?
Qui sait qu'il n'y a pas de quadrilatère convexe sur la sphère ayant quatre angles droits mais qu'il existe néanmoins des rectangles sur la sphère?

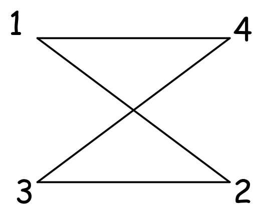
Cette double tradition est sans espoir pour les polygones généraux. Essayez de classer les hexagones!
Cette tradition est sans espoir pour les polyèdres. Elle maintient la notion de polyèdre régulier dans un état lamentable au sein de l'enseignement.

<u>Troisième tradition:</u>
Une approche plus récente d'essai de classification des quadrilatères est de partir du stock figé des noms de familles et d'observer les transformations qui conservent les quadrilatères étudiés, mais sans les composer.
Sans espoir. On creuse sans cesse l'ornière des débuts.

<u>L'avenir : Accepter le groupe des automorphismes ou isométries et ses sous-groupes.</u>
Le groupe diédrique d'ordre huit du carré et ses sous-groupes permettent une classification simple et complète de tous les quadrilatères quel que soit l'espace dans lequel ils sont plongés.

Cette classification respecte le contenu des traditions évoquées : noms, caractéristiques, symétries. C'est la voie ouverte vers toutes les perspectives évoquées, la réponse aux besoins mathématiques, la rigueur et la réponse aux besoins scientifiques.
Il convient d'accepter le quadrilatère combinatoire (ou intrinsèque) c'est-à-dire la structure interne du quadrilatère. Ensuite, on le plonge dans un espace ambiant sans difficulté.
Bien naturellement nous voulons représenter ou visualiser le quadrilatère combinatoire 1234 dans le plan. Ceci est possible de plusieurs manières.
Par exemple



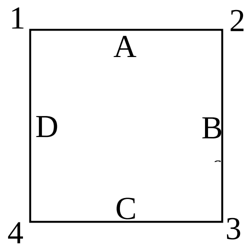


Ces représentations ne sont pas innocentes. Ainsi, la symétrie (1, 2)(3, 4) nous apparaît soit comme une symétrie bilatérale, soit comme une symétrie centrée.
Du point de vue combinatoire, nous nous permettons de l'appeler "symétrie bilatérale". Toute autre symétrie combinatoire donne lieu à un choix de noms "entre guillemets" inspirée par la représentation du quadrilatère carré.

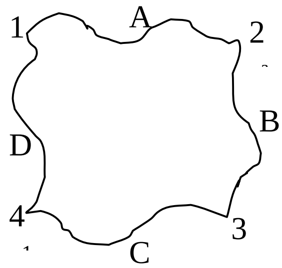
3 - Comment déterminer le groupe des automorphismes d'un quadrilatère intrinsèque Aut(Q)?

Deux manières de procéder :

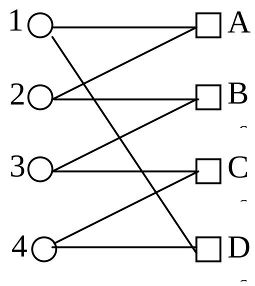
A) Un quadrilatère Q comprend 4 objets nommés sommets (1, 2, 3, 4) et 4 objets nommés côtés (A, B, C, D) unis par des conditions d'incidence telles que tout sommet appartient à deux arêtes, toute arête contient deux sommets, le sommet 1 est voisin des sommets 2 et 4, etc.
Sous ses conditions, Q se représente par différents schémas tels que



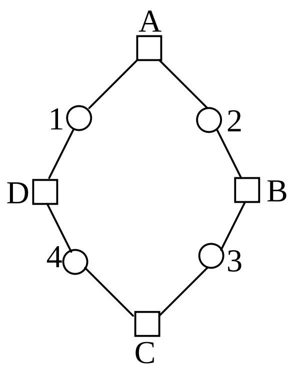
ou



ou



ou



ou ...

Quels sont les automorphismes de Q ou quelles sont les permutations de 1, 2, 3 et 4 qui conservent la structure de Q?
Un quadrilatère est un graphe de quatre sommets dans lequel tout sommet est sur deux arêtes. Le sommet 1 peut prendre quatre positions. Si 1 est fixé, on peut choisir deux positions pour 2, voisin de 1. Si 1 et 2 sont fixés, les autres éléments sont fixés. Il existe donc 4 x2 = 8 automorphismes de Q qui conservent points et côtés et les relations d'incidence qui les unissent.

Ces automorphismes sont (1,2,3,4) ; (1,4,3,2) ; (1,2)(3,4) ; (1,4)(2,3) ; (1,3)(2,4) ; (1)(2,4)(3) ; (2)(1,3)(4) ; (1)(2)(3)(4). Ils sont les éléments du groupe diédrique D_8. La composition de ces huit automorphismes livre le groupe D_8 des automorphismes du quadrilatère.

B) Le groupe des automorphismes d'un quadrilatère est le groupe engendré par deux transformations d'ordre 2 (involutions) r_1 et r_2 telles que $r_1^2 = r_2^{\ 2} = (r_1 r_2)^4 = 1$.

Remarquons que pour le carré, r_1 est une symétrie bilatérale ayant pour axe une médiane du carré et r_2 une symétrie bilatérale ayant pour axe une diagonale du carré.

Quel sont les éléments de ce groupe?

1) r_1

2) r_2

3) 1

4) r_1r_2

5) r_2r_1 ($r_1r_2 \neq r_2 r_1$) en effet si $r_1r_2 = r_2 r_1$ on a $r_1r_1r_2 = r_1r_2 r_1$
ou $r_2 = r_1 r_2 r_1$
ou $r_2r_2 = r_2r_1r_2 r_1$
ou $1 = (r_2 r_1)^2$ qui n'est pas vérifié.

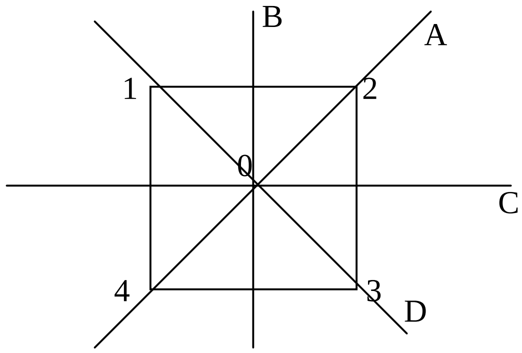
6) $r_1r_2r_1$.
($r_1r_2r_2 = r_1$)

7) $r_2 r_1r_2$ ($r_1r_2r_1 \neq r_2 r_1r_2$) en effet, si $r_1r_2r_1 = r_2 r_1r_2$ on a $r_1r_2r_1 = r_2 r_1r_2$
ou $r_2 r_1r_2\ r_1r_2r_1 = 1$
ou $(r_2 r_1)^3 = 1$ qui n'est pas vérifié.

($r_2 r_1r_1 = r_2$)

8) $r_1r_2r_1r_2 = r_2r_1r_2r_1$

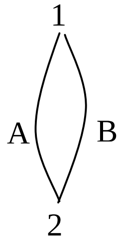
Par ces deux méthodes, nous retrouvons bien les mêmes automorphismes :

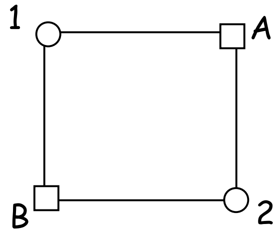


(1,2,3,4)	r_2r_1	Rotation d'un quart de tour de centre o (sens horlogique)
(1,4,3,2)	r_1r_2	Rotation d'un quart de tour de centre o (sens antihorlogique)
(1,2)(3,4)	r_1	Symétrie bilatérale d'axe B
(1,4)(2,3)	$r_2r_1r_2$	Symétrie bilatérale d'axe C
(1,3)(2,4)	$r_1r_2r_1r_2$	Symétrie centrale de centre o
(1)(2,4)(3)	$r_1r_2r_1$	Symétrie bilatérale d'axe D
(2)(1,3)(4)	r_2	Symétrie bilatérale d'axe A
(1)(2)(3)(4)	1	Identité

Généralisation :
Le groupe diédrique d'ordre 2n, D_{2n} peut être vu de deux manières assez différentes :
A) soit comme le groupe des automorphismes d'un n-gone ($n \geq 3$),
B) soit comme le groupe engendré par r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = (r_1r_2)^n = 1$ où r_1 et r_2 sont deux symétries orthogonales d'axes voisins.

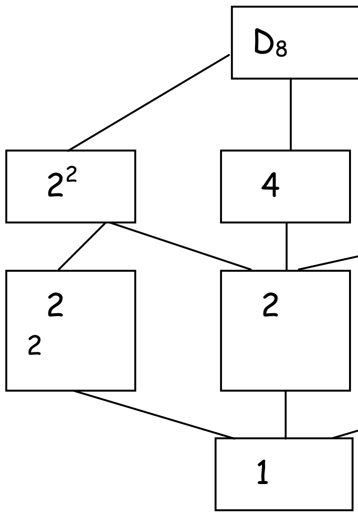
Il est à remarquer que la seconde définition convient également pour n = 2. D_4 est même un des groupes diédriques les plus importants : D_4 est le groupe engendré par r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = (r_1r_2)^2 = 1$.
On en vient ainsi à l'admission du digone ou 2-gone que voici.





4 - Le groupe diédrique D_8 et ses sous-groupes.

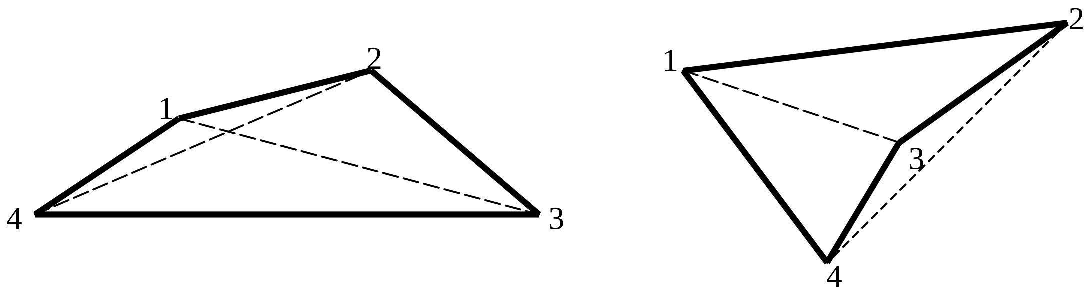
D_8 est le groupe des symétries du carré. Ce groupe a différents sous-groupes que l'on peut représenter de manières différentes. Voici une des possibilités qui est expliquée dans les pages suivantes.



Chaque case rectangulaire représente un sous-groupe de D_8 (deux sous-groupes dans le cas où le nombre 2 apparaît dans le coin inférieur gauche du rectangle). Il y a donc dix sous-groupes. Les segments de droite qui relient les divers rectangles indiquent les inclusions entre ces ensembles.
Un mot d'explication s'impose. Nous le fournissons dans les pages suivantes.

5- Classification objective des quadrilatères

A présent, considérons un quadrilatère 1234 du plan. Dans ce cas, un sommet est un point, un côté ($[12],[23],[34],[41]$) est un segment dont les extrémités sont deux sommets consécutifs. De plus nous considérons qu'une diagonale est un segment dont les sommets sont opposés ($[13],[24]$).



Donnons-nous le sous-groupe des **isométries** du plan conservant 1234 ce qui signifie la classe de conjugaison de ce groupe au sein de D_8. Que peut-on dire de celui-ci ? Nous parcourons les cas pour *G* sous-groupe de D_8.

Nous introduisons également un critère de classification bien naturel selon que les segments diagonaux ont ou n'ont pas de point commun. (**critère diagonal**).

D'autre part, nous distinguerons le cas où deux côtés opposés du quadrilatère n'ont pas de point commun, du cas où il existe deux côtés opposés du quadrilatère qui se coupent. (**critère côtés opposés**).

