FRANCIS BUEKENHOUT

LA GAUCHE ET LA DROITE
EN GEOMETRIE ELEMENTAIRE
ORIENTATION DE FIGURES-CHIRALITE

Résumé. Les notions relatives à la dualité gauche-droite émergent avec une puissance extraordinaire dans divers domaines depuis 50 ans au moins selon mon expérience subjective.
En mathématiques, les questions d'orientation sont omniprésentes. Il en va de même en chimie et en biochimie où on parle plutôt de chiralité. Ce ne sont que deux exemples.
Dans l'enseignement mathématique, l'orientation de figures demeure une grande absente.
Mon but est double:
-illustrer et souligner l'importance scientifique du sujet;
-présenter un modèle théorique simple, performant et puissant qui devrait s'imposer à l'attention de toutes les parties concernées.

Abstract. The notions relative to the left-right duality emerge with an extraordinary power in several domains over 50 years at least according to my subjective experience.
In mathematics, questions regarding orientation are omnipresent. The same holds true in chemistry and in biochemistry where one rather speaks about chirality. These are but two examples.
In mathematical education, the orientation of figures remains a great absent.
My goal is twofold.
-to illustrate and underline the scientific importance of the subject;
-to present a theoretic model which is simple, performing and powerful and that ought to catch the attention of all concerned parties.

Mots clés. Chiralité. Orientation. Déplacement. Retournement.

Espace de Klein. Rotation. Vissage. Figure orientée. Figure non orientée. Hélice. Double hélice.
Keywords. Chirality. Orientation. Motion. Reversal. Klein space. Rotation. Screw motion. Oriented figure. Non-oriented figure. Helix. Double helix.

1. Introduction

1.1 Les notions relatives à la dualité gauche-droite émergent avec une puissance extraordinaire dans divers domaines depuis 50 ans au moins selon mon expérience subjective. Bien entendu, une histoire précise remonterait notamment aux travaux fondamentaux du début de carrière de Louis Pasteur au 19è siècle et, en théorie des groupes, on peut se référer par exemple à Jordan 1870. Mon but dans ce qui précède est d'exprimer une explosion, pas une naissance.
En mathématiques pures et appliquées, les questions d'orientation sont omniprésentes.
Il en va de même en chimie et en biochimie où on parle
plutôt de chiralité.
En éducation mathématique, ces questions sont absentes !

1.2 Un témoignage d'omniprésence scientifique. J'ai sous les yeux un rapport du Bacas (Belgian Academy Council of Applied Science) constitué de sommités de la science et de l'industrie belges [Bac]. Une demi page est consacrée à l'explication de **"Chiralité et biocatalyse"**. Je cite.

<< La chiralité signifie qu'une substance chimique existe sous deux formes, i.e. une "gauche" et une forme "droite". Sans aller dans trop de détail, celles-ci peuvent être comparées aux mains humaines réparties en mains gauches et droites qui sont identiques dans tous les autres aspects.

Ceci s'applique aussi à certaines molécules chimiques de sorte que leur action biologique peut différer fortement selon qu'elles sont "gauche" ou "droite" .

Un exemple conventionel de cette chiralité de molécules se trouve dans le médicament "softenon". Ce médicament fut utilisé dans les années 1960 pour lutter contre les vomissements de femmes enceintes. Malheureusement, l'autre forme chirale également présente dans le médicament a provoqué des dommages sérieux à la naissance (ce qu'on a appelé les bébés softenon). Le monde biologique est fondamentalement chiral de sorte que la chiralité des molécules est d'importance majeure pour leur action biologique.

Typiquement, les catalyses chimiques ne peuvent pas distinguer ces formes chirales et elles catalysent la réaction chimique des deux formes. Spécialement dans le cas de synthèse de substances actives qui

interviennent dans le monde biologique comme les médicaments et les pesticides, il est typique qu'une seule forme soit active. Au mieux, l'autre forme est inoffensive et peut être considérée comme une simple perte mais dans le pire des cas l'autre forme peut être très nocive comme il a été tristement démontré par le cas du softenon. Dans ce cas, la forme nocive doit être séparée ce qui n'est pas facile du tout au plan technologique. De plus, ceci conduit à une réduction considérable de l'efficacité et génère des déchets dangereux.
La biocatalyse utilise des enzymes, des catalyses d'origine biologique qui peuvent manier de telles réactions avec beaucoup plus d'efficacité. Elles sont presque toujours sélectives en chiralité et synthétisent une seule des deux formes. Il y a une forte poussée pour utiliser de telles molécules spécialement dans les industries pharmaceutiques et agro-chimiques. De ce fait, il n'est pas surprenant que la biocatalyse possède à présent le niveau de pénétration le plus élevé dans la synthèse chimique de médicaments, de produits agro-chimiques et de produits intermédiaires ››.

