Francis Buekenhout,
Monique Frédérickx

Orientation

UREM

Les Cahiers du CeDoP

centre de documentation pédagogique

ORIENTATION

1. Introduction

Nous présentons un texte mis au point en 1986 dans le cadre de la rédaction d'un manuel de cinquième (voir [2]). Ce texte fut enseigné tel quel par Monique Frédérickx durant une dizaine d'années à l'Athénée Royal Riva Bella de Braine l'Alleud et ensuite dans son cours de Géométrie à la Division préparatoire de l'Ecole Royale Militaire.

En 1986, l'inspiration et les fabuleux dessins furent obtenus dans le cours de Géométrie de Buekenhout et Doyen [1] enseigné en première année de mathématique et physique de 1971 à 2002. Les dessins avaient été empruntés à la célèbre chronique de Martin Gardner pour le Scientific American. On en retrouve la trace dans [4].

La matière présentée requiert peu d'heures et peu de prérequis. Il convient d'être quelque peu familier avec les notions de symétrie orthogonale, de symétrie centrée, de déplacement et d'isométrie dans l'espace.

Notre texte possède un compagnon récent [3] qui présente un développement théorique de la chiralité. Dans un développement épistémologique, notre texte précéderait [3]. Dans un développement théorique mathématique, notre texte offre un champ d'application à [3].

2. Gauche, droite

Certaines figures de l'espace E^3 se présentent sous deux formes isométriques mais non superposables par déplacement comme une main gauche et une main droite. C'est le cas de molécules extrêmement complexes rencontrées en biologie, comme l'ADN et les protéines. C'est le cas des chromosomes et des gênes et parfois, de molécules beaucoup plus simples mises en évidence par Pasteur dès le 19^e^ siècle. D'autres figures, notamment les plus courantes en géométrie n'ont pas cette particularité.

Nous dirons qu'une **figure** de E^3 est **orientée** s'il existe une image de F par une isométrie i(F) qui n'est pas superposable à F par un déplacement. Si au contraire, toute image isométrique i(F) est superposable à F par un déplacement, nous dirons que F est **non-orientée**. Par exemple, une main est orientée, une sphère est non-orientée.

Remarque :

Nous nous abstenons d'utiliser le mot **orientable** et nous invitons le lecteur à la prudence. Si une figure mérite d'être orientable, elle n'est certainement pas orientée. Le mot orientable serait-il dès lors synonyme de non-orienté ? Oui. Il convient, croyons-nous, de ne pas développer la confusion au niveau ou nous nous situons.

Exercices :

1. a) Passez en revue des figures connues et décidez si elles sont orientées ou non-orientées (exemples : sphère, cylindre, plan, hélice, pyramide oblique, cylindre oblique, parallélépipède à côtés non perpendiculaires, modèles de polyèdres, modèles de molécules…).
   b) Décrire 5 figures orientées, n'apparaissant pas dans la liste précédente.

c) Apportez en classe des figures orientées et une de leurs images isométriques non superposables par déplacement.
d) Construire des modèles de figures orientées.

2. a) A votre avis, quelle est la situation la plus fréquente pour une figure de l'espace : être orientée ou non-orientée ?
b) Et qu'en est-il pour les objets fabriqués par l'Homme ?
c) Le corps humain est–il orienté ou non-orienté ?

3. Une figure F est constituée par AUB où A est une figure orientée et B est l'image de A par une symétrie orthogonale. La figure F est-elle orientée ?

3. Comprendre la gauche et la droite

Considérons deux figures F et F' isométriques mais non superposables par déplacement. Nous dirons alors qu'elles ont une **orientation différente**.

Si G est une figure isométrique à F peut-on affirmer que G est superposable à F ou à F' par un déplacement ?

On a F'= = r(F) où r est un retournement et G = i(F) où i est une isométrie. Comment passe-t-on de F' à G ? Par $i \circ r^{-1}$ tout simplement.

En effet, $i \circ r^{-1}(F') = i(F) = G$. Si i est un retournement, F' est superposable à G et si i est un déplacement, F est superposable à G. Nous avons démontré le

Théorème :
Si F est une figure orientée, les figures isométriques à F se répartissent en deux ensembles disjoints Φ et Φ ' :
Toutes les figures appartenant à Φ sont superposables entre elles par un déplacement, de même que celles appartenant à Φ '. Toute figure de Φ est applicable sur une figure de Φ ' par un retournement.

Ceci explique le phénomène constitué de mains gauches et de mains droites. Nous pouvons décider que les membres de Φ sont appelés **droits** et les membres de Φ **',** **gauches** ou le contraire.