En résumé, les critères de classification que nous utilisons sont
- Le groupe des isométries du quadrilatère
- critère diagonal
-critère côtés opposés

<u>Lemme :</u> Tout automorphisme de 1234 qui fixe le sommet a, fixe le sommet opposé opp(a).

En effet, tout sommet a admet un opposé opp(a) (sommet qui est le plus éloigné de a). Si la symétrie g fixe a, alors elle fixe opp(a) car l'opposé de a est non adjacent à a et doit le rester.

5-1

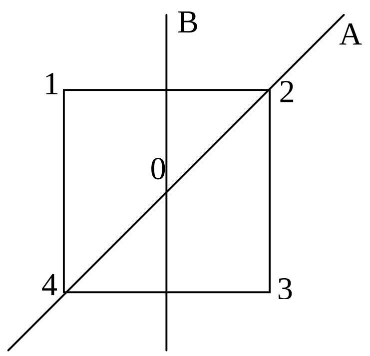
G = D_8

Que dire de 1234 ? Nous pensons « c'est un carré ». Quel est le statut logique de cette affirmation ? Est-ce une conjecture ? Une définition ? Un théorème ? Dans l'esprit de notre démarche, un carré serait défini comme quadrilatère dont le groupe des isométries est D_8. Le lecteur peut avoir une autre approche du carré. Dans ce cas, il faut prouver que cette approche implique que le groupe est D_8. Nous le ferons en détail au point 6. Comment ? Si $G = D_8$, G contient Z_4 et en 6 nous examinons cette situation en détail, y compris 9 définitions du carré dont nous montrons l'équivalence.

Rappelons les deux approches A et B vues en 3 pour D_8.

Selon A, D_8 est le groupe des automorphismes du quadrilatère intrinsèque. Le carré est le quadrilatère plan qui réalise ce groupe par des isométries. C'est le quadrilatère parfait, régulier.

Selon B, D_8 est engendré par deux générateurs r_1 et r_2 tels $r_1^2 = r_2^2 = (r_1r_2)^4$. Dans le quadrilatère plan, r_1 est la symétrie bilatérale S_A d'axe diagonal $A = 24$ et r_2 la symétrie bilatérale S_B d'axe médian B qui passe par le milieu de $[12]$ et le milieu de $[34]$. A et B sont deux axes de symétrie proches l'un de l'autre. On a bien $(S_A)^2 = (S_B)^2$ et $(S_A \text{ o } S_B)^4 = (R\frac{1}{4})^4 = I$ où $R\frac{1}{4}$ est une rotation d'un quart de tour de centre $o = A \cap B$.



Les automorphismes du carré sont (1,2,3,4) ; (1,4,3,2) ; (1,2)(3,4) ; (1,4)(2,3) ; (1,3)(2,4) ; (1)(2,4)(3) ; (2)(1,3)(4) ; (1)(2)(3)(4).

5-2

A la troisième ligne du tableau, section 4 page 9 apparaissent les cases suivantes

${}_2 2$	2	${}_2 2$

Expliquons cela.

Le nombre 2 situé dans la case du milieu représente

(1)(2)(3)(4) et (1,3)(2,4) (symétrie centrale).

Dans la case de gauche, le nombre ${}_2 2$ représente

(1)(2)(3)(4) et (1,2)(3,4) (symétrie médiane)

de même que le conjugué

(1)(2)(3)(4) et (1,4)(2,3) (symétrie médiane).

Dans la case de droite, le nombre ${}_2 2$ représente

(1)(2)(3)(4) et (1)(2,4)(3) (symétrie diagonale)

de même que le conjugué

(1)(2)(3)(4) et (2)(1,3)(4) (symétrie diagonale).

Le quadrilatère possède soit un axe, soit un centre de symétrie.

5-2-1

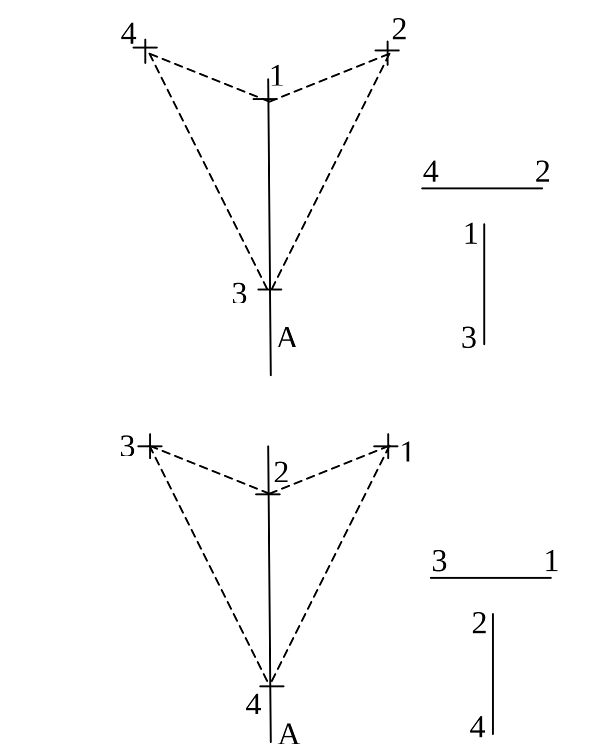
Envisageons le cas où le quadrilatère possède un axe de symétrie A. Ce dernier comprend 2, 1 ou 0 sommet du quadrilatère.

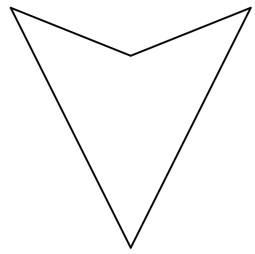
Le cas où l'axe comprend 1 sommet est à exclure comme le prouve le lemme vu en 5. Nous abordons donc deux cas.

5-2-1-1 Premier cas : l'axe de symétrie comprend 2 sommets du quadrilatère.

Ces sommets ne peuvent être consécutifs car le lemme vu en 5 nous apprend que tous les sommets seraient fixes.

Deux sommets non consécutifs (opposés) du quadrilatère appartiennent donc à l'axe de symétrie. Nous obtenons les possibilités suivantes en tenant compte du **critère diagonal**, c'est-à-dire selon que les segments diagonaux ont ou n'ont pas de point commun.

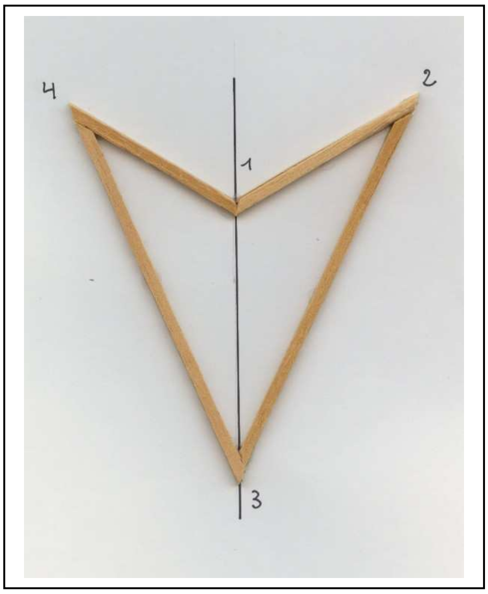


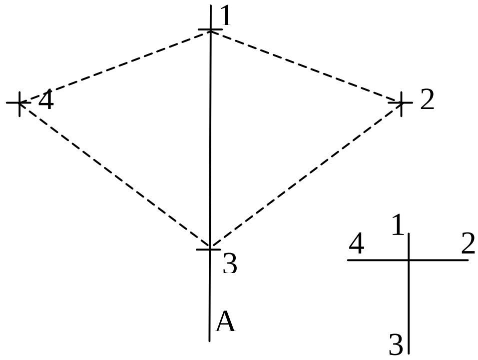
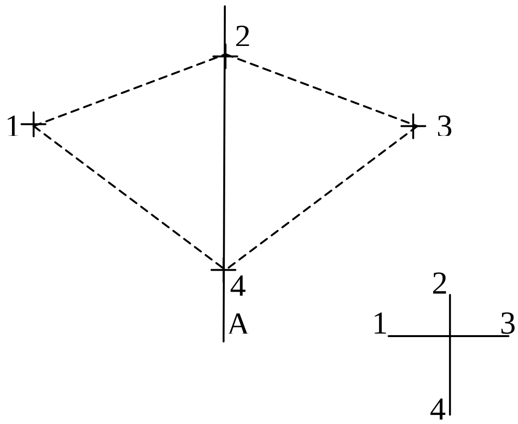
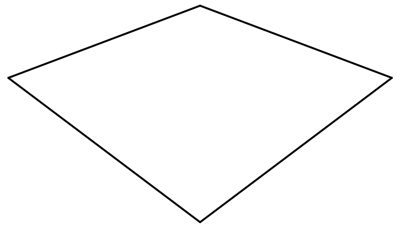


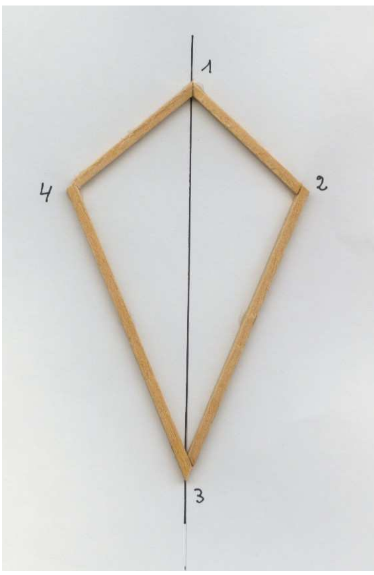
Nous obtenons le delta-plane dont le groupe d'automorphismes est
(1)(3)(2,4) ; (1)(2)(3)(4)

ou

(2)(4)(1,3) ; (1)(2)(3)(4)



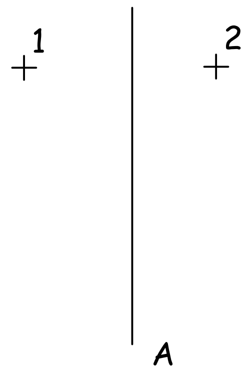
 	 Nous obtenons le cerf-volant dont le groupe d'automorphismes est (1)(3)(2,4) ; (1)(2)(3)(4) ou (2)(4)(1,3) ; (1)(2)(3)(4)

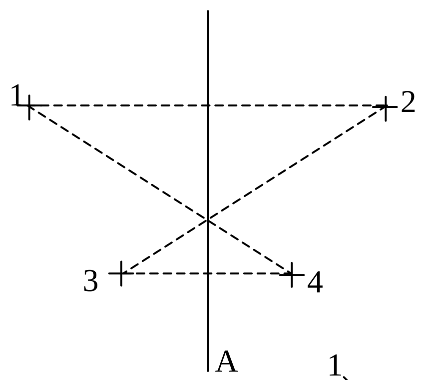


Le **critère côtés opposés** ne fait pas apparaître d'autres cas.

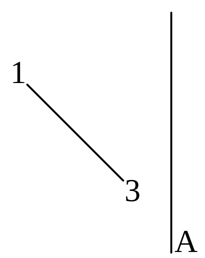
<u>5-2-1-2 Deuxième cas</u> : L'axe de symétrie ne contient aucun sommet du quadrilatère.
On place le sommet 1. Appelons 1_A l'image de 1 par la symétrie d'axe A. Le segment $[1,1_A]$ est soit un côté du quadrilatère, soit une de ses diagonales.

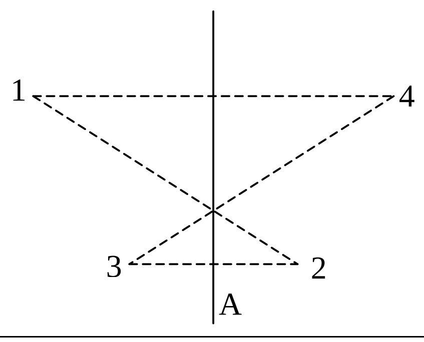
<u>5-2-1-2 –1</u> $[1,1_A]$ est un côté du quadrilatère, dans ce cas, 1_A est le point 2 ou le point 4, ces deux possibilités étant identiques du point de vue combinatoire.

