ULB

Annie Goovaerts
Maître-Assistant à la catégorie pédagogique de la Haute Ecole Francico Ferrer – Ecole Normale Charles Buls – De Mot.

centre de documentation pédagogique

Enseignement primaire

Classement des quadrilatères (plans) en fonction des symétries axiales orthogonales.

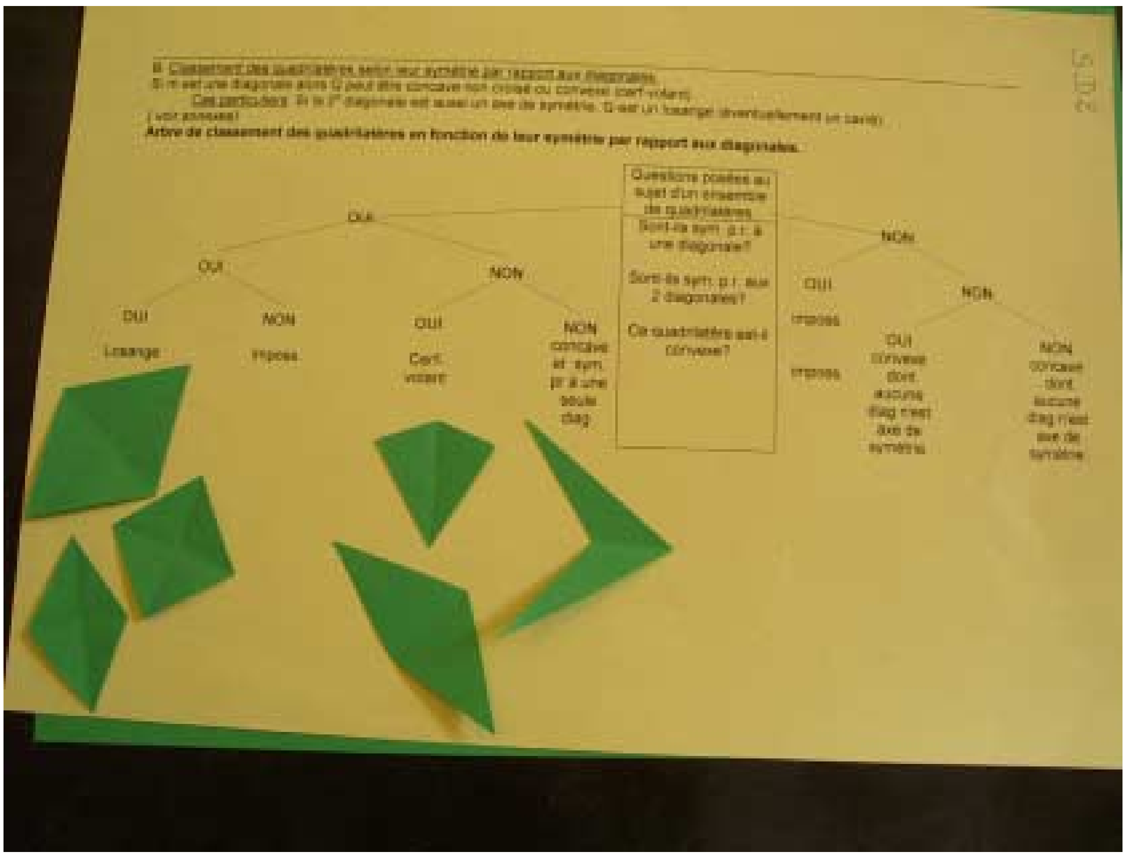
UREM – http://cso.ulb.ac.be/urem
Février 2006

Les Cahiers du CeDoP

<u>Classement des quadrilatères (plans) en fonction des symétries axiales orthogonales.</u>

Les ateliers proposés ci-dessous sont destinés à faire obtenir par des enfants du primaire, un classement des quadrilatères convexes selon leurs symétries par rapport aux diagonales ou aux médianes. Ce sont les seuls axes possibles pour des symétries de quadrilatères non croisés[1]. Cependant certaines activités permettent d'aller au-delà en envisageant des quadrilatères concaves voire croisés.

Le principe de chaque atelier est de placer l'enfant dans une situation imposant une symétrie et de retrouver les différents cas qui peuvent se présenter. Voici une photo de production que l'on peut obtenir : la partie gauche de l'arbre est celle qui nous intéresse



.