1.3 La gauche et la droite tout de même biologiquement indiscernables ?!

Les questions de chiralité au sens mathématique et

scientifique émergent de la symétrie bilatérale de notre corps. Cette symétrie est fondamentale et porte sur notre structure. Celle-ci se présente de manière identique de deux points de vue différents. La gauche et la droite sont à cet égard indiscernables.
Mais nous les discernons tout de même. Pourquoi? Parceque la symétrie de la gauche et de la droite n'est pas totale. Elle est brisée par des "détails" comme:
-le système circulatoire,
-la structure interne du cerveau,
-la forme de la molécule d'ADN qui est le constituant génétique de notre identité personnelle.
Un enfant met des années à distinguer la gauche et la droite. Bon nombre d'adultes parviennent très difficilement à cette distinction. Ceci n'est-il pas la meilleure preuve de l'indiscernabilité de fond ?
Je ne poursuis pas plus longuement les développements biologiques et psychologiques. Il existe une "bible" sur le sujet dont j'ai eu connaissance par Charlotte Bouckaert.
Ce livre merveilleux est dû au psychologue McManus [McM].
Vous y découvrirez que le sujet a été abordé sérieusement par Emmanuel Kant au 18è siècle. Vers 1830 un jeune philosophe se plaignait du fait qu'on ne

pouvait toujours pas définir la gauche et la droite. Il s'agissait de ... Karl Marx.

1.4 **En géométrie élémentaire classique, la gauche et la droite sont indiscernables** en raison d'automorphismes qui portent le nom de miroir ou réflexion ou symétrie bilatérale ou symétrie orthogonale (ceci en Belgique). Ces automorphismes sont le modèle mathématique simplifié de la symétrie du corps humain et d'autres êtres biologiques ou non.

1.5 Mon but n'est pas historique et n'est pas didactique.
Mon but est de présenter **un modèle théorique simple et performant** qui devrait s'imposer à l'attention des mathématiciens, physiciens, chimistes, biologistes et j'en passe. Sans oublier les amateurs d'art et les didacticiens.

1.6 De Paul Libois à Jean Dieudonné
Dans son enseignement que j'ai suivi à partir de 1956 d'abord comme étudiant puis assistant, Paul Libois insistait souvent sur les mains, sur l'orientation et sur les transformations-automorphismes qui conservent celle-ci.
J'étais imbibé de ces notions. Les déplacements ou isométries directes voire positives, l'orientation du

plan , de l'espace, de la sphère, de la droite projective, du plan conforme et bien d'autres situations analogues faisaient partie de mes habitudes quotidiennes. J'éprouvais néanmoins un malaise dû à mon incapacité de définition générale d'un concept.
Ce terrain fut fécondé par un texte de **Jean Dieudonné** dont je ne retrouve pas la référence. Il y avait une petite phrase éclairante et surprenante que je reproduis en substance.
<< Au fond, l'orientation n'est rien d'autre que la donnée d'un groupe muni d'un sous-groupe d'indice deux >>.
Elle mettait fin au malaise. Je m'en suis emparé et elle m'a toujours inspiré depuis.
Dans mon cours de 1ère candidature de 1971 partagé avec Jean Doyen à partir de 1972, cette idée est développée avec insistance dans le chapitre " Ensembles structurés et groupes de symétrie" [BuDo1].
Il y avait aussi une belle section sur l'orientation dans le chapitre "Espaces Euclidiens" [BuDo2]. Jean Doyen y avait introduit des exercices de grande classe inspirés de la chronique tenue par Martin Gardner dans le Scientific American. Cette section a disparu dans des éditions ultérieures. Je n'en suis pas fier. La matière fut reprise pour un cours du secondaire de

5è que j'ai mis au point avec Monique Fréderickx en 1986 et qui constitue un compagnon au présent texte [BFré].
Cette matière a été constamment enseignée par Monique Fréderickx depuis 1986 avec le plus grand succès. Ce fut un incitant essentiel pour le présent travail.
Aujourd'hui, je constate que tout cela n'est pas vraiment connu des nombreux intéressés. J'ai raconté cette histoire à Charlotte Bouckaert qui s'est montrée très intéressée et qui m'a encouragé à persévérer.

1.7 Pour en revenir à l'essentiel, mon exposé se permet de modifier quelque peu la phrase de Jean Dieudonné.
En vérité, mes bien chers frères et soeurs de la gauche-droite,
<< l'orientation n'est rien d'autre qu'un groupe de transformations muni d'un sous-groupe d'indice deux >>.
Tout est proche du mode de pensée de Bourbaki ce qui n'est pas étonnant quand on se souvient de l'appartenance de Jean Dieudonné.
Mon point de vue se situe également dans la tradition du Programme d'Erlangen de Felix Klein.