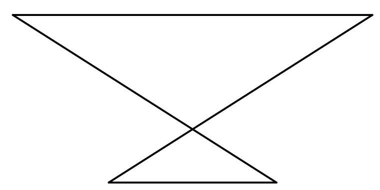




ou



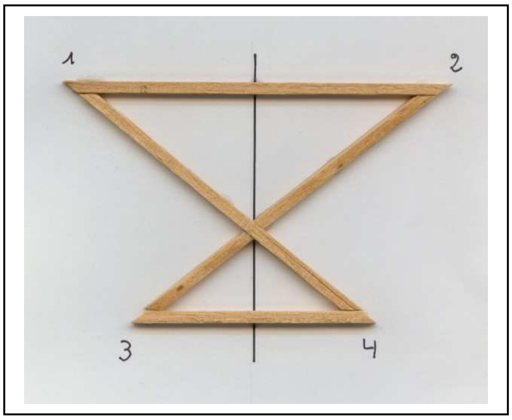


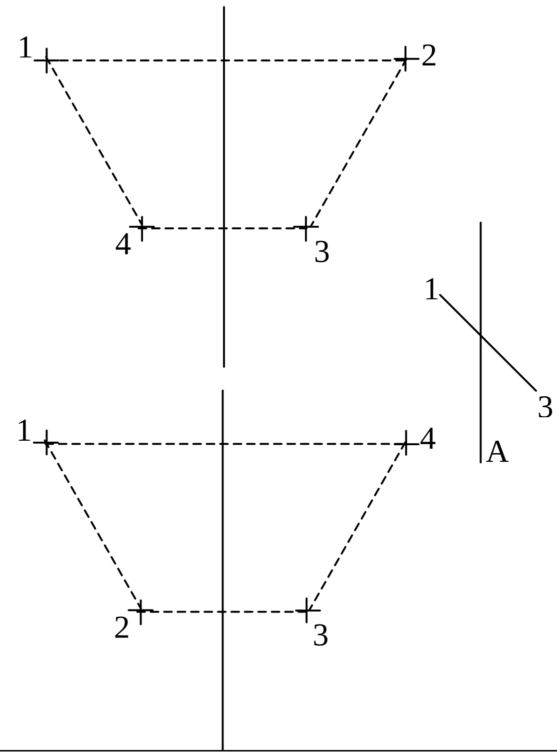


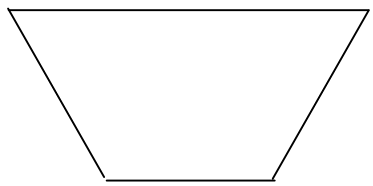
Si le point 3 se situe du même côté que 1 par rapport à l'axe, nous obtenons le papillon trapèze isocèle à côtés parallèles dont le groupe d'automorphismes est
(1,2)(3,4) ; (1)(2)(3)(4)

ou

(1,4)(2,3) ; (1)(2)(3)(4).



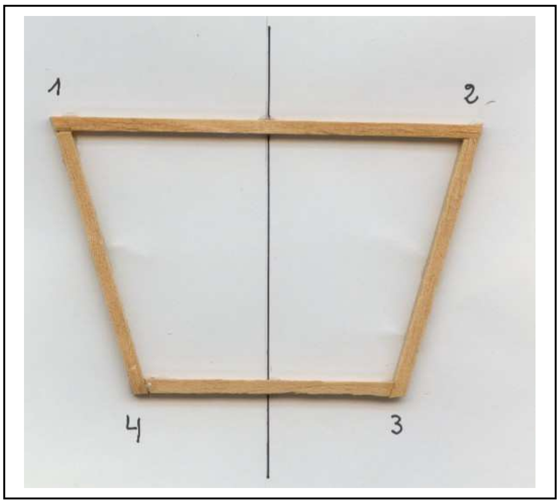




Si les points 1 et 3 ne se situent pas du même côté de l'axe nous obtenons le trapèze isocèle dont le groupe d'automorphismes est
(1,2)(3,4) ; (1)(2)(3)(4).

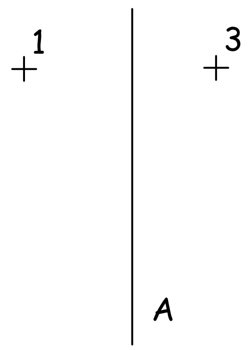
ou

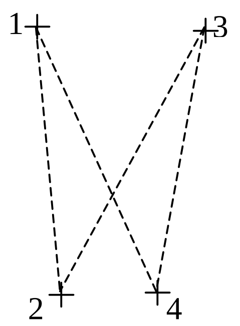
(1,4)(2,3) ; (1)(2)(3)(4).

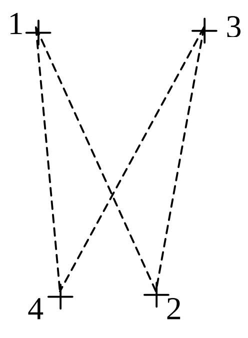


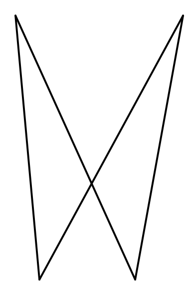
Remarquons que ces deux cas se distinguent par le critère diagonal:
- les diagonales du trapèze isocèle se coupent,
- les diagonales du papillon trapèze isocèle à côtés parallèles ne se coupent pas.

<u>5-2-1-2 –2</u> $[1,1_A]$ est une diagonale du quadrilatère, dans ce cas, 1_A est le point 3.

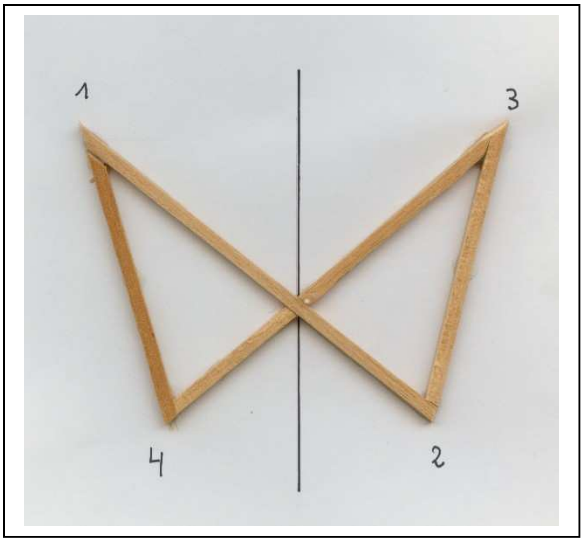








Nous obtenons le papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles dont le groupe d’automorphismes est (1,3)(2,4) ; (1)(2)(3)(4).

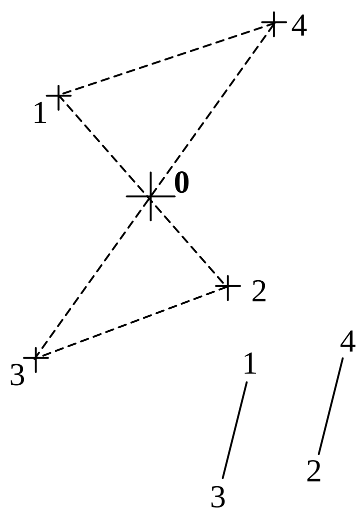
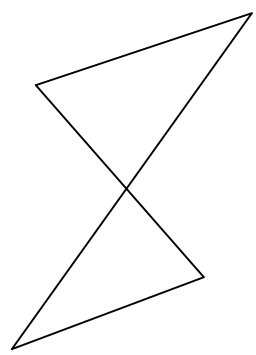


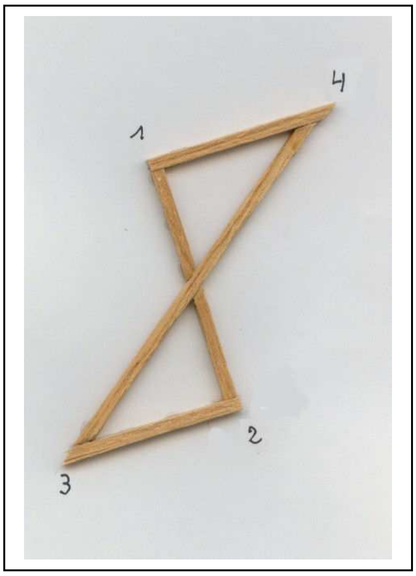
Le papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles est quant à lui, l'occasion de repréciser que notre classification des quadrilatères se fait à partir des sous-groupes du groupe diédrique D_8. ([section2](#)) Le sous-groupe {(1,3)(2,4) ; (1)(2)(3)(4)}. comprend l'identité et la "symétrie centrée" (1,3)(2,4). Cette dernière se réalise sur le carré par une symétrie centrée. Pour le papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles elle se réalise par une symétrie bilatérale.

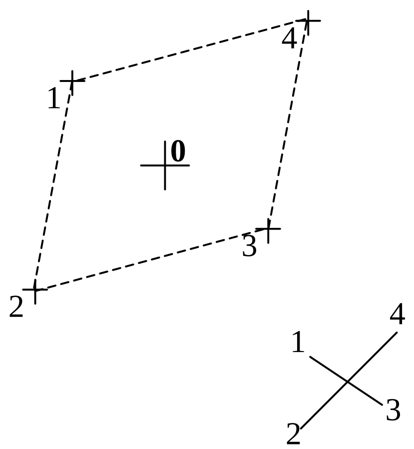
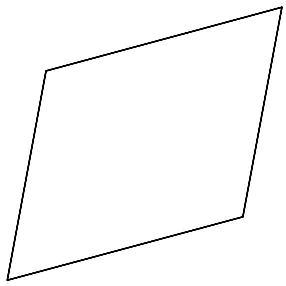
Le **critère côtés opposés** ne fait pas apparaître d'autres cas.

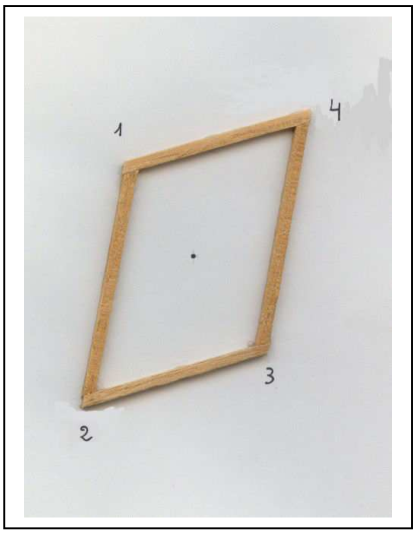
<u>5-2-2</u>

Envisageons le cas où le quadrilatère possède un centre de symétrie o.
On place le sommet 1. Son opposé, 3, est son symétrique ou non. Le **critère diagonal** nous livre les deux quadrilatères suivants :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
Nous obtenons un papillon parallélogramme dont le groupe d'automorphismes est (1,2)(3,4) ; (1)(2)(3)(4)</td>
</tr>
</table>



 	 Nous obtenons un parallélogramme dont le groupe d'automorphismes est (1,3)(2,4) ; (1)(2)(3)(4) .



Le **critère côtés opposés** ne fait pas apparaître d'autres cas.

Remarques :

Dans le cas du trapèze isocèle, du cerf-volant, du delta-plane et des papillons isocèles le générateur est une symétrie bilatérale.
Dans le cas du parallélogramme et du papillon parallélogramme le générateur est une symétrie centrale.

Le papillon parallélogramme est à nouveau l'occasion de préciser que notre classification des quadrilatères se fait à partir des sous-groupes du groupe diédrique D_8. (section 2) Le sous-groupe {(1,2)(3,4) ; (1)(2)(3)(4)} comprend l'identité et la "symétrie bilatérale" (1,2)(3,4). Cette dernière se réalise sur le carré par une symétrie bilatérale par rapport à une médiane du carré. Pour le papillon parallélogramme, elle se réalise par une symétrie centrée.