Voici les arbres de classement auxquels on aboutit, ils concernent:

- L'un les symétries orthogonales par rapport aux diagonales
- L'autre, les symétries orthogonales par rapport aux médianes

[1] La démonstration de cette propriété se trouve en annexe.

A. <u>Classement des quadrilatères selon leur symétrie par rapport aux diagonales.</u>

Si l'axe est une diagonale alors Q peut être concave non croisé (harpon) ou convexe (cerf-volant).

<u>Cas particuliers</u>: Si la 2e diagonale est aussi un axe de symétrie, Q est un losange (éventuellement un carré).

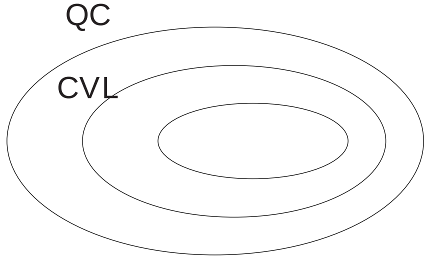
(démonstrations voir annexes)

Arbre de classement des quadrilatères en fonction de leur symétrie par rapport aux diagonales.

				Questions posées au sujet d'un ensemble de quadrilatères.			
OUI				Sont-ils sym. p.r. à une diagonale?	NON		
OUI		NON		Sont-ils sym. p.r. aux 2 diagonales?	OUI	NON	
OUI	NON	OUI	NON	Ce quadrilatère est-il convexe?	imposs.	OUI	N
Losange	imposs.	Cerf-volant	Harpon (concave)		imposs.	convexe dont aucune diag n'est axe de symétrie.	con d auc diag axe sym

Diagramme de Venn.

QC



où QC désigne l'ensemble des quadrilatères convexes,
CV désigne l'ensemble des cerfs-volants,
L désigne l'ensemble des losanges.

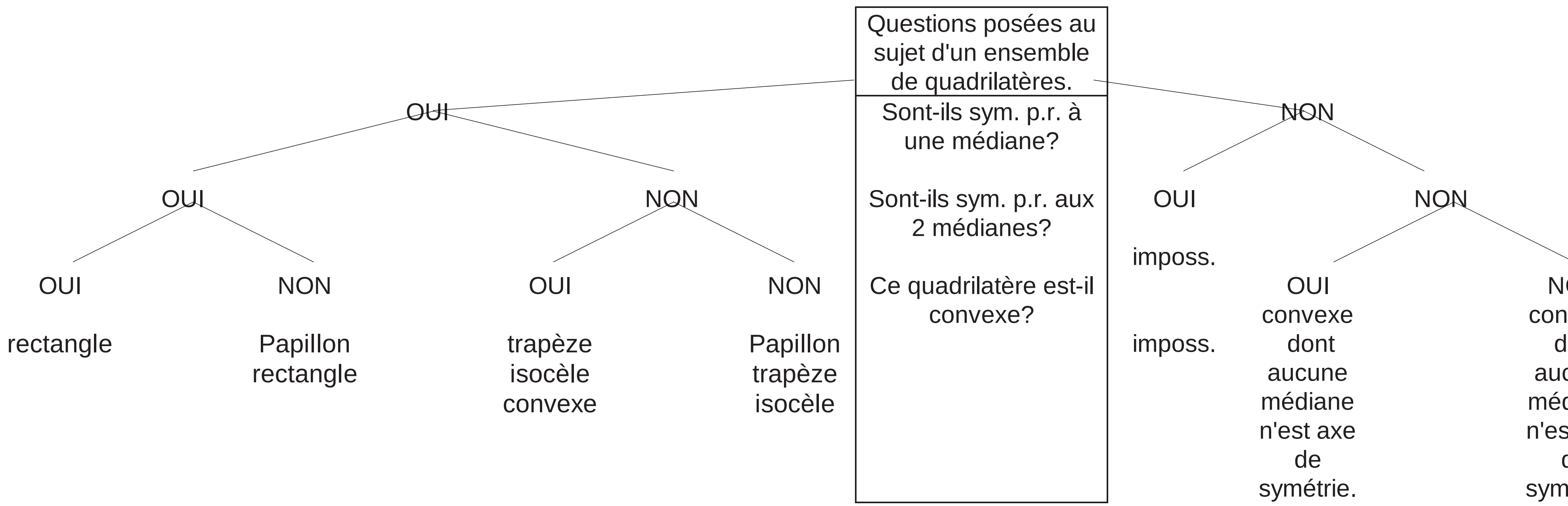
B. <u>Classement des quadrilatères selon leur symétrie par rapport aux médianes.</u>

Si l'axe est une médiane alors Q est un trapèze qui peut être croisé (papillon) ou convexe (isocèle).