Il faut bien comprendre que les figures gauches et les figures droites ont les mêmes propriétés intrinsèques. Ce sont les couples de figures qui sont différenciées par le caractère gauche ou droit. La structure du corps humain est largement, mais non totalement, non-orientée. Ceci explique nos difficultés à distinguer la gauche de la droite.

Il existe des molécules qui se présentent sous une forme gauche et sous une forme droite. Cette particularité joue un grand rôle dans l'industrie pharmaceutique. La forme gauche peut parfois être produite par le corps humain sans que la forme droite le soit. Mais cette dernière peut s'avérer efficace comme médicament. Si on tient compte de sa structure chimique profonde, le corps humain est donc orienté sans discussion possible.

Exercices :

4) Que devient le théorème ci-dessus pour une figure non-orientée ? Enoncez-le correctement et démontrez-le.

5) Construire des modèles de molécules à base de carbone et d'hydrogène qui sont orientées. Enquêtez quant à la présence des deux formes, gauche et droite, de ces molécules dans les organismes vivants.

6) Examinez
a) une boîte de vis. Ont-elles la même orientation ?
b) une boîte de pâtes torsadées. Ont-elles la même orientation ?
c) des coquillages (à peu près) isométriques.
d) Une autre collection de figures isométriques rencontrées dans le monde vivant.

4. Pour reconnaître qu'une figure est orientée

La définition que nous avons adoptée pour les figures orientées présente un gros inconvénient. Pour décider que F est non orientée, il faut en principe comparer F à toute image isométrique de F et comme le nombre de ces images est généralement infini, cela présente une certaine difficulté. Ne peut-on vérifier que F est orientée ou non-orientée sans devoir passer en revue toutes ces images isométriques ?

Voici une réponse à cette question :

Théorème :
a) une figure F est orientée si et seulement si toute isométrie conservant F est un déplacement.
b) une figure F est non-orientée si et seulement si il existe un retournement conservant F.

Démonstration :
Un petit rappel de logique sera utile :
Si p et q désignent des propriétés et $\overline{p}, \overline{q}$ leurs négations, on sait que
1) $p \Rightarrow q$ est équivalent à $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
2) p et $\overline{p}$ ne peuvent être simultanément vraies.
Une démonstration appliquant 1) est une démonstration par contraposition.
Une démonstration appliquant 2) est une démonstration par l'absurde.

Soit p la proposition « F est orientée » et
q la propriété « toute isométrie conservant F est un déplacement ».

L'énoncé a du théorème affirme $p \Leftrightarrow q$ et l'énoncé b affirme $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$.
Grâce à 1, il suffit d'établir a.

Prouvons d'abord que $p \Rightarrow q$.

On suppose donc que F est orientée. Il faut prouver qu'une isométrie i conservant F est nécessairement un déplacement. Nous procédons par l'absurde en supposant que i est un retournement. Comme F est orientée, il existe une figure F' isométrique à F et d'orientation différente. Donc il existe un retournement r tel que F' = r(F). Dès lors, r o i est un produit de deux retournements, c'est-à-dire un déplacement qui transforme F en F'. Ceci est une contradiction car F et F' ont une orientation différente. Donc i est un déplacement. On a bien $p \Rightarrow q$.

Prouvons que $q \Rightarrow p$.