En conclusion, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème : Soit 1234 un quadrilatère plan et s une isométrie d'ordre 2 du plan qui conserve 1234. Alors une des situations suivantes a lieu :

i	1234 est un delta-plane	s est bilatérale	Axe(s) est diagonal	$13 \cap 24 = \phi$
ii	1234 est un cerf-volant	s est bilatérale	Axe(s) est diagonal	$13 \cap 24$ est un point
iii	1234 est un papillon trapèze à côtés parallèles	s est bilatérale	Axe(s) est médian	$13 \cap 24 = \phi$
iv	1234 est un trapèze isocèle	s est bilatérale	Axe(s) est médian	$13 \cap 24$ est un point
v	1234 est un papillon trapèze à diagonales parallèles	s est bilatérale	Axe(s) est la droite reliant le milieu des diagonales	
vi	1234 est un papillon parallélogramme	s est centrée	Centre est l'intersection des côtés	
vii	1234 est un parallélogramme	s est centrée	Centre est l'intersection des diagonales	

5-3

Abordons maintenant la deuxième ligne du tableau de la section 4 page 9.

2^2

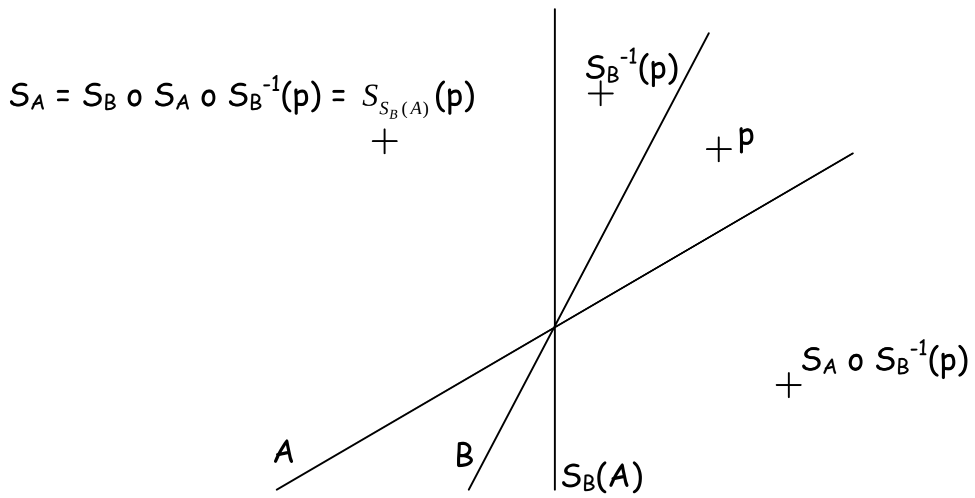
2^2 est une autre notation de Z_2xZ_2, c'est à dire l'ensemble des composées d'un élément de Z_2 et d'un élément d'un autre Z_2 de telle manière que si u est un élément du premier Z_2 et v un élément du second Z_2, on ait u o v = v o u.

Ce groupe d'ordre 4 comporte l'identité et trois autres symétries d'ordre deux non identiques qui sont soit une symétrie axiale, soit une symétrie centrale. Le groupe ne pouvant contenir au plus qu'une seule symétrie centrale, deux symétries sont obligatoirement axiales S_A et S_B d'axes A et B. La composée de ces dernières étant une rotation, ne peut être qu'une rotation de 180° ou symétrie centrée. Dès lors les axes des deux symétries axiales sont perpendiculaires.

Une autre manière de prouver ceci est la suivante :

On a S_A o S_B = S_B o S_A ou S_A = S_B o S_A o S_B^{-1}.

Or S_B o S_A o S_B^{-1} est la symétrie qui a pour axe la droite $S_B(A)$.

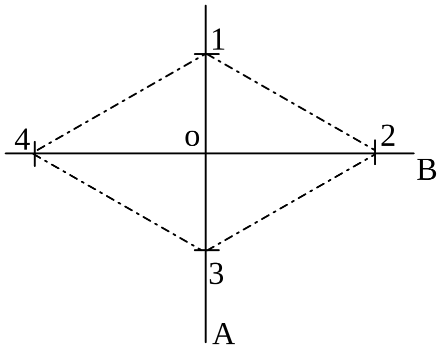
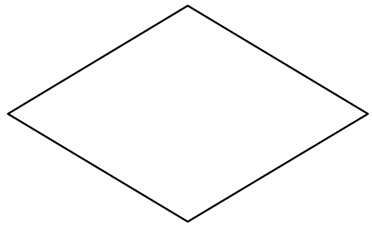


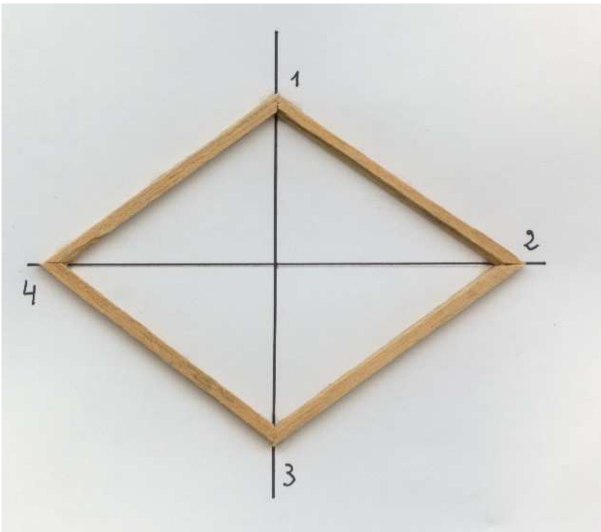
Donc S_A est la symétrie qui a pour axe la droite $S_B(A)$. Les droites A et $S_B(A)$ sont confondues, ce qui n'est possible que si A est perpendiculaire à B.

En résumé, le groupe contient deux symétries axiales S_A et S_B d'axes A et B et une symétrie centrale S_o de centre $o = A \cap B$.

<u>5-3-1</u>

Si un sommet du quadrilatère appartient à un des axes. Son opposé doit alors appartenir à cet axe (voir lemme section 5) et les deux autres sommets doivent appartenir à l'autre axe.

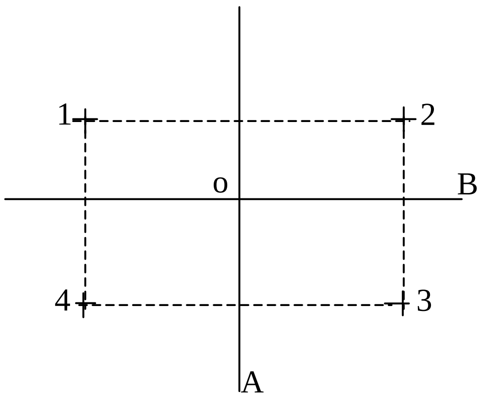
	 On obtient le losange dont le groupe d'automorphismes est (1,3)(2,4) ; (1)(2,4)(3) ; (2)(1,3)(4) ; (1)(2)(3)(4)

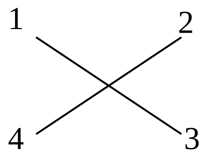


Le **critère diagonal** et le **critère côtés opposés** ne font pas apparaître d'autres cas.

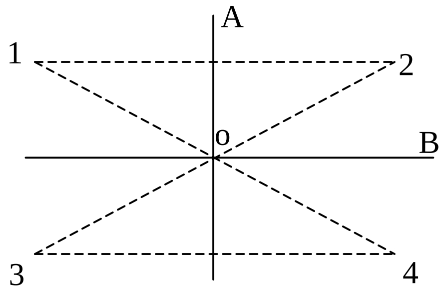
<u>5-3-2</u>

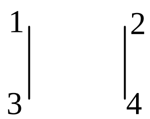
Si aucun des sommets du quadrilatère n'appartient à un des axes de symétrie, le **critère diagonal** nous livre deux quadrilatères

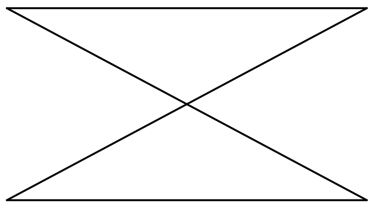




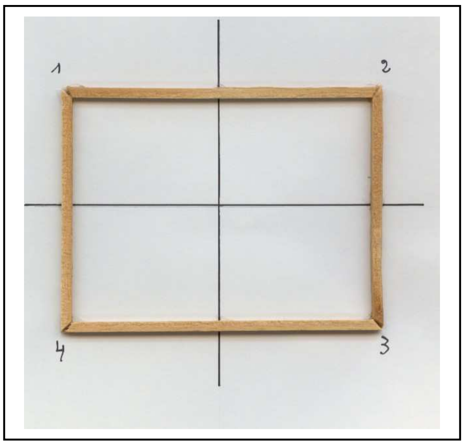
On obtient le rectangle dont le groupe d'automorphismes est
(1,2)(3,4) ; (1,4)(2,3) ; (1,3)(2,4);
(1)(2)(3)(4)

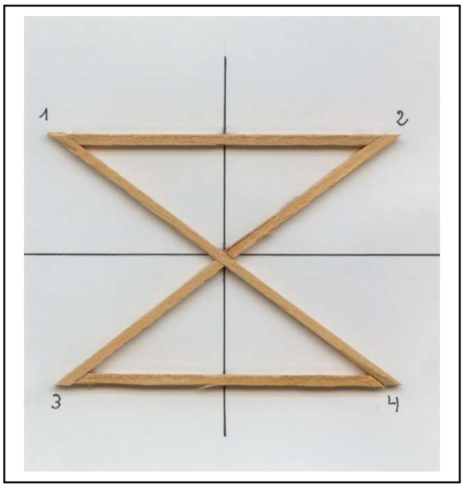






On obtient le papillon rectangle dont le groupe d'automorphismes est également
(1,2)(3,4) ; (1,4)(2,3) ; (1,3)(2,4);
(1)(2)(3)(4)





a) Dans le premier cas (cas du losange) les deux groupes Z_2 ont respectivement pour générateur les symétries bilatérales ayant pour axes les diagonales du losange.
b) Dans le second cas (cas du rectangle et du papillon rectangle) les deux groupes Z_2 ont respectivement pour générateur les symétries bilatérales ayant pour axes les médianes du rectangle.

Le **critère côtés opposés** ne fait pas apparaître d'autres cas.

<u>5-4</u> Envisageons maintenant le groupe Z_1 qui est l'identité.
Les quadrilatères qui ont l'identité pour groupe de symétries ne possèdent ni axe ni centre de symétrie.
On distingue différents cas en utilisant le **critère diagonal** (section 5).

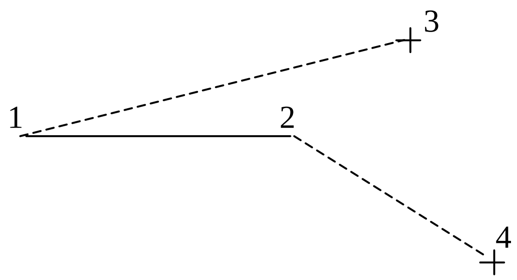
Les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est un point sont les quadrilatères **convexes** et les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est vide sont les quadrilatères **non convexes**.

<u>Définition</u> : un quadrilatère est convexe si pour toute droite support d'un côté du quadrilatère, tous les sommets se situent dans le même demi-plan limité par cette droite.

<u>Théorème</u> : Un quadrilatère est convexe si et seulement si ses diagonales se coupent.

Démonstration :
- Pour démontrer que si les diagonales d'un quadrilatère se coupent, alors le quadrilatère est convexe, démontrons que si le quadrilatère n'est pas convexe, alors les diagonales ne se coupent pas.

