PROBLEMATHS
18 octobre 2013

ÉNONCÉS

Problemath 4

-"Quelle heure est-il, Emile?"
-"Tu vas le savoir, Edouard. Chacune des deux aiguilles de ma montre se trouve exactement sur une des 60 subdivisions du pourtour. Quand j'ai regardé l'heure ce matin, l'aiguille des heures était à l'endroit où se trouve actuellement l'aiguille des minutes, et l'aiguille des minutes était une subdivision en retard par rapport à l'endroit où se trouve actuellement l'aiguille des heures."
Quelle heure est-il donc?

Problemath 5

On sait que dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. Est-il vrai que dans tout tétraèdre rectangle (c'est-à-dire tout tétraèdre $ABCD$ tel que les trois faces contenant le sommet A soient perpendiculaires deux à deux), le carré de l'aire de la face BCD est égal à la somme des carrés des aires des faces ABC, ACD et ABD?

Problemath 6

Quelles sont les solutions réelles de l'équation $sinx.cos^2x.tg^3x.cotg^4x.sec^5x.cosec^6x = \frac{256}{27}$?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **vendredi 8 novembre à 14h** (date limite à respecter impérativement!)

Solution du Problemath 1: Il n'existe pas de polynôme $p(x)$ à coefficients entiers tel que $p(2013) = 1789$ et $p(1515) = 1830$.
En effet, si un tel polynôme existait, voici deux raisonnements courts et élégants menant à une contradiction :
(1) (Cédric DE GROOTE) Ecrivons $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Puisque $a - b|a^k - b^k$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a donc $a - b|p(a) - p(b) = \sum_{k=1}^{n} c_k(a^k - b^k)$. Dès lors $2013 - 1515|1789 - 1830$, c'est-à-dire $498| - 41$, une contradiction.
(2)(Pieter DE GROEN) Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, on sait que $a \equiv b \pmod{m}$ implique $p(a) \equiv p(b) \pmod{m}$. En travaillant modulo 2, on obtient $p(1) \equiv p(2013) = 1789 \equiv 1 \pmod 2$ et $p(1) \equiv p(1515) = 1830 \equiv 0 \pmod 2$, une contradiction.

Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 3ème latin-math), D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de la Louvière), V. COUPLET (élève de 5ème à l'Institut Vallée Bailly à Braine l'Alleud), P. BUSTILLO (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), G. BALINT, N. MEYNAERT (BA1 maths), D. JANSSENS (BA1 maths à la VUB), E. GRUWÉ, M. MOGHADDAMFAR(BA1 polytech), D. LONGRÉE, A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), L. SCHOPEN(BA2 maths à Cambridge),C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA2 maths), N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths), O. DECKERS, P.DE GROEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), M. LEOTARD (prof d'économie), W. DE DONDER, K. MADRANE (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 2: Soit $[A, B]$ la diagonale autour de laquelle tourne le rectangle et soit Δ un demi-plan de bord AB. L'intersection de Δ avec le solide de révolution est la réunion de deux triangles rectangles ABC et ABC' symétriques par rapport à la médiatrice de leur hypoténuse commune $[A, B]$. Les longueurs des côtés de ces triangles sont a, b et $c = \sqrt{a^2+b^2}$ (on suppose $a \geq b$). Soit H le pied de la hauteur abaissée de C sur $[A, B]$. Un raisonnement élémentaire par triangles semblables montre que $|CH| = ab/c$ et que la distance du milieu de $[A, B]$ au point d'intersection des côtés de longueur a dans ABC et ABC' vaut $bc/2a$. Chacun des triangles ABC et ABC' engendre, en tournant, deux cônes dont les bases sont des disques de rayon ab/c et dont la somme des hauteurs vaut c. D'autre part, l'intersection de ces deux triangles dans le demi-plan Δ engendre, en tournant, deux cônes de hauteur $c/2$ dont les bases sont de rayon $bc/2a$. On en déduit que le volume cherché V du solide de révolution vaut

$$V = 2\frac{\pi}{3}\left(\frac{ab}{c}\right)^2 c - \frac{\pi}{3}\left(\frac{bc}{2a}\right)^2 c$$

Ce qu'on peut réécrire par exemple

$$V = \frac{\pi b^2}{12a^2}.\frac{8a^4 - \left(a^2+b^2\right)^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\pi b^2}{12a^2}.\frac{7a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 3ème latin-maths), D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de la Louvière), P. BUSTILLO (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), N. MEYNAERT (BA1 maths), P. BAUDOUX, E. GRUWÉ, M. MOGHADDAMFAR (BA1 polytech), A. VANDENSCHRIK (BA2 maths), L. SCHOPEN (BA2 maths à Cambridge), M. SIMONS, J. CARTRY (BA2 ing. indust. à Arlon), F. THILMANY (MA2 maths), N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths), O. DECKERS, P. DE GROEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER, K. MADRANE (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 3: Voici la solution courte et élégante de Saji MASSON et DARK VADOR :
La différence d_n du nombre de chiffres de q_n et p_n en base 10 vaut $d_n = \lfloor log_{10}(2n) \rfloor$ (pour tout nombre réel r, $\lfloor r \rfloor$ désigne le plancher de r, c'est-à-dire le plus grand entier $\leq r$). En effet, pour tout $n > 1$, p_n s'obtient en écrivant $2n-1$ à la droite de p_{n-1}, et q_n en écrivant $2n$ à la droite de q_{n-1}. Or, en base 10, $2n$ a toujours zéro ou un chiffre de plus que $2n-1 < 2n$ et il en a exactement un de plus si et seulement si $2n$ est une puissance de 10. Donc d_n est égal au nombre de puissances de 10 inférieures ou égales à $2n$, c'est-à-dire $d_n = \lfloor log_{10}(2n) \rfloor$. Comme $0 < \frac{p_n}{q_n} < 10.10^{-d_n}$ et que d_n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, $\frac{p_n}{q_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
DARK VADOR a prouvé qu'il en est de même si on travaille dans une base b paire quelconque plutôt qu'en base 10. Par contre, si b est impaire, la suite $\frac{p_n}{q_n}$ a une limite strictement comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1 lorsque n tend vers l'infini.

Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de la Louvière), P. BUSTILLO (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), N. MEYNAERT (BA1 maths), A. VANDENSCHRIK (BA2 maths), L. SCHOPEN (BA2 maths à Cambridge), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA2 maths), N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths), O. DECKERS, A. JAECKEL, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), M. LEOTARD (prof d'économie), W. DE DONDER, K. MADRANE (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et DARK VADOR.

La pensée du jour
"La liberté de chercher est essentielle et la recherche fondamentale est cruciale pour déboucher sur des recherches appliquées. Elle fait appel à notre créativité et, si on la bride en exigeant des perspectives à court terme, elle ne va devenir qu'une copie démodée, elle va bégayer et s'assécher". (François ENGLERT, physicien belge de l'ULB, Prix Nobel de Physique en 2013).