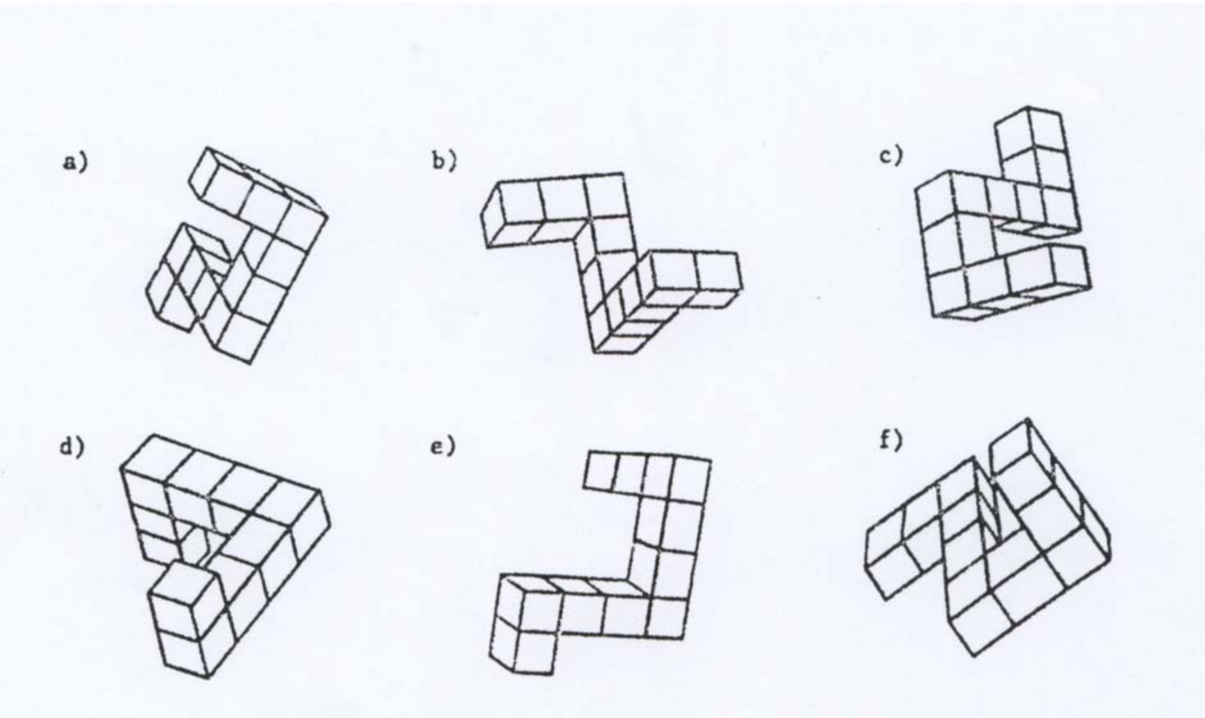
Donc, nous supposons que toute isométrie conservant F est un déplacement. Soit r un retournement et F’ = r(F). Nous voulons prouver que F et F’ ont une orientation différente. Procédons à nouveau par l’absurde en supposant qu’il existe un déplacement d tel que d(F) = F’. Dans ce cas, $d^{-1} \circ r$ est un retournement qui conserve F, contrairement à l’hypothèse initiale et ceci est une contradiction. On a bien $q \Rightarrow p$.

Exercices :

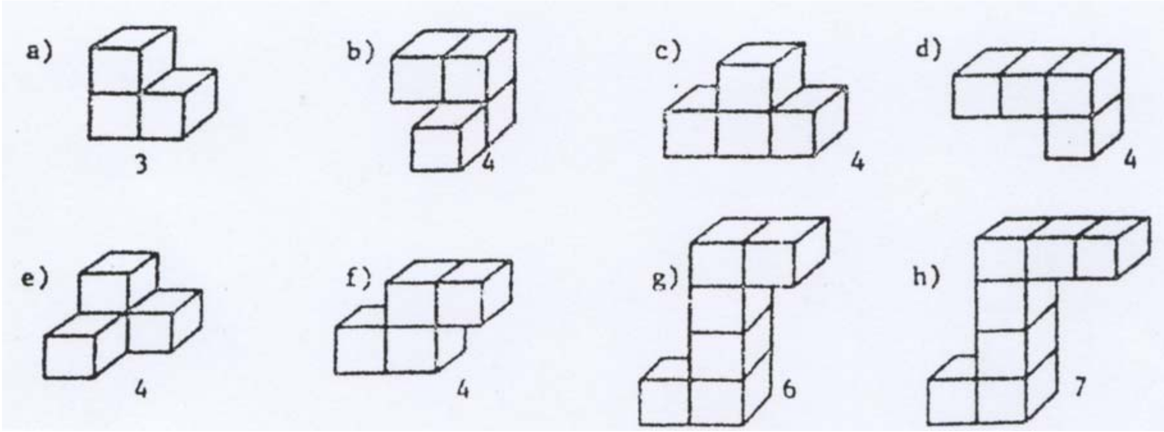
7) Utiliser le théorème précédent pour déterminer
a) les parallélépipèdes qui sont non-orientés,
b) les pyramides qui sont non-orientées,
c) les cylindres circulaires illimités qui sont non-orientés,
d) des figures planes qui sont non-orientées.