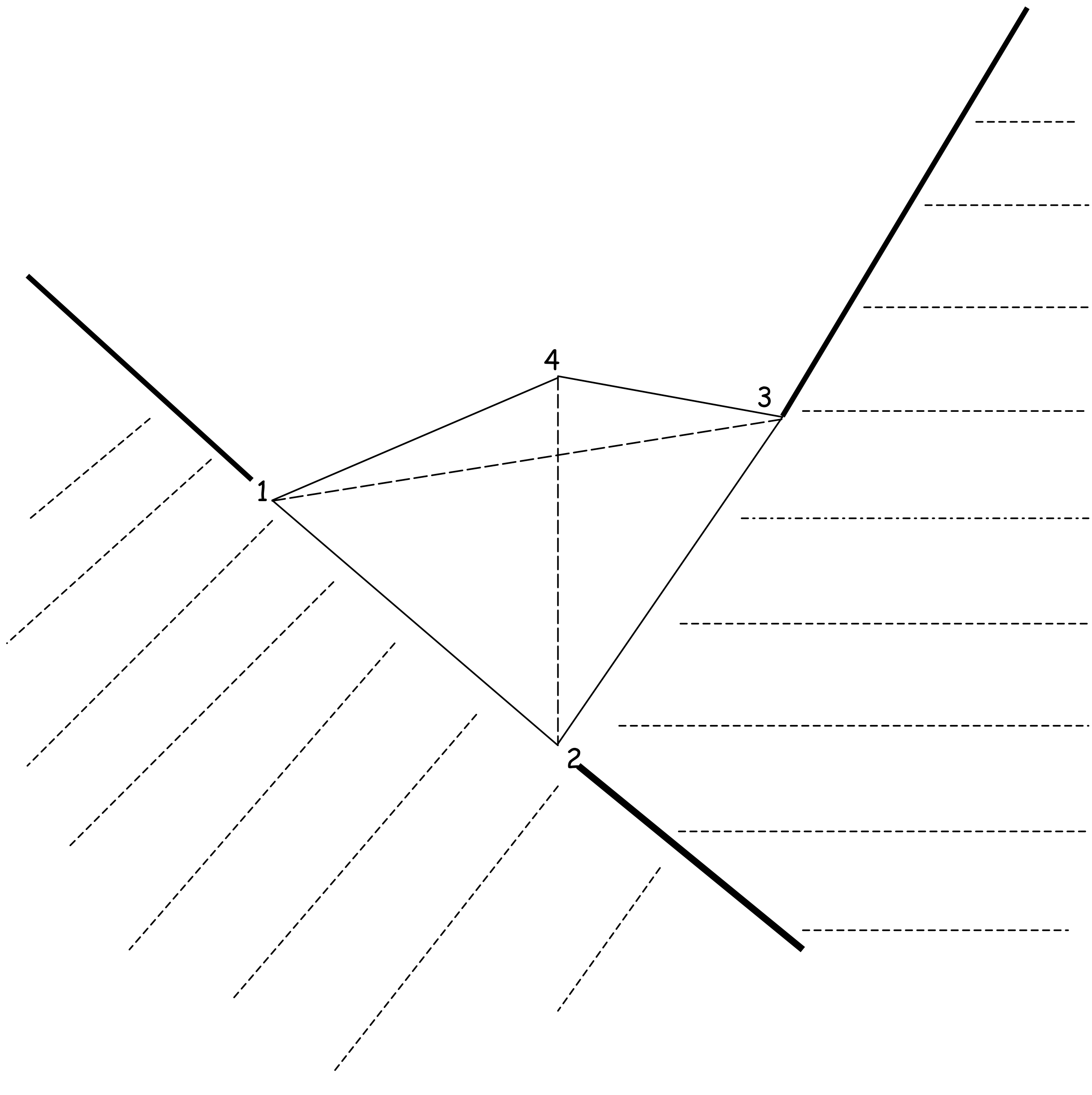
Plaçons les sommets 1, 2 et 3



Appliquons la définition d'un quadrilatère est convexe à la droite support 12. Le sommet 4 doit se situer dans le demi-plan limité par 12, dans lequel 3 ne se trouve pas. Dès lors, $[13]$ et $[24]$ se situent dans des demi-plans différents et ne se coupent pas.

- Pour démontrer que si le quadrilatère est convexe alors ses diagonales se coupent, il faut se rappeler l'axiome qui dit que si deux points se situent de part et d'autre d'une droite, alors le segment reliant les deux points coupe la droite.
Si 1 et 2 sont les sommets d'un quadrilatère, la droite 12 délimite deux demi-plans. Le sommet 3 se situe dans un de ces demi-plans et le point 4 doit se situer dans le même demi-plan. Une fois le sommet 3 placé, la droite 23 partage le plan en deux demi-plans et le sommet 4 doit se situer dans le même demi-plan que le

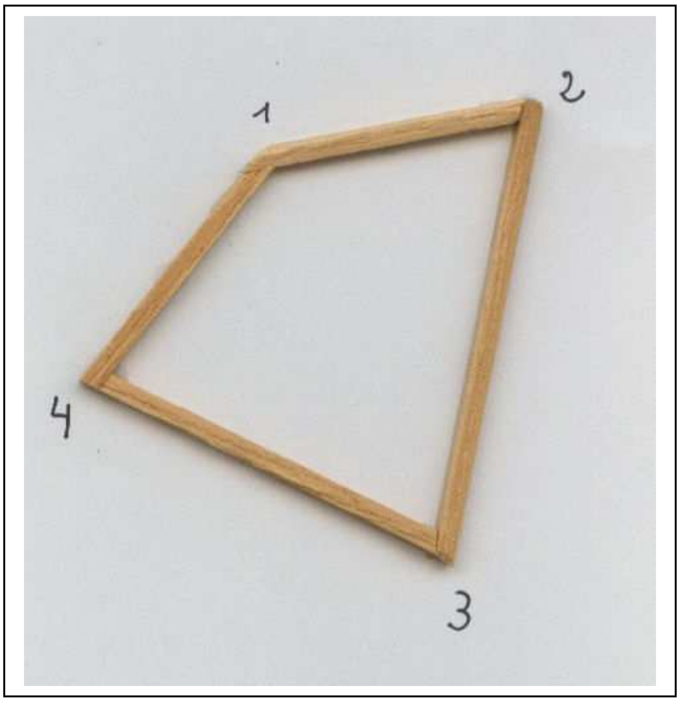
sommet 1. La droite 13 détermine deux demi-plans et les points 2 et 4 ne peuvent pas se situer dans le même sinon les sommets 2 et 3 seraient situés dans des demi-plans différents par rapport à la droite 14 et le quadrilatère serait non convexe. Il en découle que les diagonales $[13]$ et $[24]$ se coupent. □ cqfd



Utilisons le **critère des diagonales** :

5-4-1 Les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est un point ou quadrilatères convexes.

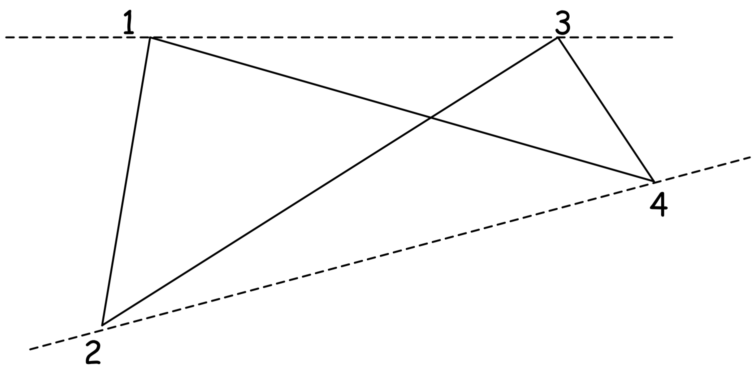
Nous obtenons les quadrilatères convexes quelconques.

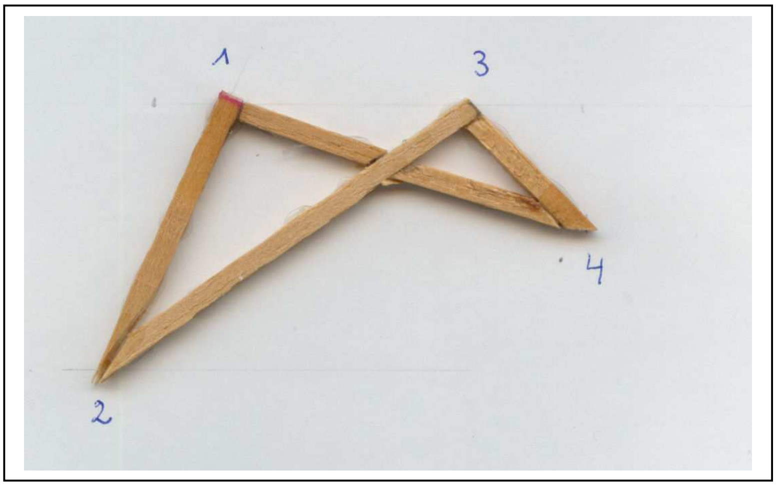


5-4-2 Les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est vide ou quadrilatères non convexes.

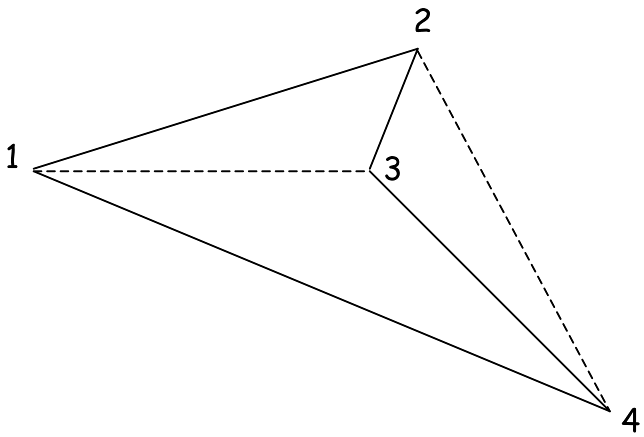
Le critère **côtés opposés** fait apparaître deux sous-cas:

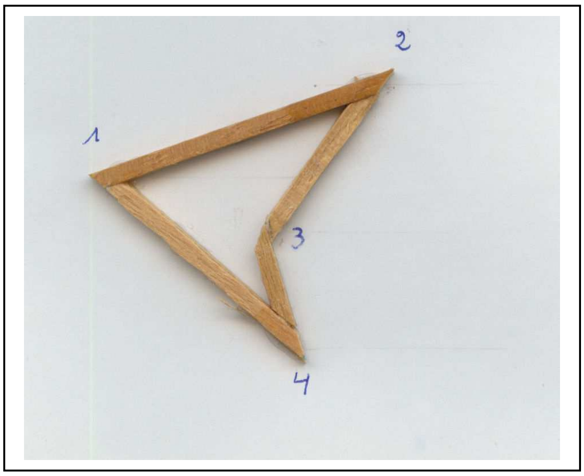
5-4-2-1 : Si les côtés $[14]$ et $[23]$ se coupent, on obtient le quadrilatère papillon quelconque.





<u>5-4-2-2</u> : Si les côtés $[14]$ et $[23]$ ne se coupent pas, on obtient le quadrilatère bec.





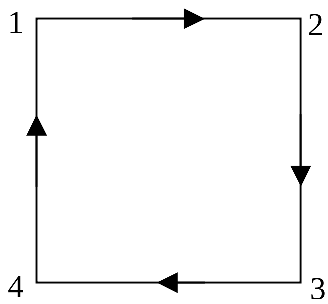
5-5 Abordons maintenant le dernier cas de la deuxième ligne du tableau de la section 4 page 9 .

4

Le nombre indiqué dans cette case signifie qu'un sous-groupe de D_8 est un groupe cyclique d'ordre 4. Un tel groupe se note souvent Z_4.
Un groupe cyclique d'ordre n (Z_n) est le groupe des rotations d'un polygone régulier convexe de n côtés. Ce groupe a un seul générateur a, soumis à la condition $a^n = 1$.

Théorème : Un quadrilatère soumis à ces conditions est un carré. Le générateur du groupe est une rotation d'un quart de tour.

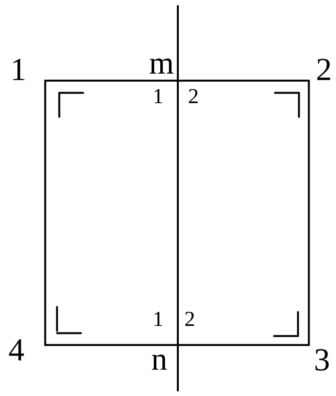
Hypothèse : 1234 est un quadrilatère dont le groupe d'automorphismes est Z_4
Thèse : 1234 est un carré.

