PROBLEMATHS
21 MARS 2014

Voici les solutions des 3 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année. :

Solution du Problemath 10. La suite des u_n est strictement croissante : en effet, $u_1 = \sqrt{2} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = u_2$ et , en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (\sqrt{2})^{u_{n+1}} > (\sqrt{2})^{u_n} = u_{n+1}$. De plus, elle est bornée supérieurement par 2: en effet, $u_1 = \sqrt{2} < 2$ et, par récurrence, $u_{n+2} = (\sqrt{2})^{u_{n+1}} < (\sqrt{2})^2 = 2$. Cette suite converge donc vers un nombre réel x qui est tel que $(\sqrt{2})^x = x$, c'est-à-dire $\sqrt{2} = x^{1/x}$. La fonction $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to x^{1/x}$ a comme dérivée $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - lnx)x^{1/x}$; elle est donc strictement croissante pour $x < e$, atteint son maximum en $x = e$ et est strictement décroissante pour $x > e$. De ce fait, la fonction f prend au plus deux fois toute valeur donnée. On voit immédiatement que $x = 2$ et $x = 4$ vérifient l'équation $x^{1/x} = \sqrt{2}$. Comme la suite des u_n est bornée supérieurement par 2, on en conclut que $x = 2$ est la limite cherchée. Ce genre de problème a été traité pour la première fois par Euler en 1778.
Ont fourni une solution correcte : P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), E. GRUWÉ (BA1 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), P. DE GROEN, A. JAECKEL, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 11. On ne restreint pas la généralité en supposant que les sommets du carré C occupés au départ par les 4 puces ont pour coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. Ce carré est la maille élémentaire du réseau $\mathbb{Z}^2$ des points à coordonnées entières dans le plan $\mathbb{R}^2$. Si a et b sont deux points quelconques de $\mathbb{Z}^2$, le symétrique de a par rapport à b est encore un point de $\mathbb{Z}^2$. De ce fait, quels que soient les sauts effectués par les puces, elles se trouveront toujours sur des points de $\mathbb{Z}^2$. En particulier, elle ne pourront jamais occuper les sommets d'un carré plus petit que C, puisqu'un tel carré n'existe pas dans $\mathbb{Z}^2$. Mais, direz-vous, ceci empêche-t-il les puces d'occuper dans le futur les sommets d'un carré C' plus grand que C? L'observation cruciale très simple est que les sauts de puce sont réversibles : un saut de puce effectué à l'envers est toujours un saut de puce. Par conséquent, si les puces occupaient à un moment donné dans le futur les sommets d'un carré C' plus grand que C, en renversant le processus, elles reviendraient dans le passé sur les sommets du carré C qui est plus petit que C', et on vient de montrer que c'est impossible.
Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), G. BALINT (BA1 maths), E. GRUWÉ, M. MOGHADDAMFAR (BA1 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), P. DE GROEN, A. JAECKEL (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère) et DARK VADOR.

Solution du Problemath 12. Remarquons d'abord qu'une sphère S de $\mathbb{R}^3$, dont on a retiré deux points distincts p et q, admet une partition en cercles : il suffit de considérer la droite D intersection des plans tangents à S en p et q et les plans par D qui coupent S en des cercles (si p et q sont diamétralement opposés sur S, on prendra évidemment les plans parallèles aux plans tangents en p et q).
Considérons à présent, dans le plan oxy de $\mathbb{R}^3$, l'ensemble E des cercles de rayon 1 centrés en les points de l'axe ox ayant une abscisse entière $x \equiv 1(\text{mod } 4)$, autrement dit les points $\ldots, (-7,0,0), (-3,0,0), (1,0,0), (5,0,0), (9,0,0), \ldots$ Il est facile de vérifier que toute sphère centrée en $(0,0,0)$ a exactement deux points communs avec la réunion de ces cercles. En retirant ces deux points de chacune de ces sphères, on peut, comme on l'a vu plus haut, partitionner le reste en cercles. Il suffit alors d'adjoindre à ces cercles ceux de l'ensemble E pour obtenir la partition demandée de $\mathbb{R}^3$.
Cette construction, due à A. Szulkin, est parue dans l'American Math. Monthly 90 (1983), 640-641. On peut prouver (mais c'est plus difficile) que $\mathbb{R}^3$ peut être partitionné
a) en cercles ayant tous le même rayon
b) en cercles tels que tout nombre réel> 0 soit le rayon d'un et un seul de ces cercles.
Pour plus d'informations, voir l'article de M. Jonsson et J. Wästlund "Partitions of $\mathbb{R}^3$ into curves", Math. Scandinavica 83 (1998), 192-204.

Ont fourni une solution correcte : G. BALINT (BA1 maths), A. VANDENSCHRICK (BA2 maths), N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths), P. DE GROEN, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur) et DARK VADOR.

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des Problemaths 2013-2014 :

- A résolu 12 Problemaths : DARK VADOR, qui se voit attribuer le titre convoité d'Hyperproblematheur intégral non borné au sens de Schpotzermann et Wienerschnitzel.
- Ont résolu 11 Problemaths : P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), A. VANDENSCHRICK (BA2 maths) et P. DE GROEN (prof de maths à la VUB)
- Ont résolu 10 Problemaths : Y. SUPRIN (prof de maths) et W. DE DONDER (ingénieur).
- Ont résolu 9 Problemaths : D. GALANT (élève de 4ème à l'Athénée de La Louvière), G. BALINT (BA1 maths) et A. JAECKEL (prof de maths).
- A résolu 8 Problemaths : C. LARIVIERE (prof de maths).
- Ont résolu 7 Problemaths : N. MEYNAERT (BA1 maths), E. GRUWÉ (BA1 polytech), O. DECKERS et H. VERMEIREN (profs de maths).
- Ont résolu 6 Problemaths : N. BAYEKULA (ancien étudiant en maths) et P. BARBIER (software engineer à Seattle)..
- Ont résolu 5 Problemaths : M. MOGHADDAMFAR (BA1 polytech), L. SCHOPEN (BA2 maths à Cambridge), C. DE GROOTE (MA2 maths) et K. MADRANE (ingénieur).
- Ont résolu 4 Problemaths : A. JORISSEN (élève de 3ème latin-maths), D. LONGRÉE (BA2 maths), J. CARTRY (BA2 ing. indust. à Arlon) et P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).
- Ont résolu 3 Problemaths : F. THILMANY (MA2 maths), S. MASSON (prof de maths), M. LÉOTARD (prof d'économie)et V. I. ARNOLD (mathématicien russe).
- Ont résolu 2 Problemaths : V. COUPLET (élève de 5ème à l'Institut Vallée Bailly à Braine l'Alleud), C. MULLER (BA2 maths) et A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère).
- Ont résolu 1 Problemath : O. TYERS (élève de 6ème à l'International School Brussels), D. JANSSENS (BA1 maths à la VUB), P. BAUDOUX (BA1 polytech), X. MAUQUOY (BA2 maths) et M. SIMONS (BA2 ing. indust. à Arlon).

  Tous ces problematheurs et problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le mercredi 30 avril à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus Plaine, Boulevard du Triomphe).