1.8 Je remercie J. Chris Fisher (University of Regina, Canada) pour le commentaire suivant sur mon texte de 2004:

<< I very much liked your essay on "right and left." It was especially nice to see for once a clear explanation. I'm among those who have trouble with the notion of chirality -- not the concept so much as the terminology! Among other things, there is something psychologically wrong with the word: it's essentially a negative property (= not symmetric) so that achiral is a double negative. In fact these words have the opposite meaning to what I had guessed the first time I heard them used! Moreover, it's not easy to learn the definition because dictionaries don't seem to get the details quite right. The Oxford English Dictionary presents Lord Kelvin's original 1894 definition, which provides an example of my point (which, of course, was YOUR point): according to Kelvin, CHIRAL means "not superposable on its mirror image." The irony is that the Greek root of the word means "hand," but when we clap we superpose one hand on its mirror image! Of course, they might have had a different way of clapping in the 19th century >>.

1.9 Je tiens à remercier Paul van Praag pour de nombreuses conversations stimulantes au fil des années et quelques occasions de développer les idées présentées ici. Je lui dois de nombreuses corrections de mon texte initial en 2004.
Je remercie également Christian Michaux qui a bien voulu m'inviter et m'accueillir en 2004 pour des leçons dans le cadre de son cours de Didactique de Mathématiques à l'Université de Mons-Hainaut.

2. Sous-groupes d'indice deux

Je veux préparer le terrain géométrique en le quittant
d'abord. Je m'adresse à des personnes habituées à la notion de groupe et à celle de sous-groupe.
Soit G un groupe dont l'opération est notée de manière multiplicative.
Pensons aux isométries de l'espace ou aux similitudes de l'espace ou aux affinités du plan ou ...
Soit G+ un sous-groupe de G.
Pensons aux déplacements de l'espace ou aux similitudes positives de l'espace ou aux affinités directes du plan.
Nous y pensons pour nourrir notre intuition mais, foi de Dieudonné, tout ce qu'il faut connaître à cet instant est la notion de groupe et de sous-groupe. Ici, le sous-groupe n'est pas constitué de tous les éléments de G qui conservent telle ou telle chose. Le sous-groupe G+ est supposé connu.
Permettez-moi de dire que ses éléments sont les **"déplacements"**.
Et d'indice deux?
Nous devons considérer l'ensemble G- des éléments de G qui ne sont pas des "déplacements". Nous les appelons des **"retournements"**.
Voici la définition:
pour que G+ soit appelé "d'indice deux" il faut et il

suffit que le produit de tout “retournement” et de tout “retournement” soit un “déplacement”. Il faut qu’il existe un “retournement” ou encore que G- soit non-vide.

Exercices: 1. le produit d’un “déplacement” et d’un “retournement” est un “retournement”. Et de même pour le produit d’un “retournement” et d’un “déplacement.

2. Le produit d’un nombre pair de “retournements” est un “déplacement”. Le produit d’un nombre impair de “retournements” est un “retournement”.

3. La réciproque d’un “retournement” est un “retournement”.

Remarquons que la donnée d’un groupe et d’un sous-groupe d’indice deux est équivalente à celle d’un groupe et d’un homomorphisme sur le groupe d’ordre deux. Chaque élément du groupe est muni d’un label prenant deux valeurs qui sont des noms ou des symboles et cette labelisation obéit à une règle de multiplication que nous avons énoncée plus haut à l’aide des labels “déplacement” et “retournement”.

Un conseil. Chaque fois que vous rencontrez un groupe demandez vous s’il a un ou plusieurs sous-groupes d’indice deux. Pour chacun de ceux-ci, il y a de l’orientation dans l’air.

Un bel exemple est le groupe d’ordre 48 des symétries du cube. Il a trois sous-groupes d’indice

deux.
Un autre exemple est le groupe d'ordre 8 du carré qui possède lui-aussi trois sous-groupes d'ordre deux.
Examiner la signification chirale de ces six exemples est un thème que je recommande.

Proposition 1. Soit r un "retournement". Alors tout "retournement" est dans rG+ (et dans G+r)
Démonstration.
Soit s un "retournement". Alors sr-1 est un "déplacement" d dans G+ et s=dr donc s est dans G+r.
CQFD

3. Espace de Klein

3.1 Pour nourrir l'intuition partons d'un espace E qui peut être "le" plan, la sphère, le cylindre illimité ou tout autre objet favori. Nous supposons connues les symétries ou automorphismes de E qui constituent un groupe G. Dans E, nous distinguons une foule de figures, foule variable selon notre expérience et nos goûts du moment. Ayant une figure f, nous voyons sa famille G(f)=F constituée de toutes les figures "pareilles" à f, ou "semblables" ou "isométriques".
Ces derniers qualificatifs à vrai dire très ambigus s'expliquent simplement et clairement quand on veut bien faire appel à G. **Une figure f et une autre f ' ont la même famille si et seulement s'il existe un**

élément g de G tel que g(f)=f'. En mathématique, on utilise plutôt le terme d'orbite que celui de famille.
Si F désigne la famille-orbite de f, on dit que G est **transitif** sur F.
Il faudrait des petits rappels ou compléments sur les orbites.
L'exemple qui nous importe le plus est celui de l'espace euclidien et de son groupe d'isométries. Nous y considérons une main géométrique m expliquée puis définie comme drapeau. La famille ou orbite de m est constituée de toutes les répliques isométriques de m sans distinction de gauche ou de droite.