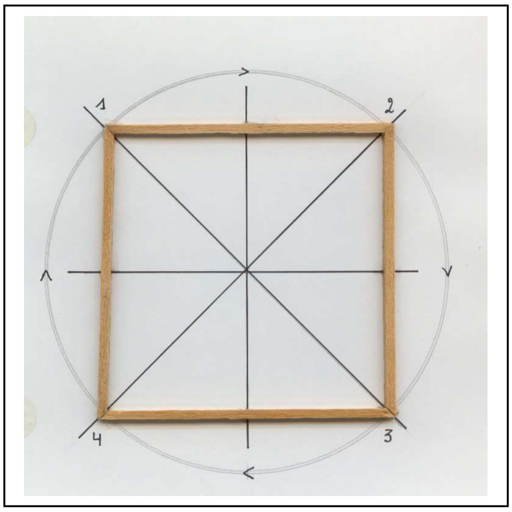


Démonstration :
Le groupe d'automorphismes du quadrilatère 1234 est {(1,2,3,4) ; (1,4,3,2) ; (1,3)(2,4) ;(1)(2)(3)(4)}
Pour montrer que le quadrilatère obtenu est bien un carré, nous devons prouver que son groupe d'automorphismes est {(1,2,3,4) ; (1,4,3,2) ; (1,2)(3,4) ; (1,4)(2,3) ; (1,3)(2,4) ; (1)(2,4)(3) ; (2)(1,3)(4) ; (1)(2)(3)(4)}. Montrons par exemple que le quadrilatère est conservé par l'automorphisme (1,2)(3,4):

Comme le quadrilatère étudié est conservé par rotations, les côtés ont même longueur et les angles ont même amplitude. De plus, par la rotation d'un demi-tour de centre O, 1 a pour image 3 et 2 a pour image 4. Les diagonales se coupent en leur milieu O et le quadrilatère est donc convexe. Les La somme des angles d'un quadrilatère convexe valant 360°, chaque angle vaut 90°. (Remarquons que dans notre classification, ceci ne suffit pas pour affirmer que le quadrilatère est un carré)
Soit m le milieu de $[12]$ et n le milieu de $[34]$. Les triangles 1m4 et 2m3 sont isométriques (un angle égal compris entre deux côtés de même longueurs). On en déduit que $|3m| = |4m|$ et que par conséquent les triangles 4mn et 3mn ont trois

côtés de même longueur et sont isométriques. Les angles $\hat{n}_1$ et $\hat{n}_2$ ont par conséquent même mesure et valent chacun 90°. On montre de même que $\hat{m}_1$ et $\hat{m}_2$ valent chacun 90°. Comme m est le milieu de 12 et n le milieu de 34, mn est un axe de symétrie et le quadrilatère est conservé par la symétrie (1,2)(3,4). □ cqfd





5-6 Synthèse

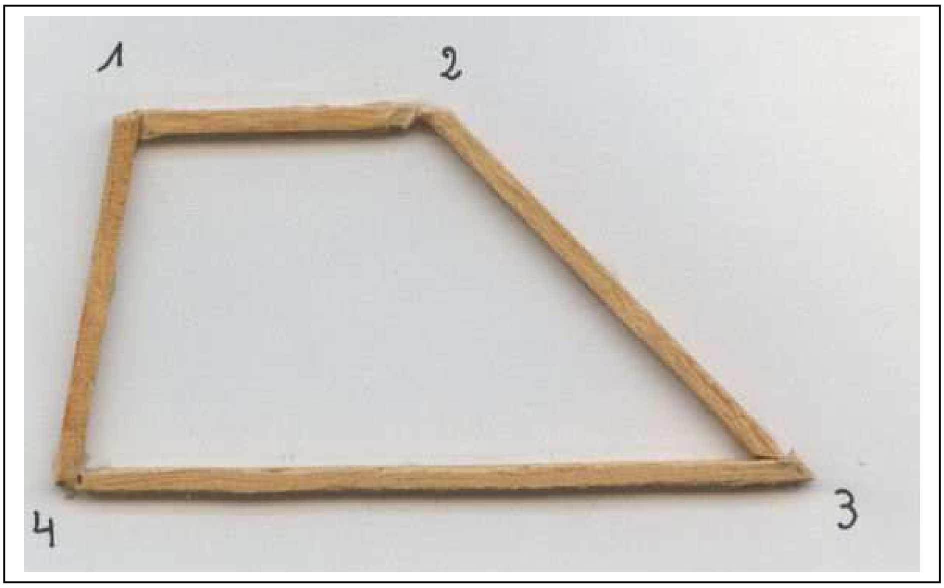
Notre étude fait apparaître 14 types de quadrilatères :

- Les quadrilatères convexes :
  1) le carré
  2) le rectangle
  3) le losange
  4) le parallélogramme
  5) le trapèze isocèle
  6) le cerf-volant
  7) le quadrilatère convexe quelconque

- Les quadrilatères papillons :
  1) le papillon rectangle
  2) le papillon parallélogramme
  3) le papillon trapèze à côtés parallèles
  4) le papillon trapèze à diagonales parallèles
  5) le papillon quelconque

- Les quadrilatères becs.
  1) le delta-plane
  2) le quadrilatère bec

Remarque : Nos critères font apparaître le trapèze quelconque comme quadrilatère quelconque.



6- Définitions du carré

Le carré existe depuis longtemps. Prenons pour exemple la base de la Grande Pyramide (- 3800). Mais comment définir un carré ?

Traditionnellement le carré est défini comme étant un quadrilatère ayant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur. Dans ce texte, le carré est défini comme un quadrilatère dont le groupe des automorphismes est soit D_8 soit Z_4 (voir section 4 et section 5-5). Beaucoup de définitions sont possibles. En voici quelques exemples :

a) Quadrilatère convexe ayant 4 angles droits et 4 côtés de même longueur.
b) Rectangle ayant 4 côtés de même longueur.
c) Rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur.
d) Losange ayant un angle droit.
e) Parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires et de même longueur.
f) Quadrilatère conservé par une rotation d'ordre 4 (Z_4).
g) Quadrilatère ayant 4 axes de symétrie.
h) Quadrilatère dont le groupe d'isométries est d'ordre 8 (D_8).
i) Quadrilatère losange et rectangle.

La définition traditionnelle du carré est celle notée en a). Il est aisé de montrer que b), c), d), e), g) et i) sont des définitions équivalentes à a). Les définitions f) et h) sont moins usuelles. Montrons que ces deux définitions du carré sont équivalentes à la définition a) ou encore que

$$a) \Leftrightarrow f) \Leftrightarrow h)$$

f) $\Rightarrow$ h) : ce point a été démontré en section5-5.

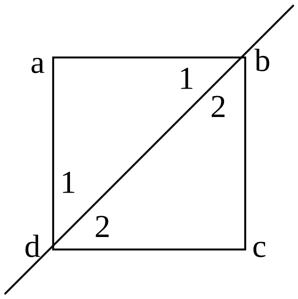
h) $\Rightarrow$ f) : ceci est évident étant donné que le groupe D_8 contient le groupe Z_4.

a) $\Rightarrow$ h) : Pour démontrer qu'un quadrilatère convexe ayant 4 angles droits et 4 côtés de même longueur a pour groupe d'isométrie D_8, il suffit de démontrer que ce quadrilatère a deux axes de symétries voisins (non perpendiculaires) car par composition de ces deux symétries on retrouve toutes les autres.

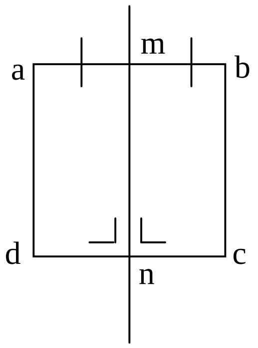
Hypothèse : $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = \frac{\pi}{2}$ et $|ab| = |bc| = |cd| = |da|$

Thèse 1 : bd est un axe de symétrie du quadrilatère.

Thèse 2 : Il existe un axe de symétrie du quadrilatère passant par m, milieu de $[ab]$..

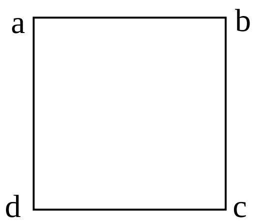


Démonstration de la thèse 1 :
Les triangles abd et bcd sont isométriques (ils ont trois côtés de même longueur) ce qui entraîne que $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$ et que $\hat{d}_1 = \hat{d}_2$. Il s'en suit que la symétrie d'axe bd le côté $[ab]$ aura pour image le côté $[bc]$ et le côté $[ad]$ aura pour image le côté $[dc]$. Ce qui montre que bd est un axe de symétrie du quadrilatère.



Démonstration de la thèse 2 :
Soit m le point milieu de $[ab]$ et n le pied de la droite perpendiculaire abaissée de m sur dc. Les droites ad, bc et mn sont perpendiculaires à une même droite et sont donc parallèles, ce qui implique que mn est perpendiculaire à ab. Dès lors, les quadrilatères amnd et mbcn sont des quadrilatères qui ont 4 angles droits. Ceci implique que par la symétrie d'axe mn, $[ad]$ a pour image $[bc]$. Par conséquent mn est axe de symétrie du quadrilatère.

h) $\Rightarrow$ a)

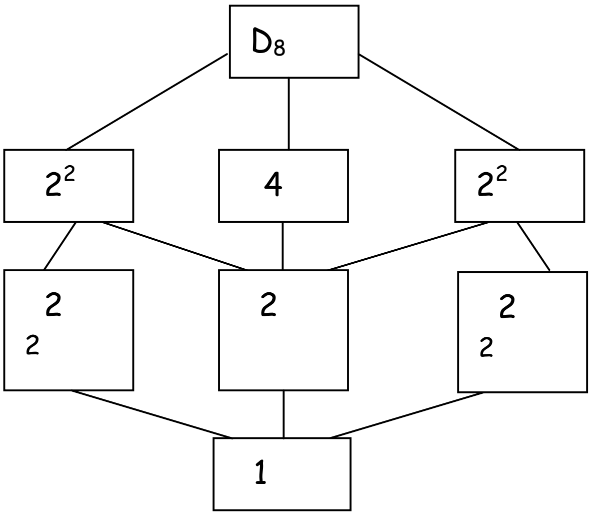


Si le quadrilatère a pour groupe d'isométrie D_8, il est conservé par les rotations d'un quart de tour. Les quatre angles du quadrilatère sont égaux. Comme la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 360°, chaque angle a une mesure de 90° section 5-5. De plus, par les rotations, $[ab]$ va successivement sur $[bc]$, $[cd]$ et $[da]$. Les côtés du quadrilatère ont donc même longueur. □ cqfd