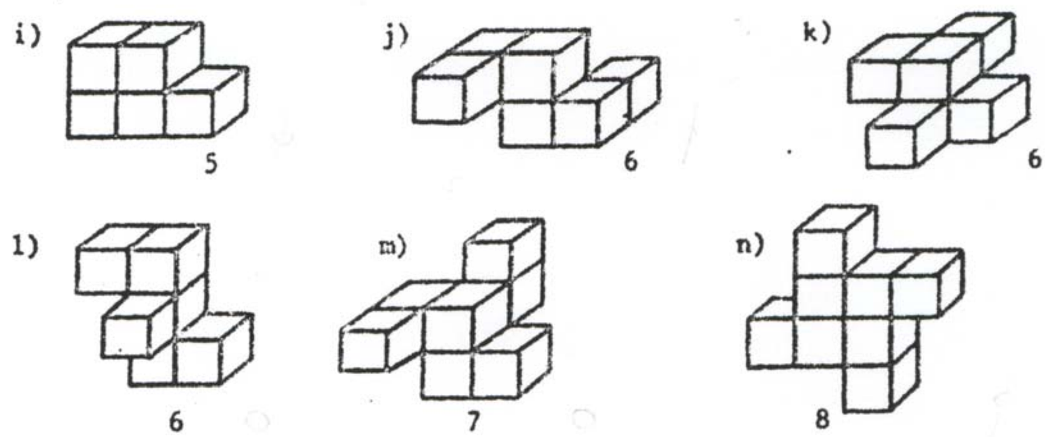
8) Considérer une collection de modèles de polyèdres et d’autres corps solides et les répartir en deux collections selon qu’ ils sont orientés ou non.

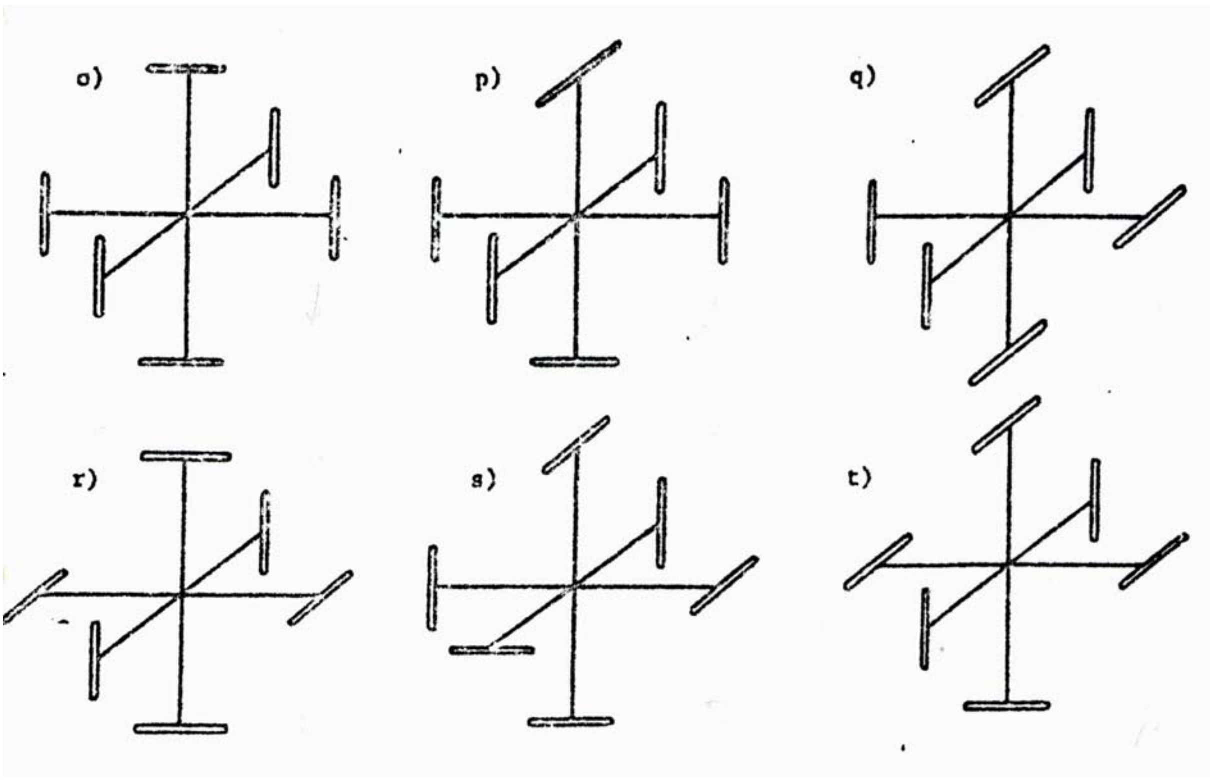
9) Quels sont, parmi les corps solides suivants , ceux qui ont la même orientation :



10) les corps solides que voici sont-ils orientés ou non-orientés ? (Lorsqu’il s’agit d’un assemblage de cubes, le nombre de cubes qui le composent est indiqué à côté du dessin pour éviter toute ambiguïté).


a) 3
b) 4
c) 4
d) 4
e) 4
f) 4
g) 6
h) 7


i) 5
j) 6
k) 6
l) 6
m) 7
n) 8


o)
p)
q)
r)
s)
t)

5. Orienter une figure non-orientée

Considérons une figure F qui est non-orientée, par exemple un plan, une sphère, un cylindre circulaire illimité, un cube, une droite, un point.