Cas particulier: Si la 2e médiane est aussi un axe de symétrie, Q est un rectangle (éventuellement un carré).

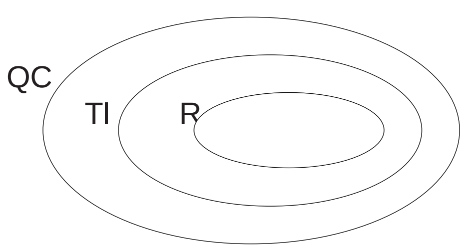
(démonstrations voir annexes)

Arbre de classement des quadrilatères en fonction de leur symétrie par rapport aux médianes.



Le papillon rectangle nécessite de redéfinir « médiane » voir rem. P7

Diagramme de Venn.



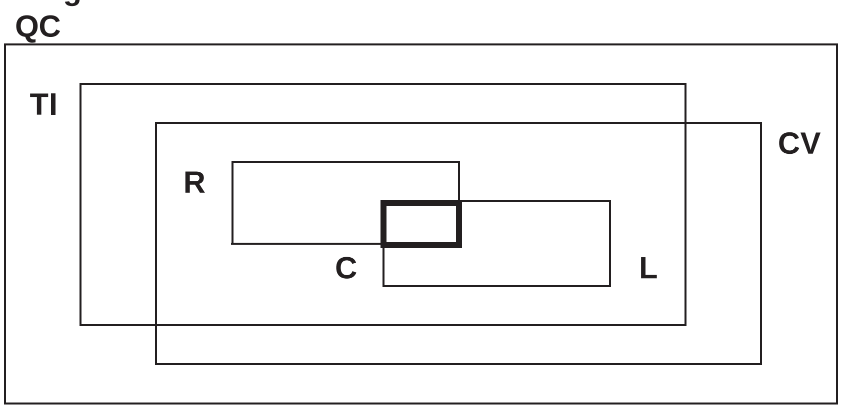
où QC désigne l'ensemble des quadrilatères convexes,
TI désigne l'ensemble des trapèzes convexes isocèles,
R désigne l'ensemble des rectangles.

C. Propriétés des quadrilatères admettant une symétrie p.r. à une médiane et une diagonale.

Si Q admet une médiane et une diagonale comme axes de symétrie, Q est un carré.

D. Conclusion.

Diagramme de Venn.



où QC désigne l'ensemble des quadrilatères convexes,
TI désigne l'ensemble des trapèzes convexes isocèles,
R désigne l'ensemble des rectangles.
CV désigne l'ensemble des cerfs-volants,
L désigne l'ensemble des losanges.
C désigne l'ensemble des carrés.

Atelier de découverte des quadrilatères symétriques.

Il est préférable d'obtenir des modèles séparés pour pouvoir les manipuler lors de la synthèse. Dans chaque groupe, les différentes observations seront mises en commun et notées sur une feuille.

A. Symétrie par rapport aux diagonales: ateliers SD1 et SD2.

SD1 et SD2 permettent de travailler individuellement, il suffit d'avoir du papier et des ciseaux.

Atelier sD1.

Plier une feuille de papier selon un pli droit et la laisser pliée.
Couper aux ciseaux à partir du pli et obliquement en formant 1 entaille rectiligne.
Ensuite couper de même une 2ème entaille qui rejoigne la 1ère en triangle.
Retirer le triangle ainsi découpé le déplier et garder la chute.
Reprendre la feuille et la déplier Faire des observations sur les figures "trou" obtenues.
Essayer d'obtenir la plus grande variété de quadrilatères et de les reconnaître.

Atelier sD2.

Reprendre les chutes gardées lors de l'atelier SD1 et vérifier si en pliant selon l'autre diagonale les deux parties de ce nouveau pli peuvent coïncider. Essayer de reconnaître la famille des quadrilatères qui ont cette propriété.

Synthèse des Ateliers SD aboutissant à l'arbre dichotomique, outil de classement.

