ULB

PROBLEMATHS
23 décembre 2013

Voici les solutions des Problemaths 7,8,9. Les prochains énoncés paraîtront au début de février 2014, après les examens de janvier.

__**Solution du Problemath 7**__ : Posons $a = 2013$, $b = 2014$. Les entiers $n > 0$ tels que $(a + \frac{1}{2})^n + (b + \frac{1}{2})^n$ est un entier sont exactement ceux pour lesquels 2^n divise $(2a+1)^n + (2b+1)^n$. Si n est pair, alors $(2a+1)^n$ et $(2b+1)^n$ sont des carrés de nombres impairs, donc sont $\equiv 1(\text{mod } 4)$. Par conséquent,$(2a+1)^n + (2b+1)^n$ $\equiv 2(\text{mod } 4)$ n'est pas divisible par 4, donc a fortiori n'est pas divisible par 2^n avec n pair ≥ 2.
Si n est impair, alors la factorisation bien connue $x^n+y^n = (x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+y^{n-1})$ donne, en prenant $x = 2a+1$ et $y = 2b+1$, $(2a+1)^n + (2b+1)^n = (2a+2b+2)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(2a+1)^{n-1-i}(2b+1)^i\right)$.
La somme dans le second facteur comporte un nombre impair de termes impairs, donc ce second facteur est impair. Par conséquent, les entiers n impairs > 0 tels que 2^n divise $(2a+1)^n + (2b+1)^n$ sont ceux pour lesquels $2^n|2a + 2b + 2 = 8056 = 2^3.1007$. Les entiers n cherchés sont donc 1 et 3.
__**Ont fourni une solution correcte**__ : D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), G. BALINT (BA1 maths), A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), P. DE GROEN, C. LARIVIERE, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur) et DARK VADOR.

__**Solution du Problemath 8**__ :Dans les cas (A) et (C), il est facile de se ramener à un seul tas en un nombre fini d'étapes. Par contre, c'est impossible dans les cas (B) et (D). En effet, deux tas contenant respectivement a et b allumettes (avec $a \leq b$) vont contenir, après application des règles du jeu, $a' = 2a$ et $b' = b-a$ allumettes (avec éventuellement $b' = 0$). Si un entier impair d divise à la fois a' et b', il divise aussi a (car d divise $2a$ et d est impair) et b (car $b = b' + a$ et on sait que d divise b' et a). Par conséquent, si un entier impair d divise tous les cardinaux des tas à une étape du jeu, d divisait également tous les cardinaux des tas à l'étape précédente. On en déduit une condition nécessaire pour que n tas, de cardinaux respectifs $x_1, \ldots, x_n$, puissent se ramener à un seul tas en un nombre fini d'étapes : il faut que tout diviseur impair de $S = x_1 + \cdots + x_n$ soit un diviseur de chacun des x_i. Dans le cas (B), $S = 40$ est divisible par 5 qui ne divise ni 17, ni 4, ni 9. Dans le cas (D), $S = 49$ est divisible par 7 qui ne divise aucun des x_i. En fait, on peut démontrer que la condition nécessaire énoncée ci-dessus est aussi suffisante.
__**Ont fourni une solution correcte**__ : D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), O. TYERS (élève de 6ème à l'International School of Brussels), G. BALINT, N. MEYNAERT (BA1 maths), D. LONGRÉE (BA2 maths), P. DE GROEN, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths) et DARK VADOR.

__**Solution du Problemath 9**__ : Quel que soit le point $x \in]a, b[$, les disques Γ_1 et Γ_2 ont la même aire! Ce résultat est dû à ARCHIMÈDE (mathématicien et physicien grec du 3ème siècle avant J.C.). Dans son ouvrage "Les Lemmes", il étudie les propriétés du triangle curviligne défini dans l'énoncé, triangle qu'il appelle __arbelos__ ("couteau de cordonnier" en grec) car, si x est le milieu de $[a, b]$, ce triangle a la forme de la lame d'un tel couteau. Voici, à quelques détails près, la démonstration originale d'ARCHIMÈDE (qui ne disposait pas des outils de la géométrie analytique) :
Désignons par c, c_1 et d les points de tangence de Γ_1 avec C, C_1 et D respectivement. Soient e le point d'intersection des droites ac et D, f le point d'intersection de ad avec le bord de C, et $[d, d']$ le diamètre de Γ_1 issu de d. Les droites ab et dd' sont parallèles, car perpendiculaires à D. Le disque Γ_1 étant tangent en c au disque Γ de diamètre $[a, b]$, il existe une homothétie de centre c appliquant Γ_1 sur Γ, donc aussi $[d, d']$ sur le diamètre de Γ parallèle à $[d, d']$, c'est-à-dire sur $[a, b]$. Il en résulte que les points c, d', a sont alignés, de même que c, d, b. Un argument analogue montre que c_1, d, a sont alignés, de même que c_1, d', x.
Dans le triangle abe, $bc\perp ae$ (car l'angle $\widehat{acb}$ est inscrit dans un demi-cercle) et $ex\perp ab$. Comme les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes, on en déduit que $ad\perp be$ et, comme $ad\perp bf$ (l'angle $\widehat{afb}$ est inscrit dans un demi-cercle), il en résulte que les points b, f, e sont alignés.
Les droites xd' et be sont parallèles (car perpendiculaires à af), donc $\frac{|ab|}{|bx|} = \frac{|ae|}{|ed'|}$. D'autre part, dans les

triangles semblables axe et $d'de$, $\frac{|ae|}{|ed'|} = \frac{|ax|}{|d'd|}$. Donc $\frac{|ab|}{|bx|} = \frac{|ax|}{|dd'|}$, autrement dit $|ax||bx| = |ab|\delta_1$, où δ_1 est le diamètre de Γ_1. Les mêmes arguments appliqués à Γ_2 montrent que $|ax||xb| = |ab|\delta_2$ où δ_2 est le diamètre de Γ_2.
En conclusion, $\delta_1 = \delta_2$ et Γ_1 a donc la même aire que Γ_2.
Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), G. BALINT (BA1 maths), E. GRUWÉ (BA1 polytech), P. DE GROEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), M. LÉOTARD (prof d'économie), W. DE DONDER (ingénieur) et DARK VADOR.

Addendum : Le Problemath 6 avait également été résolu par G. MUKENDI TSHISUAKA (BA2 polytech).

La pensée du jour
"Ce n'est pas la connaissance, mais l'apprentissage, ce n'est pas le résultat, mais le chemin pour y arriver, qui procure le plus grand plaisir" (Carl Friedrich GAUSS, mathématicien allemand, 1777-1855, dans une lettre à BOLYAI en 1808)

Toute l'équipe Problemaths vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année!
Adieu $12 + 345 \times 6 - 78 + 9$
Bonjour $123 + 45 \times 6 \times 7 - 8 + 9$