3.2 Franchissons un pas dans l'abstraction, la précision et la modélisation.
Oublions l'espace E ci-dessus qui est demeuré très vague et certainement pas facile à préciser.
J'appelle **Espace de Klein**, un ensemble non vide F d'éléments appelés **figures** muni d'un groupe G de transformations de F.
Chacune des orbites de G dans F est une famille de figures. Intuitivement, nous pouvons penser à la famille des points, à celle des sphères, à celle des drapeaux, à celle des cubes, etc. **Les éléments de G sont appelés automorphismes ou symétries. Pour l'intuition de ce qui suit je préfère les appeler**

isométries.

4. Espace de Klein orientable

Soit E=(F, *G*) un espace de Klein et soit *G*+ un sous-groupe d'indice deux de *G* à propos duquel nous parlons de "déplacements" et de "retournements" comme auparavant.

Nous dirons que le triple E=(F, *G*, *G*+) est un **espace de Klein orientable**.

Considérons une orbite O de *G*. Deux situations se présentent.

La première situation est le cas où *G*+ est transitif sur O.

Dans ce cas, nous disons que les membres de O sont des **figures non-orientées**.

Exemples: Notre stock d'exemples classiques est bien pourvu.

Si E représente l'espace euclidien, O pourrait être l'ensemble des points, l'ensemble des cylindres illimités, l'ensemble des dodécaèdres réguliers, ..., en supposant que *G* soit le groupe des similitudes et *G*+ le groupe des similitudes directes.

Théorème 1. Pour toute figure non-orientée f il existe un "retournement" conservant f.

Démonstration.

Il existe un "retournement" r. Soit r(f).

Il existe un "déplacement" d tel que d(f)=r(f).

La composée r-1d est un “retournement” et il conserve f.
CQFD
La deuxième situation est celle où G+ n’est pas transitif sur O. La gauche-droite peut naître. Nous dirons que les membres de O sont des **figures orientées**.
Théorème 2. Si O est une famille-orbite de figures orientées, le groupe G+ des “déplacements” possède DEUX orbites dans O.
Démonstration.
Comme G+ n’est pas transitif sur O, il possède au moins deux orbites M et N.
Il existe m dans M et n dans N.
Il existe g dans G tel que g(m)=n.
Il est exclu que g soit un “déplacement”.
Donc g est un “retournement”.
Supposons par l’absurde qu’il existe une 3è orbite de G+ soit P et considérons une figure p de P.
Il existe h dans G tel que h(p)=m.
Le raisonnement fait pour g s’applique à h.
Donc h est un “retournement”.
La composée gh est un “déplacement” et celui-ci transforme p en n.
De ce fait p et n sont à la fois dans P et N donc P=N.
CQFD

Théorème 3. Si O est une famille-orbite de figures orientées et si M, N sont les orbites de G+ dans O, tout
“retournement” transforme M en N et N en M.
Démonstration.
Il existe un “retournement” r qui transforme M en N.
Par la Proposition 1, tout “retournement” est dans rG+.
Dés lors, tout “retournement” transforme M en N.
CQFD

Théorème 4. Une figure f est non-orientée si et seulement s’il existe un “retournement” qui conserve f.
Démonstration.
Si f est non-orientée, le Théorème 1 s’applique.
Si f est orientée, f est par exemple dans l’orbite M de G+ citée dans les théorèmes 2 et 3. Par le Théorème 3, f n’est conservée par aucun “retournement”.
CQFD

5. Commentaires

5.1 Dans la situation formalisée en 4, les deux orbites M et N incarnent une famille de figures orientées réparties en forme gauche et forme droite. La gauche et la droite ainsi modelisées sont indiscernables.

Etant donnée une de ces figures dans l'Espace de Klein orientable supposé connu et rien d'autre, rien ne permet de dire qu'elle est gauche ou qu'elle est droite. Il est permis de décider qu'elle est orientée en appliquant le Théorème 4.
Etant données deux figures orientées d'une même famille et rien d'autre, il devient possible de détecter qu'elles ont une même orientation ou la même chiralité ou qu'elles ont une orientation (chiralité) différente. Mais rien ne distingue une gauche d'une droite; a vrai dire, ces qualificatifs demeurent vides de sens.
Si le qualificatif "gauche" est attribué à une figure m dans M, chaque figure de sa famille est aussitôt affublée du qualificatif "gauche" (figures dans M) ou du qualificatif "droite" (figures dans N).