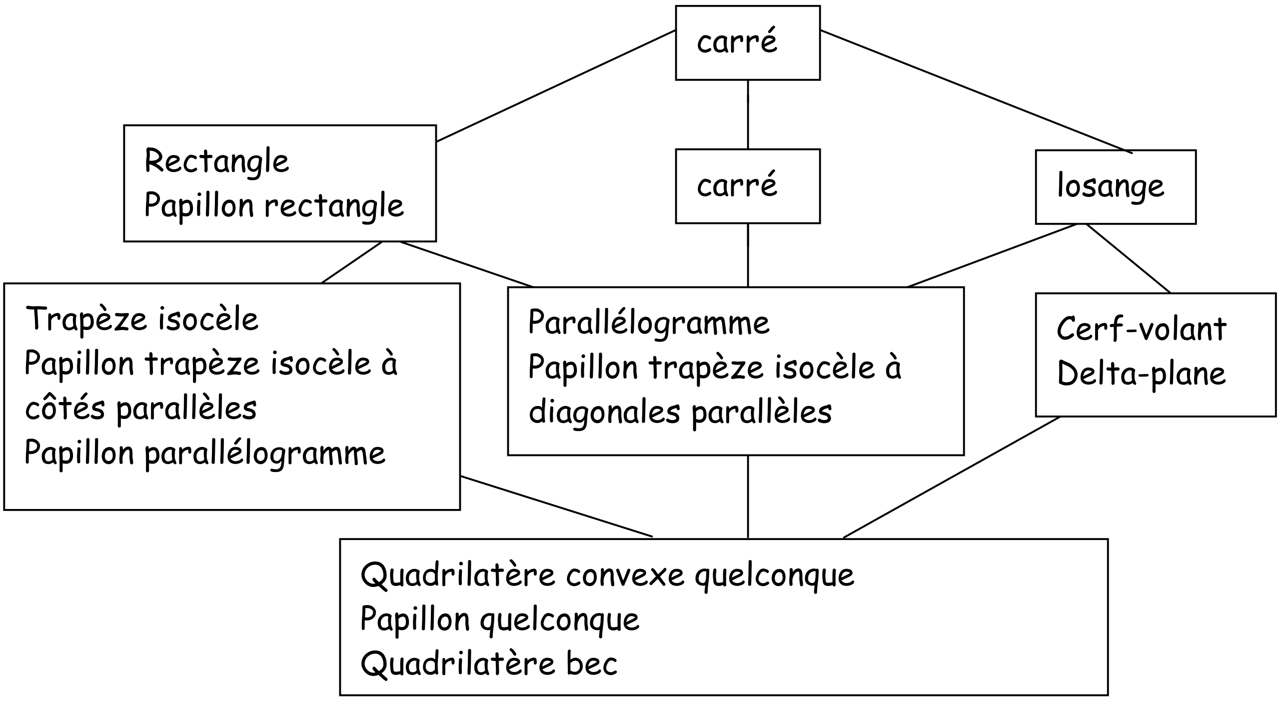
7- Représentation du groupe D_8 et de ses sous-groupes :

Les pages précédentes nous permettent de conclure que le groupe diédrique D_8 peut se représenter

a) par des symboles

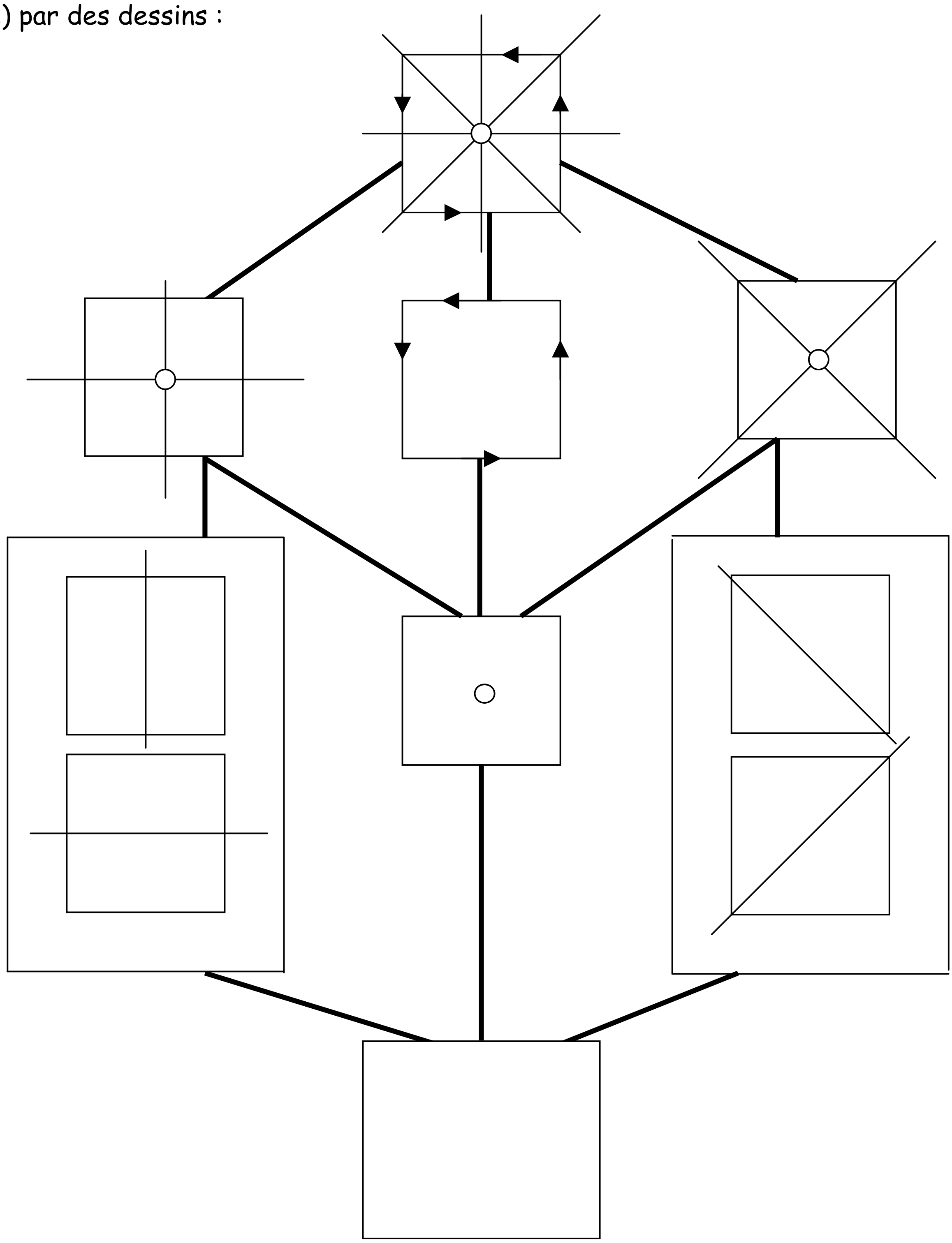


b) par des mots



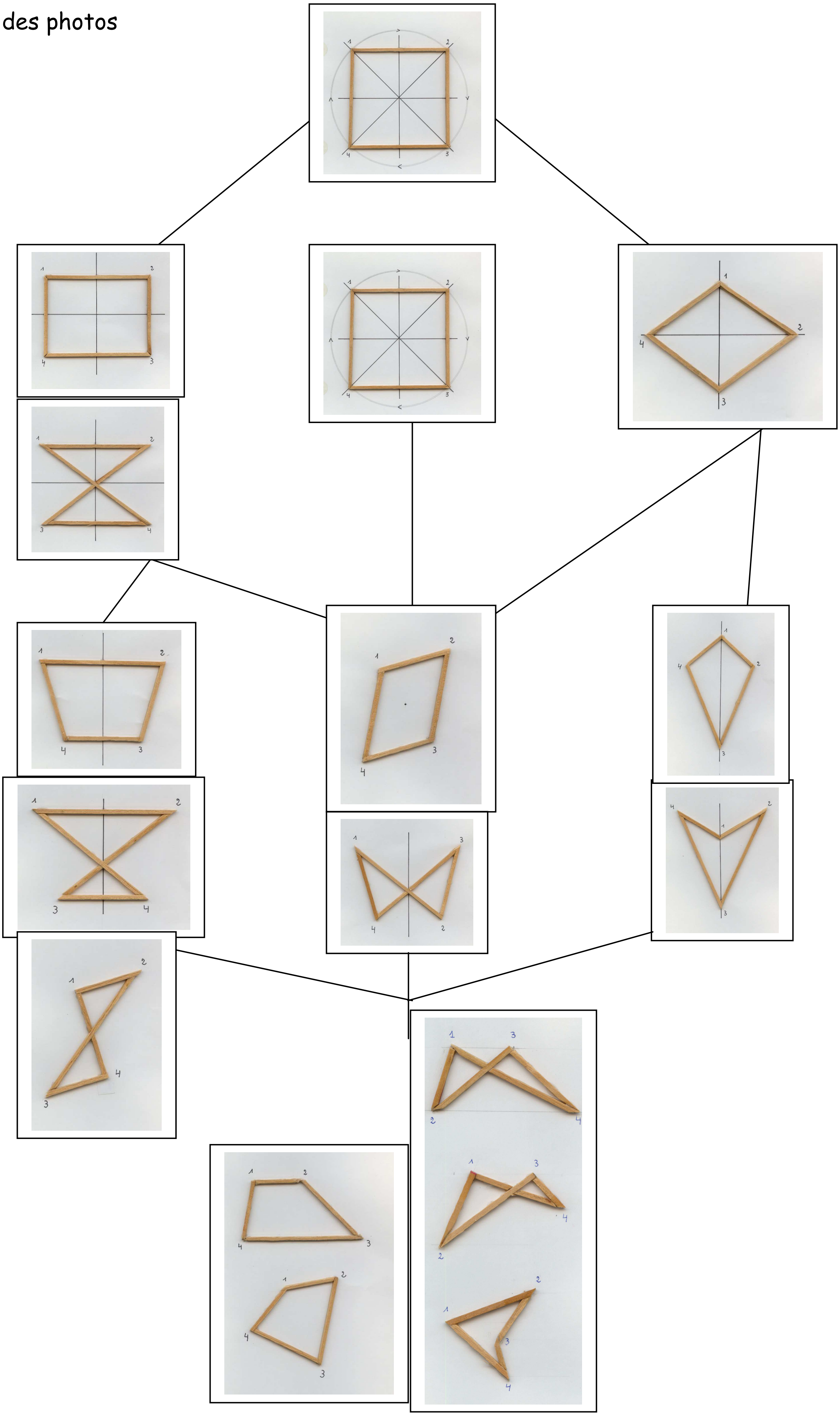
Remarquons qu'un quadrilatère de type A est déclaré cas particulier d'un quadrilatère de type B si le groupe des automorphismes du type B est sous-groupe de celui de A. Par exemple, un rectangle est un trapèze isocèle mais n'est pas un delta-plane.

c) par des dessins :