Constatations

lors de l'atelier SD1:

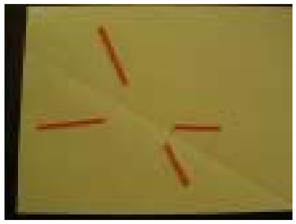
- Les figures (trou) sont des quadrilatères symétriques par rapport à une diagonale.
- Certains quadrilatères sont concaves, d'autres convexes.
- Tous ces quadrilatères ont 2 paires de côtés consécutifs de même longueur.
- Une des diagonales est la médiatrice de l'autre.

lors de l'atelier SD2:

- Ces quadrilatères sont symétriques par rapport à chacune des diagonales.
- Les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.
- Les quadrilatères symétriques par rapport aux 2 diagonales ont 4 côtés égaux, ce sont des losanges.

B. Symétrie par rapport aux médianes: ateliers SM1 et SM2.
Les élèves doivent travailler par deux, il faut des feuilles de papier blanc et des pailles de couleur, une latte et un miroir transparent[2] par paire d'élèves. Les élèves doivent s'asseoir face à face, le miroir est posé entre eux.

Atelier sm1.




Les 2 élèves placent un miroir sur une feuille de papier.
Ils coupent 2 morceaux de paille de même longueur.
L'un d'eux colle un des morceaux de paille sur la feuille sans qu'il touche le miroir.
Puis l'autre dépose le second morceau exactement sur l'image du 1er.
Quand les 2 élèves voient simultanément coïncider l'image de la paille située de leur côté du miroir avec celle située de l'autre côté, coller cette paille.
Retirer le miroir et joindre les extrémités se correspondant.
Observer la figure globale obtenue.
Essayer d'obtenir la plus grande variété de quadrilatères.
Faire des observations sur les quadrilatères obtenus.

Atelier sm2.

Reprendre les quadrilatères obtenus en SM1.
Chercher à les placer sous le miroir pour que les côtés tracés coïncident.
Quand les 2 élèves voient simultanément coïncider l'image du quadrilatère situé de leur côté du miroir avec le quadrilatère situé de l'autre côté, isoler ce quadrilatère.
Observer ces quadrilatères.

Synthèse des Ateliers SM1 et SM2.

Remarque préliminaire:
Les quadrilatères auxquels nous nous sommes intéressés sont convexes.

Constatations

lors de l'atelier SM1:
- Les figures sont des quadrilatères symétriques par rapport à une médiane.
- Tous ces quadrilatères ont 2 paires de côtés parallèles (côtés tracés); ce sont des trapèzes isocèles (convexes).

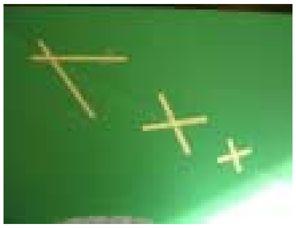
lors de l'atelier SM2:
- Ces quadrilatères sont symétriques par rapport à chacune des médianes.

[2] Voir annexes

- Ils sont obtenus quand les pailles sont parallèles au miroir, donc perpendiculaires au côté tracé.
- Ce sont des rectangles (éventuellement carrés).
- Les médianes se coupent perpendiculairement en leur milieu.

Conclusion:
On aboutit à l'arbre dichotomique (voir théorie) limité au cas des quadrilatères convexes qui sera un outil de classement.

Remarque : si on fait passer sous le miroir, les pailles (ou des bandelettes de papier plus plates que les pailles), il est possible de faire entrer les Q croisés dans le classement .
En SM1, il s’agit de papillons dont l’enveloppe convexe est un trapèze isocèle.
En SM2, il s’agit de papillons dont l’enveloppe convexe est un rectangle (éventuellement carré). Ceci demande de préciser la définition de « médiane » En effet, quand les côtés se croisent en leur milieu, la médiane est indéterminée. On peut dans ce cas, convenir d’appeler médiane la droite passant par le point d’intersection et perpendiculaire aux diagonales.



C. Symétrie par rapport à une diagonale et une médiane:

Activité semblable à celle de l'atelier SM2.
Reprendre les chutes de l'atelier SD1 et chercher à placer le miroir autrement que sur une diagonale.

Synthèse de l'atelier.

Les quadrilatères sont symétriques par rapport à une diagonale, ils ont donc 2 paires de côtés égaux consécutifs.
Les quadrilatères sont symétriques par rapport à une médiane, ils ont donc 2 côtés parallèles (trapèzes).
On constate que les quadrilatères sont tous des carrés. Il y a donc 4 axes de symétrie: les diagonales et les médianes.