5.2 Vocabulaire
Une figure orientée est dite **chirale** et réciproquement.
Elle n'est jamais dite orientable: ne confondons pas le passé et le futur.
Une figure non-orientée est dite **achirale.**
En fait, elle est orientable.
Je vais y revenir proprement.

5.3 La théorie des Espaces de Klein orientables est particulièrement souple. Elle convient notamment aux espaces euclidiens de toutes dimensions. Cette théorie contribue entre autres à "voir" en dimension quatre et plus.

5.4 Je veux insister sur le caractère relatif de la chiralité ou de l'achiralité d'une figure f. Cette propriété dépend certes de la figure mais aussi de l'espace de Klein (F, G) auquel elle appartient. Pour être précis, c'est le triple (F, G, f) qui est orienté ou non-orienté et pas le singleton {f}.
Un exemple plus concret. Dans le plan euclidien considéré comme espace de Klein orientable avec ses isométries et ses déplacements, il y a beaucoup de figures orientées notamment les triangles scalènes. Si nous considérons ces figures planes dans un autre espace de Klein qui est l'espace euclidien de dimension trois avec ses isométries et ses déplacements, chacune d'elles est non-orientée car
conservée banalement par un retournement à savoir la réflexion dont l'axe est son plan.
Cet exemple mérite une extension: toute figure orientée dans l'espace euclidien de dimension trois est non-orientée dans l'espace euclidien de dimension quatre et l'explication est très simple avec notre approche.

5.5 Le théorème 4 permet de comprendre un fait essentiel: la très vaste majorité des figures de l'espace euclidien sont orientées. Dans l'enseignement et dans la vie courante, nous nous attachons le plus souvent à des figures non-orientées. C'est un autre reflet de la symétrie de fond de notre corps.

6. Un défaut des Espaces de Klein et sa correction

6.1 Reprenons un espace de Klein orientable E=(F, G, G+) et l'idée que toute figure f non-orientée est orientable. Pour en faire un théorème 5 il faudrait disposer d'un triple (Ff, Gf, G+f) déterminé par E et f qui soit un espace de Klein orientable. Le choix de Gf s'impose: c'est le sous-groupe de G constitué par tous les éléments de G qui conservent f ou encore le stabilisateur de f dans G. Le choix de G+f s'impose également: c'est l'intersection de G+ et de Gf ou encore, l'ensemble des "déplacements" de E qui conservent f. Ce sous-groupe est-il d'indice deux dans Gf? Oui! Du fait que f est non-orientée il existe un "retournement" dans Gf (théorème 4). Il est clair que le produit de deux "retournements" de Gf est un "déplacement" de Gf. Tout semble donc limpide.
Le seul ennui de fait est de définir Ff.
Dans notre approche formalisée, f est un élément

d’un
ensemble F. Formellement, rien ne permet de parler des figures de cette figure f. Nous ne disposons pas d’une notion d’inclusion de figures.
La correction n’est pas difficile et coule de source. Au moment de définir un Espace de Klein, nous demanderons que F soit un ensemble ordonné ou encore que E est un triple E=(F, ≤, G) où (F, ≤) est un ensemble ordonné et G est un groupe d’automorphismes de (F, ≤).
Je propose de dire que cette notion est un **Espace de Klein à inclusion.** La suite de la théorie développée dans la section 4 se recopie mot pour mot. Nous avons une notion d’**Espace de Klein orientable à inclusion**.
Cette fois, la définition de Ff coule de source aussi: c’est l’ensemble des e appartenant à F tels que e≤f.
Et nous avons le Théorème 5.
Théorème 5. Soit E=(F, ≤, G, G+) un espace de Klein orientable à inclusion et f une figure non-orientée de E.
Alors f “=” (Ff, ≤f, Gf, G+f) est un espace de Klein orientable à inclusion.
La démonstration a été donnée avant l’énoncé et par bribes.
Il aurait fallu expliquer que Gf est un groupe d’automorphismes de (Ff, ≤f). Il y a là une nouvelle faille

sérieuse exigeant une nouvelle adaptation. En effet, il se pourrait que deux éléments distincts de G conservant f, induisent le même automorphisme dans Ff.
Deux suivis possibles : ajout d'une hypothèse dans l'énoncé pour empêcher le défaut ou modification de la notion d'espace de Klein. Je ne développe pas. Ce n'est pas très difficile si on adopte la première voie.

7. Variations

7.1 Reprenons la notion d'Espace de Klein orientable constitué d'un triple (F, G, G+). Ces trois composantes sont des variables et la géométrie élémentaire à besoin de leurs variations.