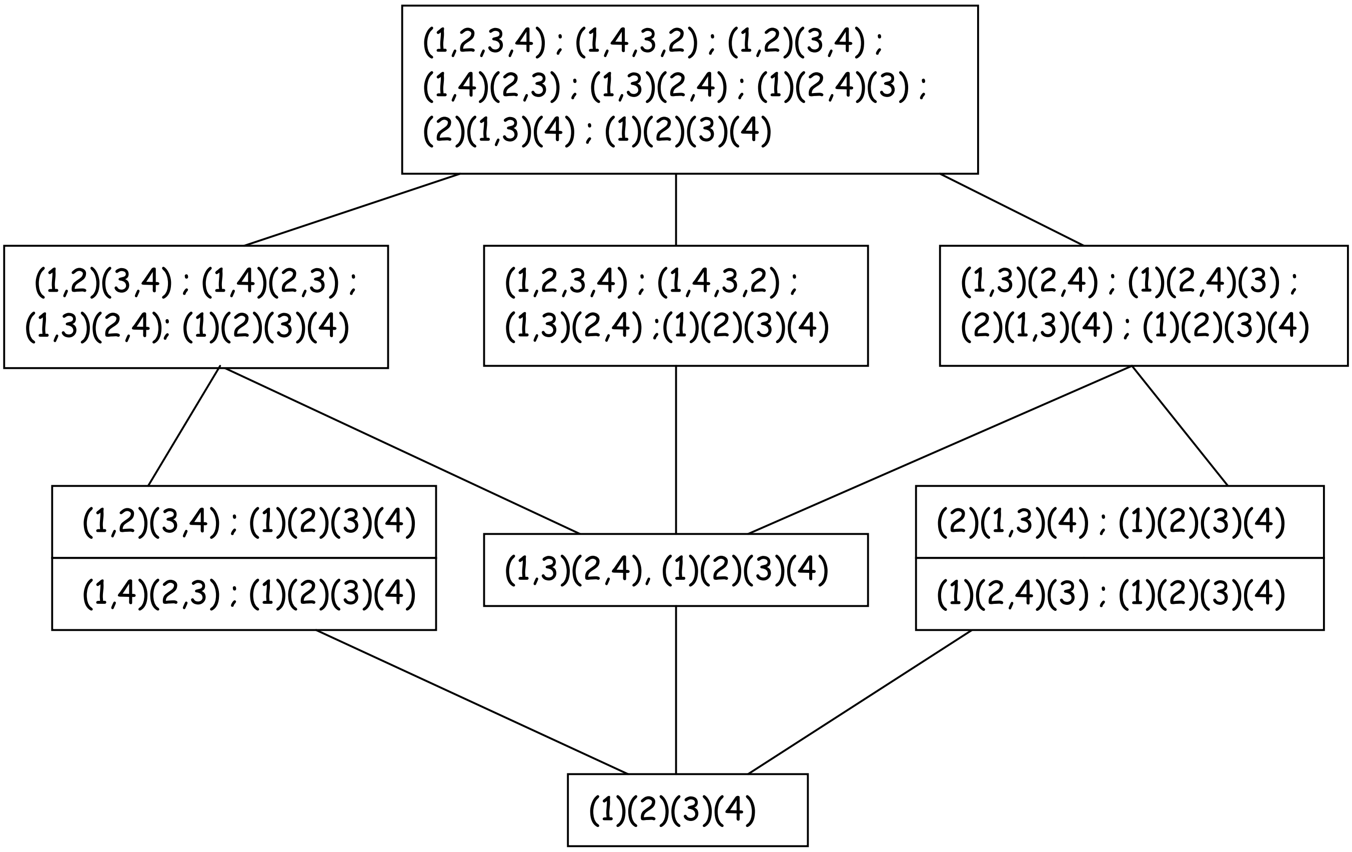


Remarques : section 5-2-1 et section 5-2-2

d) Par des photos



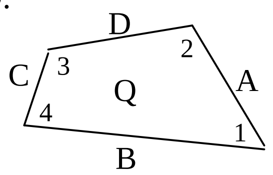
e) par des automorphismes



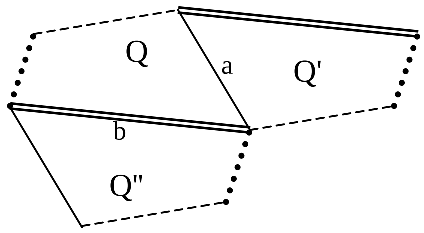
8- Un beau théorème en guise de dessert

Tout quadrilatère convexe engendre un pavage du plan

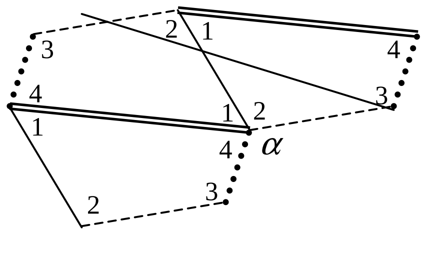
Soit Q un quadrilatère convexe quelconque d'angles de mesure 1, 2 , 3, 4 et de côtés A, B, C et D.



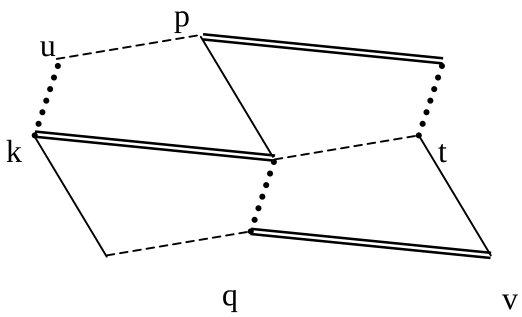
Soit a le milieu du côté A et Q' le symétrique de Q par la symétrie de centre a.
Soit b le milieu du côté B et Q'' le symétrique de Q par la symétrie de centre b.



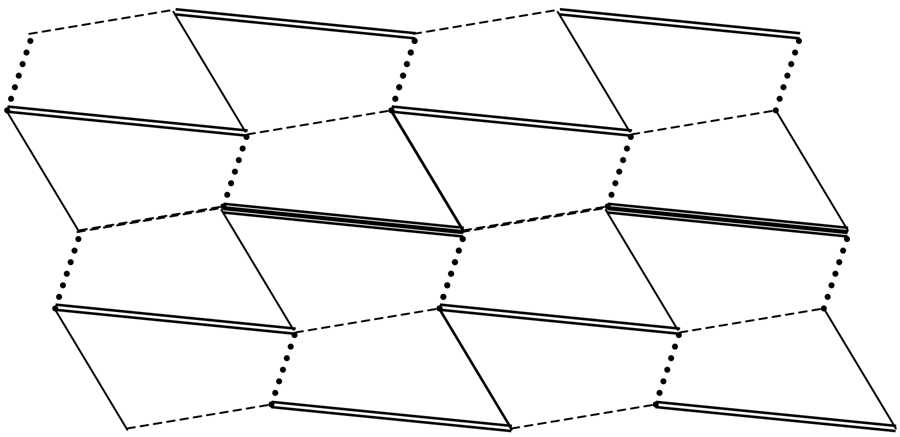
Par ces symétries les côtés du quadrilatère et leurs images sont parallèles et ont la même longueur et les angles du quadrilatère et leurs images ont la même amplitude.



L'angle α a la même amplitude que l'angle 3 car ils ont leurs côtés respectivement parallèles. On peut donc compléter notre dessin.



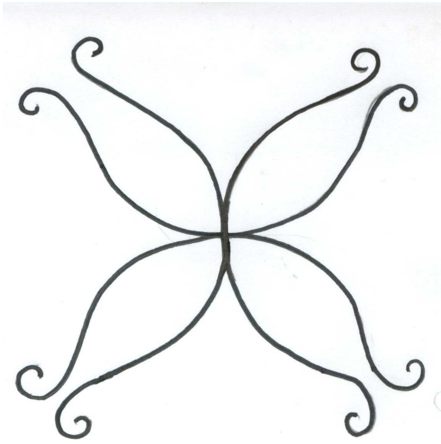
Le parallélisme des côtés et l'égalité d'amplitude des différents angles nous permet d'effectuer les translations $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{uv}$ et $\overrightarrow{kt}$ de la figure obtenue.



On peut à nouveau translater cette figure et continuer de la manière pour paver tout le plan.

9- Un deuxième dessert

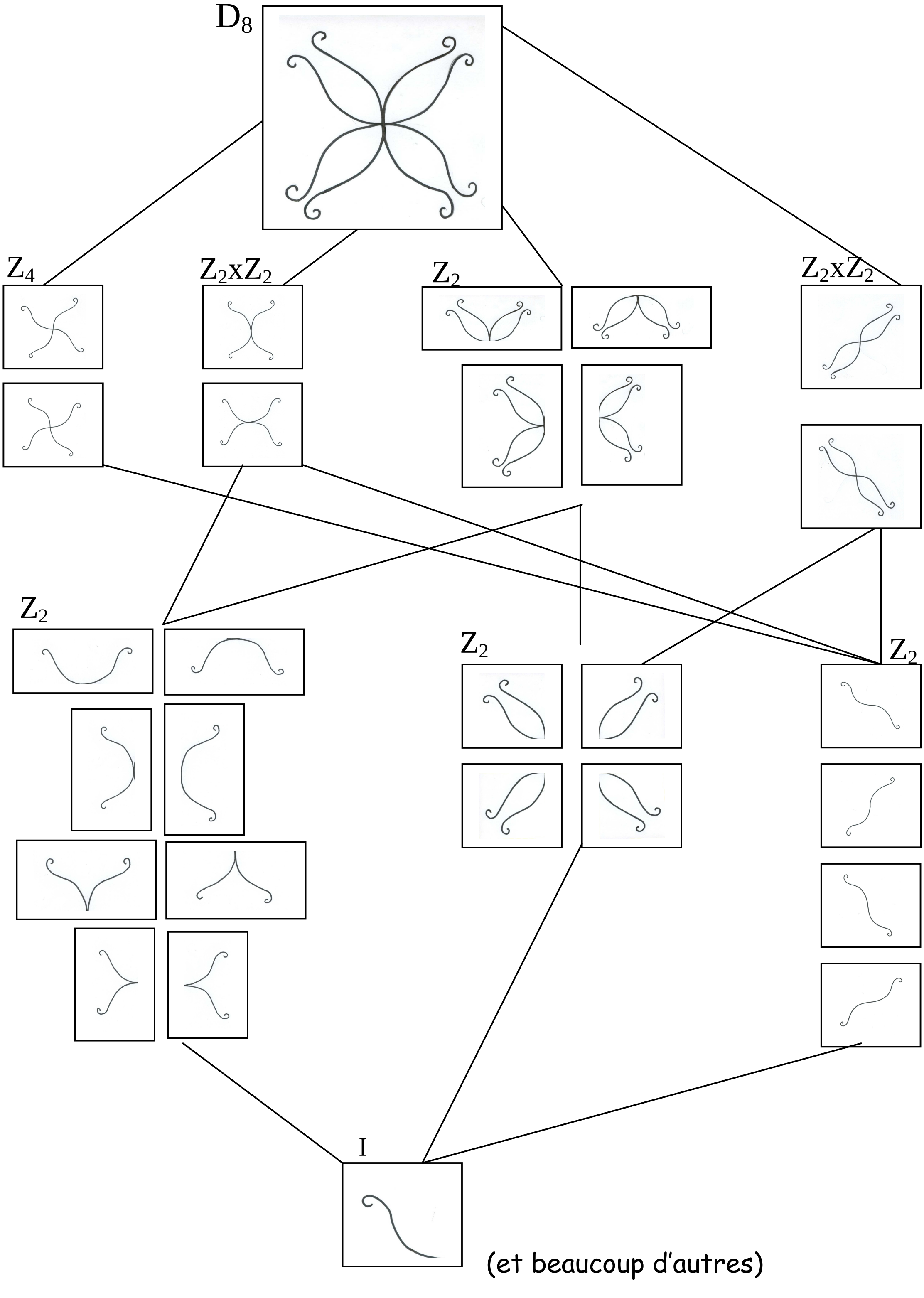
Considérons la figure suivante F



Son groupe d'automorphismes est D_8. Examinons les sous-figures de F et leur groupe d'automorphismes.

(voir figure page suivante)

A nouveau, partant du groupe D_8, nous en avons illustré ses sous-groupes. Cette méthode s'applique à n'importe quel groupe et a été utilisée notamment pour établir une classification des quadrilatères gauches (quadrilatères gauches – CeDoP)


D_8
Z_4
Z_2xZ_2
Z_2
Z_2xZ_2
Z_2
Z_2
Z_2
I
(et beaucoup d'autres)

10- Pour terminer

La notion de quadrilatères possède des liens avec de nombreux domaines que nous avons évoqués dans cet article ou que nous citons ici sans entrer dans leur étude:

- Quadrilatères gauches
- Polygones
- Quadrilatères du plan projectif, elliptique, de la sphère
- Immeubles de Tits
- Groupes de symétries
- Groupes de Coxeter
- Fondements de la géométrie
- Coordonnées; longitude - latitude
- Calcul modulo 4; enroulement de R sur le cercle
- ……….

Table des matières

Bibliographie

- [1] Francis Buekenhout, Charlotte Bouckaert, Claude Culus, Monique Frédérickx.
La fleur chinoise : un avatar du cube - 2003
Dossier du CeDoP – http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html

- [2] Olivier Keller
Aux origines de la géométrie – Le Paléolithique – Le monde des chasseurs-cueilleurs.
Vuibert – 2004

- [3] Francis Buekenhout, Jean Doyen.
Espaces euclidiens.
Presses Universitaires de Bruxelles – 1975.

- [4] Francis Buekenhout, Jean Doyen.
Ensembles structurés et groupes de symétries.
Université Libre de Bruxelles - 1982

- [5] Francis Buekenhout, Charlotte Bouckaert, Claude Culus, Monique Fréderickx, Annie Goovaerts, Jacqueline Sengier
Les quadrilatères gauches –
Dossier du CeDoP –http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html
(En préparation).

- [6] Annie Goovaerts.
Classification des quadrilatères à partir de leurs axes de symétrie. - 2006 -
Dossier du CeDoP : http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html