Soit Dep(F) le groupe des déplacements qui conservent F et Iso(F), le groupe des isométries qui conservent F. Nous savons qu'il existe au moins un retournement qui conserve F et par conséquent Iso(F) se décompose en deux parties non vides et disjointes : Dep(F) et Ret(F) (retournements qui conservent F). Ces deux ensembles permettent de concevoir une théorie de l'orientation de F analogue à celle élaborée pour l'espace. Voici des exemples :

Exemple 1 :

F est une droite. Cette fois, la droite joue le rôle de l'espace E^3. Nous observons

Figures orientées	*Figures non-orientées*
Demi-droite fermée	Point
Demi-droite ouverte	Segment fermé
Vecteur non nul	Segment ouvert
Translation	Symétrie centrée
Graduation	Echelle (graduation dont on oublie l'origine et l'unité)

des

Exemple 2:

F est un plan et joue le rôle de l'espace :

Figures orientées	*Figures non-orientées*
Triangle non isocèle.	Demi-droite (fermée ou ouverte).
Parallélogramme autre que losange et rectangle.	Vecteur non nul.
Cercle muni d'un sens de parcours (cercle orienté).	Translation.
Angle orienté.	Triangle isocèle.
	Rectangle.
	Losange.
	Cerf-volant convexe
	Cerf-volant concave
	Cercle.
	Angle.
	Plan.

6. Modifier l'orientation

Si F est un espace dont les isométries se répartissent en déplacements et en retournements, nous résumons les propriétés de ces transformations en disant que les déplacements conservent l'orientation de F et que les retournements modifient l'orientation de F.

Exercice :

11) Dresser une liste de figures orientées et non-orientées dans l'espace F si
a) F est une sphère,
b) F est un cylindre circulaire droit illimité,
c) F est un cube.

Considérons un espace F non-orienté c'est-à-dire qui possède des retournements de F.

Soit r un retournement de F.

Soit f une figure orientée de F.

Que dire de r(f) par rapport à f ? Est-il exclu que f et r(f) soient superposables par un déplacement d ?

Si d existe, d(f) = r(f), r^{-1} o d = f et r^{-1} o d est un retournement qui conserve f, donc f est non-orientée et on a une contradiction. Dès lors, f et r(f) ne sont pas superposables. Dans ce cas nous disons que r **modifie l'orientation** de f.

Si nous avions convenu de dire que f est une **figure gauche** (respectivement une figure droite) nous ajouterions à présent que r(f) est une **figure droite** (respectivement une figure gauche).

Insistons sur le fait que l'orientabilité d'une figure f est tributaire de l'espace F dans lequel elle est plongée, c'est le couple (F,f) qui est orienté. Dans l'exercice suivant, on fixera f, on laissera varier F et on verra que l'orientation en est affectée.

Exercices

12) Soit f une figure orientée du plan F. Remplaçons F par l'espace F' de dimension 3.
La figure f de F' est-elle orientée ? Dessinez des exemples.

13) Soit f une figure orientée de la droite F. Remplaçons successivement F par le plan F' puis par l'espace F'' de dimension 3.
La figure f de F' (respectivement F'') est-elle orientée ? Dessinez des exemples.

14) Une symétrie centrée de F est-elle un retournement si F est successivement le plan, l'espace à 3 dimensions, la droite ?

7. Bibliographie

[1] Buekenhout Francis, Doyen Jean.
Espaces euclidiens. Presses Universitaires de Bruxelles – 1975.

[2] Buekenhout Francis, Fréderickx Monique.
*Mathématique 5^e^*. Manuscrit non publié (266 pages),1986.

[3] Buekenhout Francis.
La gauche et la droite en géométrie élémentaire. Orientation de figures. Chiralité. Université de Mons-Hainaut, 2004.

[4] Gardner Martin – *Knotted doughnuts and other mathematical entertainments*. Freeman, New York, 1986.