7.2 L'ensemble F des figures. Figures à antennes.
Un des buts de l'enseignement devrait être d'enrichir sans cesse cet ensemble. C'est le plus souvent le contraire qui se produit.
Dès qu'on le permet, l'imagination naturelle de l'être humain donne lieu à des créations de figures. Donnez une forme fixée comme un tétraèdre régulier. Autorisez l'assemblage de tétraèdres face à face et vous êtes conduit à un déluge de formes.
Dans notre modèle de théorie, toutes les figures sont traitées sur un pied d'égalité. C'est la réalité

simplifiée. En vérité, toutes les figures vraies, celles de votre espace favori, n’ont pas le même statut d’importance. Ainsi, le rectangle importe plus que le carré dans la vie courante. Le carré importe plus en mathématique: il est le plus symétrique des rectangles. Une idée créative de figures est d’agrandir, d’étendre des figures existantes connues. C’est une approche de conquête mathématique d’un espace. On pousse la figure dans des retranchements qui ne sont jamais les derniers.
Prenons un cube. En l’un de ses huit sommets, je considère un segment dirigé vers l’extérieur du cube. C’est ce que j’appelle un cube avec antenne. Cette figure est-elle orientée? Chacun voit bien que j’aurais pu être plus précis dans la description du cube avec antenne. La figure est orientée pour une antenne quelconque. La figure est non-orientée si et seulement si l’antenne se situe dans un plan de symétrie du cube. Pouvez-vous le prouver ?

7.3 Anti-horlogique

Tout est-il figure ?
C’est une question provocante. Je ne dis pas oui.
Une question plus innocente: toute rotation est-elle une figure ? Une rotation r est un ensemble de couples de points et si j’effectue une transformation g, cet ensemble de couples de points est transformé

en un ensemble de couples de points $g(r)$. Si g est une isométrie (et même si g est une similitude), nous pouvons nous persuader que $g(r)$ est une rotation. Remarquons au passage le théorème: $g(r)=grg-1$ (lire de droite à gauche).
Ce type de démarche est capital en théorie des groupes élémentaire et même en géométrie car il conduit à une classification objective des transformations les plus courantes.
Une transformation telle que r possède un double visage: elle agit sur autrui et elle subit une action. En quoi ceci importe-t-il ? Une question intéressante surgit: la rotation est-elle une figure orientée ?
Dans le plan, toute rotation r qui n'est pas d'ordre deux ou un, est orientée. Ceci se démontre rigoureusement. Vous prouvez qu'il n'y a pas de retournement g du plan tel que
$g(r)=r$. Vous constaterez que la dernière égalité revient à
écrire $gr=rg$. Et que g doit fixer le centre de r. Etc.
On est amené à prouver que si r est bien une figure (le plus dur à accepter), alors la famille de r consiste en toutes les rotations de même angle a que r.
Ensuite, cette famille se décompose en deux orbites M et N sous l'action du groupe des déplacements.
Nous obtenons une explication purement mathématique du fait qu'il y a des rotations dans deux

sens comme on dit. Prenez un manuel parlant des angles: il est douteux qu'il explique “horlogique” ou “antihorlogique” sans subterfuge physique voire psychologique.

7.4 Anti-horlogique dans l'espace

Et dans l'espace ? Plaçons-nous dans l'espace euclidien de dimension trois E. Considérons la rotation plane r dans cet espace. Comme nous l'avons vu avant, toute figure plane est non-orientée dans E. Donc, dans E il n'y a pas
d' “antihorlogique” semble-t-il? On s'accroche. Il y a peut-être une faille dans la présente démarche. Prenons un être plus simple que la rotation plane : un angle orienté déterminé par un couple de demi-droites de même origine (non alignées).
Observez l'usage du mot “orienté” dans ce contexte. Dans l'espace, cet angle est une figure non-orientée ! On se dit que ça doit se “réparer”.
On considère cette fois, dans E, une rotation r de E ayant une droite de points fixes A. Traitons-là comme une figure, c'est-à-dire un ensemble de couples de points. Nous voyons après l'effort requis, que r est non-orientée. Une symétrie s d'axe plan perpendiculaire à A transforme r en elle même.
Un transparent peut-être de grande utilité. On regarde la rotation plane au-dessus puis en-dessous

ce qui revient à “retourner” (au sens du plan ...) la feuille.
Bref, dans l’espace E, tourner à gauche ou tourner à droite n’a, c’est le cas de le dire, pas de sens.
Pourtant nous le faisons et souvent à bon escient.
C’est qu’il intervient un repère, peut-être un plan comme en ville et sûrement plus encore, notre corps-cerveau longuement éduqué pour distinguer la gauche et la droite. La figure constituée par la rotation ET par notre corps est orientée.
Une piste mathématique intéressante pour exprimer le constat précédent est d’équiper l’axe de rotation A d’une orientation interne à cet axe, (une translation, une flèche). Alors, s ne peut plus agir. On se persuade qu’aucun retournement ne peut conserver r augmenté de la flèche sur A.
Cette figure est orientée et il naît deux orbites M et N
comme avant. Mais, M et N demeurent indiscernables.
Remarquons au passage que la “rotation plus flèche” est une notion indispensable à la compréhension des rudiments de l’électomagnétisme et qu’il appartient à la géométrie de préciser cette notion. Avec ou sans l’aide heuristique du bonhomme d’Ampère.
En conclusion de cette section, il convient de porter un regard critique sur l’orientation de rotations dans l’espace euclidien de dimension trois.

