ULB

PROBLEMATHS

23 décembre 2011

Voici les solutions des Problemaths 7, 8, 9. Les prochains énoncés paraîtront au début de février 2012, après la session des examens de janvier.

<u>**Solution du Problemath 7**</u>.

L'équation peut s'écrire $x = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1}$ ou encore, en posant $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}, x = f(f(x))$. La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les équations $x = f(f(x))$ et $x = f(x)$ sont équivalentes. En effet, toute solution de $f(x) = x$ est trivialement une solution de $f(f(x)) = x$. Réciproquement, soit x_o une solution de $f(f(x)) = x$. Si $f(x_o) > x_o$, alors $f(f(x_o)) > f(x_o)$ par la stricte croissance de f, donc $f(f(x_o)) > x_o$, ce qui contredit la définition de x_o. Il en est de même si $f(x_o) < x_o$. Donc x_o est solution de $f(x) = x$.

En conclusion, l'équation donnée se réduit à $x = \sqrt[3]{2x-1}$, c'est-à-dire $x^3 - 2x + 1 = 0$, équivalente à $(x-1)(x^2+x-1) = 0$, dont les racines sont 1 et $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, c'est-à-dire $1, -\varphi$ et $1/\varphi$ (où φ est le nombre d'or).

<u>Ont fourni une solution correcte</u>: L. SCHOPEN (élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), M. BADALYAN, K. BARIGOU, R. WALRAVENS (BA2 maths), A. DUJARDIN (BA2 polytech), C. ANTONY, N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), M. LEOTARD (prof d'économie), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et l'Empereur Palpatine (personnage de Star Wars).

<u>**Solution du Problemath 8**</u>.

Une telle ligne polygonale existe si et seulement si n est pair ≥ 4 ou impair ≥ 7. Si n est pair ≥ 4, posons $n = 2t+2$ avec $t \geq 1$. Il suffit de construire dans un plan un zigzag à côtés consécutifs perpendiculaires ayant t côtés de longueur 1, de prendre l'image de ce zigzag par une translation de vecteur unité perpendiculaire au plan, puis de joindre les débuts et les fins de ces deux zigzags par des segments de longueur 1.

Pour $n = 3$, une telle ligne polygonale n'existe évidemment pas puisqu'un triangle équilatéral n'a pas de côtés perpendiculaires. Le problème est nettement plus difficile pour n impair≥ 5. Voici la preuve élégante de non existence donnée par Cédric DE GROOTE pour $n = 5$. Si $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5$ sont les sommets consécutifs d'une telle ligne polygonale, on ne restreint pas la généralité en supposant que $s_1 = (0,0,0),\ s_2 = (1,0,0)$ et $s_3 = (1,1,0)$. Comme $s_2\ s_3$ doit être perpendiculaire à $s_3\ s_4$ et que s_4 doit être à distance 1 de s_3, le sommet s_4 est nécessairement sur le cercle d'intersection du plan $y = 1$ avec le cylindre $(x-1)^2 + z^2 = 1$. De même, s_5 est sur le cercle d'intersection du plan $x = 0$ avec le cylindre $y^2 + z^2 = 1$. Comme $s_4\ s_5$ doit être perpendiculaire à $s_3\ s_4$ et à $s_5\ s_1$, la droite $s_4\ s_5$ est tangente à chacun de ces deux cylindres et par conséquent elle se trouve dans un plan tangent à ces deux cylindres. Un tel plan est nécessairement horizontal d'équation $z = 1$ ou $z = -1$. Les sommets s_4 et s_5, intersections d'un de ces plans avec les deux cercles mentionnés plus haut, sont donc soit $s_4 = (1,1,1)$ et $s_5 = (0,0,1)$, soit $s_4 = (1,1,-1)$ et $s_5 = (0,0,-1)$. Dans les deux cas, la distance de s_4 à s_5 ne vaut pas 1, d'où la contradiction.