Bibliographie

Classification objective des quadrilatères. Francis Buekenhout, Charlotte Bouckaert, Claude Culus, Monique Frédérickx. UREM Les Cahiers du CeDoP. Août 2005.

Annexe 1 : note concernant les miroirs.

Les miroirs que nous avons utilisés sont en fait des plaques rectangulaires de plexiglace. Ils permettent à la fois de voir l'image des objets situés entre le miroir et l'observateur et de voir les objets situés de l'autre côté par transparence.
Pour les rendre stables et verticaux, ils sont glissés dans des fentes pratiquées dans 2 petits blocs de bois.

Annexe 2 : variante des ateliers SD1 et SD2.

Cette variante non expérimentée oblige à travailler par deux. Il faut des feuilles de papier blanc et de papier couleur, des ciseaux, une latte et un miroir transparent[3] par paire d'élèves. Les élèves doivent s'asseoir face à face, le miroir est posé entre eux.

Atelier sD3.

Découper, dans du papier (de couleur) deux triangles (ou angles) superposables.
Coller l'un d'eux sur une feuille blanche et amener un côté du triangle le long du miroir. (poser le miroir pour couper les côtés de l'angle en dehors du sommet)
Poser le 2e triangle (angle) sur la feuille blanche en le faisant coïncider avec l'image du 1er. Quand les 2 élèves voient simultanément coïncider l'image du triangle (de l'angle) situé de leur côté du miroir avec le triangle (l'angle) situé de l'autre côté, coller ce 2e triangle (angle). Observer la figure globale obtenue.
Essayez d'obtenir la plus grande variété de quadrilatères.

Atelier sD4.

Découper deux triangles isocèles superposables dans du papier de couleur et procéder comme en SD3
Poser l'un de ces triangles sur une feuille blanche et le miroir sur la **base** du triangle.
Poser l'autre triangle sur l'image du 1er de façon à ce qu'il coïncide exactement avec celle-ci.
Essayez d'obtenir la plus grande variété de quadrilatères et les observer.

Synthèse.

lors de l'atelier SD3:
Même synthèse que pour SD1.
Remarques: .(à justifier)

- Si on pose le miroir le long d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, on n'obtient pas un quadrilatère. On élimine ces figures.
- Si le miroir est adjacent à un angle obtus le quadrilatère obtenu est concave.
- Si le miroir est adjacent à deux angles aigus, le quadrilatère obtenu est convexe.

lors de l'atelier SD4:
Même synthèse que pour SD2.
Remarques:
Tous les quadrilatères obtenus sont convexes (justifier).
Certains losanges sont des carrés (cas de 2 triangles rectangles isocèles)

---

[3] Voir annexe 1

Dans ce cas le miroir a été posé sur l'hypoténuse.

Annexe 3 : Démonstrations.

Propriété 1.

Si Q est un quadrilatère (ABCD)et m un axe de symétrie de ce quadrilatère, m est soit une diagonale, soit une médiane, soit la médiatrice des 2 diagonales.

Démonstration par cas:

Comme 3 sommets ne peuvent être alignés, il y a 3 cas:

1°) Un sommet fixe: Sm(A)=A $\Rightarrow$A$\in$ m.

Sm(B)=B est impossible car si B$\in$ m, c$\notin$ m (3 sommets ne peuvent être alignés) dès lors, comme Sm(C)= D$\Rightarrow$Sm[BC]=[BD] or [BC]=côté, [BD]=diagonale.

Sm(B)=C est impossible car on aurait Sm[AB]=[AC] or [AB]=côté, [AC]=diagonale

Sm(B)=D est possible exemple voir analyse du cas.

2°) Echange de deux sommets consécutifs: Sm(A)=B [le cas Sm(A)=D est équivalent]

Sm (C)=C est impossible car on aurait Sm[AC]=[BC] or [BC]=côté, [AC]=diagonale

Sm (C)=D est possible exemple voir analyse du cas.

3°) Echange de deux sommets opposés: Sm(A)=C.

On peut avoir Sm(B)=B ou Sm(B)=D exemples voir analyse des cas.

CQFD.

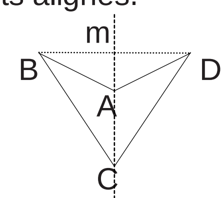
Propriété 2: Analyse des cas possibles parmi les précédents.