7.5 Hélice

Voici une courbe d'importance majeure et qui ne possède pas de nom incontesté dans la culture générale On parle de colimaçon, de spirale. Le terme "hélice" est incontesté en mathématique. Comment décrire cette courbe sans

équations et surtout sans geste du bras tenant lieu de discours ? Quelques images ? Vue de haut ? De profil?

Faut-il une construction ou une définition ?

Ce n'est pas facile.

Cette courbe est en quelque sorte un amalgame très précis du cercle et de la droite. Mais encore ?

Dans ma foi, il faut introduire une notion de " groupe à un paramètre" et une orbite de celui-ci. Dans ma foi, la droite est une orbite de groupe de translations à un paramètre et le cercle est une orbite de groupe de rotations à un paramètre. Ensuite, l'hélice est une orbite de groupe à un paramètre de vissages.

L'ennui est que je ne dispose pas d'une définition de groupe à un paramètre qui soit élémentaire et qui me donne satisfaction.

Je me borne donc à montrer des hélices pour des personnes qui n'y sont pas ou guère habituées.

Ensuite, je peux donner une construction plus mathématique.

Pour des personnes qui sont rompues à ce langage, le plus rapide est de donner les équations paramétriques de l'hélice. Le plus souvent, on ne donne pas son groupe dans ce contexte mais c'est facile à faire. Tout ceci touche à une des questions les plus délicates de la géométrie scolaire qui est l'enroulement de la droite réelle sur le cercle. A mon sens, et à la suite d'un didacticien du Freudenthal Instituut dont le nom m'échappe à cet instant, il est didactiquement judicieux de voir d'abord le cercle C bien sûr, puis l'hélice "suspendue" au-dessus de C. Et puis, viennent l'enroulement de la droite réelle sur C, les fonctions trigonométriques, la mesure des angles ...

Je ne développe pas ce thème qui m'écarte de mon sujet.

Quel est le groupe H de l'hélice ? D'abord, observons que l'hélice peut-être orientée de deux manières comme la droite. Un élément du groupe conserve ces deux "sens" ou les renverse, les échange. Les éléments qui conservent chaque sens constituent un sous-groupe H+ qui est strictement transitif sur les points de l'hélice. Ce sont des vissages comprenant des translations. Ce groupe est isomorphe au groupe additif des réels. Il est recommandé de visualiser cet isomorphisme en appliquant les translations sur les nombres entiers. Ce groupe est d'indice deux dans H.

Quels sont les éléments qui jouent le rôle de "retournements" ? Ce sont des déplacements de l'espace !
Si p est un point de l'hélice, considérons la perpendiculaire P à l'axe de l'hélice passant par p. Le demi-tour d'axe P est une rotation qui conserve l'hélice. Nous l'observons. Nous ne le démontrons pas faute d'avoir défini rigoureusement l'hélice. Mais c'est simple si on dispose des équations paramétriques.
Il n'est pas difficile de prouver que H ne contient aucun autre élément que les vissages et translations conservant chaque sens et les demi-tours qui renversent le sens.
En résumé, l'hélice est une figure chirale.

7.6 Double hélice
La double hélice est-elle chirale ? On le dit. Comment s'en convaincre ?
Partons d'une hélice L et de son axe A. Le demi-tour (rotation) r d'axe A transforme L en une hélice K. La double hélice est la réunion de L et K.
Quel en est le groupe?
Observons physiquement que K est en quelque sorte le "milieu" de L et réciproquement.
Le groupe H obtenu comme groupe de l'hélice L est également le groupe de K.
Il est d'indice deux dans le groupe 2H de la double

hélice.
Les éléments de 2H qui échangent L et K sont ceux de la classe gauche rH. Il y a des vissages et des translations.
Il y a des demi-tours qui sont les produits de r et des demitours conservant L.
En fin de compte, le groupe 2H de la double hélice ne contient aucun retournement de l'espace.
Donc, la double hélice est une figure orientée, chirale.

7.7 Et un vissage ?
Considérons un déplacement de l'espace qui est un vissage v=rt=tr où t est une translation non-identique et r une rotation non-identique d'axe A invariant par t.
La droite A est conservée par v.
C'est la seule (prouvez-le).
Sur A, le vissage induit une translation qui est t.
Le vissage v est-il une figure orientée ou non ?
Considérons un retournement hypothétique h de l'espace qui conserve v.
Alors h conserve A. De plus, h conserve t. Donc h conserve r.
En raison de la conservation de r, nos méthodes permettent de montrer que h est la composée d'une rotation q d'axe A et d'une symétrie bilatérale s d'axe perpendiculaire à A.

