**PROBLEMATHS**
6 février 2012

Voici les énoncés des 4 derniers Problemaths de cette année académique:

## Problemath 10.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, un parallélépipède rectangle est dit ahurissant si la somme des aires de ses faces est égale à son volume (exemple : le parallélépipède $3 \times 10 \times 15$). Quels sont tous les parallélépipèdes rectangles ahurissants à côtés de longueurs entières?

## Problemath 11.

Bob informe Alice qu'il a choisi en secret un polynôme $p(x)$ dont tous les coefficients sont des entiers $\geq 0$. Chaque fois qu'Alice propose à Bob un entier $n \geq 0$, Bob lui fournit en retour la valeur de $p(n)$. Quel est le plus petit nombre d'entiers qu'Alice doit proposer successivement à Bob afin de pouvoir reconstituer à coup sûr le polynôme inconnu $p(x)$?

## Problemath 12.

Quatre droites du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, se coupant deux à deux en 6 points distincts, sont parcourues chacune par un point mobile. Les vitesses de ces 4 mouvements sont constantes sur chaque droite, mais peuvent différer d'une droite à l'autre.
Sachant que 5 des 6 paires de points mobiles vont se rencontrer, peut-on en conclure qu'il en sera de même pour la sixième paire?

## Problemath 13.

Une équipe de 20 candidats participe à un jeu télévisé en studio. Chacun d'eux porte un tee-shirt avec un numéro de 1 à 20 (tous les numéros sont différents). Dans une pièce voisine se trouvent 20 boîtes identiques alignées sur une longue table et également numérotées de 1 à 20. Un huissier a distribué aléatoirement les 20 numéros des candidats dans ces 20 boîtes. Les candidats sont envoyés un à un dans cette pièce, où ils peuvent ouvrir au maximum 10 boîtes parmi les 20 et regarder le numéro se trouvant à l'intérieur, après quoi ils quittent la pièce par une autre porte sans aucune possibilité de communiquer avec les candidats restants ou de laisser un signe quelconque sur les boîtes ou dans la pièce. L'huissier referme alors les boîtes ouvertes et fait entrer le candidat suivant. L'équipe est déclarée gagnante si et seulement si chacun des 20 candidats a ouvert la boîte contenant son numéro.
Si chaque condidat ouvre ses boîtes au hasard, la probabilité que l'équipe gagne vaut évidemment $(1/2)^{20} = 0,00000095\ldots$
Avant le début du jeu, l'équipe convient d'adopter la stratégie suivante. Lorsqu'il entre dans la pièce, chaque candidat ouvre d'abord la boîte qui porte le numéro écrit sur son tee-shirt, et il regarde le numéro se trouvant dans cette boîte. Si c'est le numéro figurant sur son tee-shirt, il sort de la pièce. Sinon, il ouvre la boîte dont le numéro est celui qu'il a trouvé dans la première boîte. Si le numéro se trouvant dans cette deuxième boîte est celui de son tee-shirt, il sort. Sinon, il ouvre la boîte dont le numéro est celui qu'il a trouvé dans cette deuxième boîte, etc ... Ils sort de la pièce dès qu'il a trouvé son numéro ou dès qu'il a ouvert 10 des 20 boîtes.
Que vaut (avec 4 décimales exactes) la probabilité que l'équipe gagne le jeu si elle adopte cette stratégie?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 16 mars à 14 heures

*"Mon travail a toujours consisté à unir la vérité et la beauté, mais quand j'ai eu à choisir l'une ou l'autre, j'ai toujours choisi la beauté"(Hermann Weyl, un des grands mathématiciens du 20ème siècle).*