1°) Sm(A)=A et Sm(B)=D$\Rightarrow$ Sm (C)=C: **m est une diagonale**

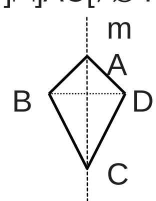
envisageons les positions de [BD] par rapport à [AC].

[BD]$\cap$[AC]$\neq${A} et [BD]$\cap$[AC]$\neq${C} sinon 3 sommets alignés.

Si [BD]$\cap$[AC]=$\varnothing$: Q est concave non croisé.



Si [BD]$\cap$]AC[$\neq\varnothing$': Q est convexe.(cerf-volant)



Cas particulier: cas du losange (év^t carré)

si BD médiatrice de [AC]

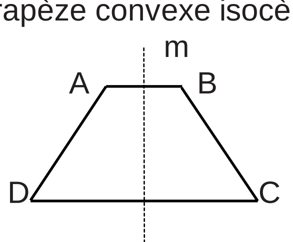
Les 2 diagonales sont des axes.

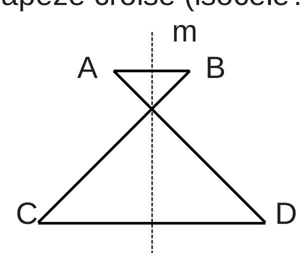
2°) Sm(A)=B et Sm (C)=D.

$\Rightarrow$m est médiatrice à la fois de [AB] et de [CD]$\Rightarrow$AB//CD$\Rightarrow$**m est une médiane**

$\Rightarrow$Q est un trapèze de bases [AB] et [CD], les côtés latéraux sont isométriques.

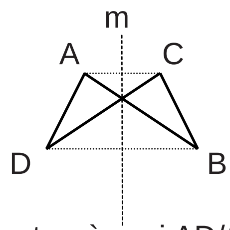
Trapèze convexe isocèle ou trapèze croisé (isocèle?)





Cas particulier du rectangle(év^t carré).

3°)le cas Sm(B)=B est identique au 1° où **m est une diagonale**.
Sm(A)=C et Sm(B)=D⇒ **m est médiatrice des 2 diagonales.**
Q est croisé et (ACBD) est un trapèze isocèle convexe.
Ex:



Cas particulier: trapèze si AD//BC.

CQFD.

A. Classement selon les diagonales.

Si AC est une diagonale axe de symétrie.

Si Q est concave, Q est formé de 2 triangles isométriques (ADC) et ABC). obtusangles

Si Q est convexe, Q est formé de 2 triangles isométriques (ADC) et ABC) acutangles ou rectangle (dans ce cas l'angle droit est nécessairement en D et en B).
Si les triangles (ADC) et ABC) sont isocèles de base [AC], Q est un losange et la 2^e diagonale est aussi un axe de symétrie.(le cas particulier du carré sera traité plus loin)

B. Classement selon les médianes.

Si m est une médiane.

Si Q est convexe, Q est un trapèze isocèle.
En particulier, si l'autre médiane est aussi un axe de symétrie, Q est un rectangle.

Si Q est croisé, les côtés croisés sont isométriques et se coupent sur l'axe.
En particulier, si les côtés croisés se coupent en leur milieu, la 2^e médiane est indéterminée. Cependant la médiane perpendiculaire à m est un 2^e axe de symétrie.

Propriété C:

Si Q admet une médiane et une diagonale comme axe de symétrie, Q est un carré.

Démonstration:
Soit la diagonale d=AC et la médiane m relative au côtés [AB] et [DC] deux axes de symétrie de Q=(ABCD).
On sait par la démonstration de la propriété 1 que Sd(A)=A; Sd(C)=C (cas 1°)
et Sm(A)=B, Sm(D)=C (cas 2°)
Par conséquent:

Par le 1°):	Sd[AB]=[AD]⇒|AB|=|AD|	|	
	Sd[BC]=[DC]⇒|BC|=|DC|	|	
		|	⇒ Q est un losange.
Par le 2°):	Sm[AD]=[BC]⇒|AD|=|BC|	|	
	Sm[BC]=[AD]⇒|BC|=|AD|	|	

De plus:
Par le 2°) Sm(DÂB)=(CBA) ⇒ ces 2 angles ont même amplitude et sont consécutifs dans le losange Q ⇒ ce sont des angles droits.
Q est un losange ayant des angles droits, c'est un carré.

CQFD.