Comme q conserve r, t et v, on voit que s conserve r et v.
Alors s conserve t. Ceci est contradictoire. Donc aucun retournement h ne conserve v.
En résumé, tout vissage v est orienté.
Nous avons expliqué un des faits les plus mals connus de la chiralité spatiale : une rotation est non-orientée mais un
vissage est orienté.

8. Des déplacements aux similitudes et aux affinités

8.1 Un défaut du modèle élaboré est d'être lié à un seul groupe. Dans la réalité de la géométrie nous voulons certainement expliquer les formes gauche et droite d'une famille de figures isométriques. Mais, en outre, nous aimerions être en mesure de comparer des figures semblables.

8.2 Une approche modelisée du besoin précédent est de partir des isométries et déplacements comme ci-dessus et d'y substituer ensuite un groupe plus grand que j'appelle groupe H des "similitudes" et qui est accompagné d'un sousgroupe d'indice deux H+ dont les éléments sont appelés "similitudes positives" de telle sorte que G soit sous-groupe de H et que G+ soit

l'intersection de G et H+.
J'ai sous-entendu que l'ensemble F des figures demeure le même c'est-à-dire que H soit un groupe de transformations de F. Bien entendu, pour une figure f la famille de f pourrait devenir plus grande sous l'action de H qu'elle ne l'était sous l'action de G. Il faut donc pousser cette analyse plus loin en imaginant deux familles pour f, que chacune d'elles se décompose en deux sous l'action de G+ et en deux sous l'action de H+ et que le tout ait une cohérence non précisée à cet instant.

8.3 Reprenons le cas de l'espace euclidien en supposant F connu de même que le groupe G des isométries et le groupe G+ des déplacements. Supposons connu également le groupe H des similitudes qui n'est autre que le groupe des automorphismes de l'espace de Klein (F, G, G+). Il y a des figures orientées, des éléments de F qui ont une particularité remarquable: celle d'avoir exactement la même orbite-famille sous l'action de G et sous celle de H.
Des exemples sont les drapeaux constitués d'un point p, d'une demi-droite D d'origine p, d'un demi-plan P de bord contenant D et d'un demi-espace S de bord contenant P.
Un autre exemple est le trièdre orthogonal ordonné

constitué de trois demi-droites de même origine deux à deux perpendiculaires. Ces figures méritent le qualificatif “basique”. Les deux exemples que je viens de donner ont une propriété supplémentaire (de “rigidité”) que je ne veux pas exploiter ici mais que j’énonce. Si f est une telle figure, toute similitude qui conserve f est l’identité. Si nous connaissons (F, G, G+) ainsi que les orbites M et N de f sous l’action de G+ et H, nous maîtrisons toute la chiralité correspondant à H. En effet, nous pouvons définir une similitude positive comme une similitude conservant M et N. Ensuite, nous pouvons démontrer un “Théorème 6” à savoir que les similitudes positives constituent un sous-groupe H+ d’indice deux de H.
Dans ce cas, l’espace de Klein (F, G, G+) détermine l’espace de Klein (F, H, H+).
Mieux encore: si F se réduit aux drapeaux et à leurs constituants: points, demi-droites, demi-plans, demi-espaces et à leurs inclusions, le groupe des automorphismes de cette structure est bien plus grand que le groupe des similitudes. C’est le groupe des affinités. Dès lors, nous contrôlons également les affinités positives et l’orientation affine.
Nous voyons que des notions “basiques” incluant les drapeaux, les déplacements et les similitudes permettent la définition et le contrôle de la géométrie affine et de son orientation. Elles

permettent aussi, mais c'est une autre histoire, le contrôle sur la géométrie euclidienne, sur les homothéties positives et négatives, sur la géométrie des nombres réels et bien d'autres choses. J'ai oublié d'expliciter le fait que les drapeaux et les déplacements livrent le contrôle des isométries par le biais des similitudes d'ordre deux.
Enfin, il convient d'insister sur le fait que c'est la main du paléolithique qui, par abstraction, conduit au drapeau et de répéter qu'un groupe, celui des déplacements, conduit à un groupe plus grand, celui des affinité et à l'orientation correspondante.

9. Bibliography

[Baca] Bacas (Belgian Academy Council of Applied Science). Industrial Biotechnology and sustainable chemistry. January 2004. 32 pages.
[McM] Chris McManus. Right hand, left hand. Phoenix. London. 2002.
[BuDo1] Francis Buekenhout et Jean Doyen. Ensembles structurés et groupes de symétries. Université Libre de Bruxelles. Service de Géométrie. 1988.
[BuDo2] Francis Buekenhout et Jean Doyen. Espaces euclidiens. Université Libre de Bruxelles. 1976.
[BFré] Francis Buekenhout et Monique Frédérickx.

Orientation. Colloque du CREM (2005).

Francis Buekenhout
Professeur à l' Université libre de Bruxelles
Académie Royale de Belgique
26 Drève des deux bois
B-1490 Court-St-Etienne