Pour $n = 7$, une telle ligne polygonale existe bel et bien, contrairement à ce que beaucoup ont cru! Cédric DE GROOTE et François THILMANY en ont donné la construction suivante. Posons $s_1 = (0,0,0),\ s_2 = (0,1,0),\ s_3 = (-a,1,b),\ s_5 = (1+a,1,b),\ s_6 = (1,1,0)$ et $s_7 = (1,0,0)$, où $a = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ et $b = \sqrt{1-a^2}$. On vérifie facilement que les distances $|s_1\ s_2|,|s_2\ s_3|,|s_5\ s_6|,|s_6\ s_7|$ et $|s_7\ s_1|$sont toutes égales à 1, avec $s_3\ s_2 \perp s_2\ s_1 \perp s_1\ s_7 \perp s_7\ s_6 \perp s_6\ s_5$. Comme $|s_3\ s_5| = \sqrt{2}$, on peut construire, dans le plan $y = 1$, un triangle rectangle isocèle $s_3\ s_4\ s_5$ dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$ et dont les deux côtés de l'angle droit sont de longueur 1, le sommet s_4 étant au dessus de l'hypoténuse. Si on prouve qu'on peut faire tourner ce triangle autour de son hypoténuse de façon à ce que la mesure α de l'angle $\widehat{s_4\ s_5\ s_6}$ (égale à celle de l'angle $\widehat{s_2\ s_3\ s_4}$) soit $90°$, la ligne polygonale $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7$ aura les propriétés requises. Au départ, $\alpha >\ 90°$. Après une rotation de $180°$ autour de $s_3\ s_5$, $\alpha <\ 90°$. Comme α varie de manière continue pendant cette rotation, le théorème de la valeur intermédiaire permet de conclure.

Si n est impair ≥ 7 posons $n = 2t + 5$ avec $t \geq 1$. Dans la ligne polygonale à $2t + 2$ sommets construite au début, effaçons un des segments joignant les extrémités des deux zigzags. Il reste une ligne polygonale à

$2t+2$ sommets et $2t+1$ côtés dont on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les deux premiers sommets sont $s_2\ s_1$ et les deux derniers $s_7\ s_6$ (avec les notations adoptées dans l'exemple à 7 sommets). Il suffit alors de fermer cette ligne polygonale avec les 4 nouveaux côtés $s_2\ s_3$, $s_3\ s_4$, $s_4\ s_5$ et $s_5\ s_6$ pour obtenir un exemple où $n = 2t+5$.

Ont fourni une solution correcte: M. BADALYAN, R. WALRAVENS (BA2 maths), C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), O. DECKERS (prof de maths) et l'Empereur Palpatine.

Solution du Problemath 9.
Si les nombres premiers p et q ont la même parité, alors $p^q + q^p$ est pair > 2, donc non premier. Par symétrie, on peut donc supposer que p est pair (c'est-à-dire $= 2$) et q impair, et on est ramené à trouver tous les nombres premiers impairs q tels que $2^q + q^2$ est premier. Si $q = 3$, $2^3 + 3^2 = 17$ est premier. Si $q > 3$, alors $q \equiv +1$ ou $-1 (\text{mod } 3)$, donc $q^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$. D'autre part, comme $2 \equiv -1 (\text{mod } 3)$, $2^q \equiv (-1)^q \equiv -1 (\text{mod } 3)$ car q est impair. On en déduit que $2^q + q^2 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$ est divisible par 3 et > 3, donc n'est pas premier. En conclusion, la seule solution du problème est $2^3 + 3^2 = 17$.

Ont fourni une solution correcte: L. SCHOPEN (élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), N. DWEK, P. TRANCHIDA, M. TSISHYN (élèves de 6ème à l'Athénée Catteau), M. BADALYAN, K. BARIGOU (BA2 maths), V. SCHMIDT (BA2 physique), A. DUJARDIN (BA2 polytech), C. ANTONY, N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), D. BERTRAND (BA3 math à l'UCL), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), M. LEOTARD (prof d'économie), F. DOIGNIE (ingénieur), E. KRIECKHAUS (directeur du dépt de maths à l'Ecole Internationale de Bruxelles), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), Lady Belmath, L. ELFAL et l'Empereur Palpatine

Toute l'équipe Problemath vous souhaite de bonnes fêtes de fin d'année!

Adieu $1 \times 2345 \times 6/7 - 8 + 9$

Bonjour $1234 - 5 - 6 + 789$