PROBLEMATHS
21 décembre 2012

Voici les solutions des Problemaths 7,8,9. Les prochains énoncés paraîtront au début de février 2013, après les examens de janvier.

Solution du Problemath 7 Supposons (pour rire) qu'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x)$ soit irrationnel pour tout x rationnel, et rationnel pour tout x irrationnel. Alors $f(1) \notin \mathbb{Q}$ et $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$, donc $f(1) \neq f(\sqrt{2})$ et, comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f prend toutes les valeurs réelles comprises entre $f(1)$ et $f(\sqrt{2})$. L'image de $\mathbb{R}$ par f n'est donc pas dénombrable. D'autre part, l'image de $\mathbb{Q}$ par f est au plus dénombrable (puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable) et l'image par f de l'ensemble des irrationnels est contenue dans $\mathbb{Q}$ (par hypothèse sur f). Par conséquent, l'image de $\mathbb{R}$ par f est au plus dénombrable, une contradiction.
Ont fourni une solution correcte: A. VANDENSCHRICK (BA1 maths), J. REMY (BA2 math à la VUB), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), P. DE GROEN (prof à la VUB), S. MASSON, C. VAN HOOSTE (profs de maths) et Dark Vador

Solution du Problemath 8 La conjecture est vraie pour tous les nombres premiers < 41 (par exemple , $23 = 3^3 - 2^2$, $29 = 2^5 - 3^1$, $31 = 2^5 - 3^0$, $37 = 2^6 - 3^3$). Par contre, 41 n'est pas la différence (en valeur absolue) entre une puissance de 2 et une puissance de 3 à exposants naturels. En effet, si $41 = 2^m - 3^n$ (avec $m, n \in \mathbb{N}$), alors $m \geq 3$ (car $1 - 3^n$, $2 - 3^n$ et $4 - 3^n$ sont < 41 pour tout $n \in \mathbb{N}$), donc $2^m \geq 8$ et de ce fait $41 \equiv 0 - 3^n (\text{mod } 8)$, c'est-à-dire $3^n \equiv -1 (\text{mod } 8)$. Or $3^n \equiv 1$ ou $3 (\text{mod } 8)$ selon que n est pair ou impair, d'où la contradiction.
Enfin, si $41 = 3^m - 2^n (*)$, alors $m \geq 1$ (car $41 \neq 1 - 2^n$) et $n \geq 2$ (car $41 \neq 3^m - 1$ et $41 \neq 3^m - 2$). En réduisant l'égalité (*) modulo 3, on obtient $2 \equiv -2^n \pmod 3$, c'est-à-dire $2^n \equiv 1 \pmod 3$, d'où on déduit que n est pair. D'autre part, (*) réduit modulo 4 donne $1 \equiv 3^m \pmod 4$, donc m est pair. En réduisant (*) modulo 5 avec $m = 2m'$ et $n = 2n'$, on a donc
$1 \equiv 3^{2m'} - 2^{2n'} \equiv 9^{m'} - 4^{n'} \equiv (-1)^{m'} - (-1)^{n'} \qquad \pmod 5$,
C'est-à-dire $1 + (-1)^{n'} \equiv (-1)^{m'} \equiv 1$ ou $-1 \pmod 5$, d'où la contradiction puisque $1 + (-1)^{n'} \equiv 0$ ou $2 \pmod 5$ pour tout $n' \in \mathbb{N}$.
Ont fourni une solution correcte: A. VANDENSCHRICK (BA1 maths), F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), S. MASSON, C. VAN HOOSTE (profs de maths) et Dark Vador

Solution du Problemath 9 Soit A_n une matrice $n \times n$ dont les coefficients a_{ij} sont choisis au hasard, indépendamment les uns des autres, dans l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Désignons par p_n la probabilité que le déterminant de A_n soit impair (la probabilité qu'il soit pair est donc $1 - p_n$). Comme $detA_n$ est un polynôme en les a_{ij}, si on remplace chacun des a_{ij} par sa valeur (0 ou 1) modulo 2, la valeur modulo 2 de $detA_n$ (autrement dit, la parité de $detA_n$) ne changera pas. L'ensemble E contenant autant de nombres pairs que d'impairs, le problème se ramène donc à calculer p_n pour une matrice A_n dont les coefficients sont choisis au hasard, indépendamment les uns des autres, dans le corps $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ des entiers modulo 2.
On sait que $detA_n$ est non nul si et seulement si A_n est inversible. Par conséquent, pour calculer p_n, il suffit de diviser le nombre de matrices inversibles $n \times n$ sur $\mathbb{Z}_2$ par le nombre de matrices $n \times n$ sur $\mathbb{Z}_2$(qui vaut trivialement $2^{n \times n}$). A_n est inversible si et seulement si ses lignes sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire forment une base de $(\mathbb{Z}_2)^n$. Or le nombre de $n-$uples de vecteurs de $(\mathbb{Z}_2)^n$ formant une base vaut (exercice facile)

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}),$$

donc $p_n = \dfrac{1}{2^{n \times n}} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{2^i})$.

Pour $n = 10$, on obtient la réponse au problème posé, à savoir $1 - p_{10} = 0,7109297\dots$

Ont fourni une solution correcte: J. REMY (BA2 maths à la VUB), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), M. D'ADDERIO (prof au Dépt de maths), P. DE GROEN (prof à la VUB), S. MASSON, C. VAN HOOSTE (profs de maths).

La pensée du jour

"It seems that if one is working from the point of view of getting beauty in one's equations, and if one has really a sound insight, one is on a sure line of progress"(Paul DIRAC, physicien anglais, 1902-1984)

Toute l'équipe Problemath vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année!

Adieu $1234 - 5 - 6 + 789$

Bonjour $12 + 3/4 \times 5 \times 67 \times 8 - 9$

$= 12/34 \times 5678 + 9$

$= 12 + 345 \times 6 - 78 + 9$