Cahiers du Centre de logique
Volume 12

La dualité en géométrie projective

par

Fr. Buekenhout
Université libre de Bruxelles

1. Introduction

1.1. Je remercie Paul van Praag qui a eu l'idée d'une belle journée sur diverses facettes de la dualité et qui m'a poussé dans un exposé exaltant autour d'une grande partie de mon temps de professeur et de chercheur durant 40 ans.

1.2. L'idée de dualité est effectivement présente dans une grande partie des mathématiques. Elle pourrait figurer dans une nouvelle mouture du *Fascicule de résultats de théorie des ensembles* de Bourbaki.

1.3. En ce qui concerne la dualité en géométrie projective, mon exposé en esquisse tout au plus l'histoire. J'ai de nombreuses questions et je serai heureux de bénéficier d'aides diverses. Le sujet requiert notamment une histoire de la géométrie projective. C'est immense. Je tente de couvrir une période invraisemblable dans le temps. La période que je connais le mieux est le 20e siècle. La période qui domine l'exposé est le 19e siècle. L'âge d'or de la dualité projective couvre ces deux siècles. Ce propos peut surprendre les tenants d'un stéréotype ayant la vie dure et selon lequel la géométrie projective serait morte au début du 20è siècle. Je me base sur ma mémoire d'une foule de lectures et de réflexions. À mon sens, l'histoire n'est pas une reconstitution du passé mais une construction. Une construction qui part des documents de tous ordres, qui doit y revenir et qui doit se soumettre à la cohérence.

1.4. Gauche-droite et haut-bas

Au début de 2001(voir [8]) j'ai fait, pour la première fois en ce qui me concerne, un rapprochement entre la chiralité et la dualité. J'ai tendance à voir la dualité en termes de haut-bas. La structure projective est basée sur une hiérarchie, un ordre partiel concernant les points, puis les droites, puis les plans, etc. et la dualité consiste à observer qu'en renversant le haut et le bas, en décidant que les premiers seront les derniers, la structure demeure la même : le dual d'un espace projectif lui est isomorphe.

Pour que cette affirmation soit vraie, il convient de prendre une série de précautions. Je serais le premier à expliquer que c'est faux. Mais l'idée est bien là. Une explication commune partielle aux deux dualités est la présence d'un groupe d'automorphismes et d'un sous-groupe (d'où le haut et le bas). Il est possible de creuser davantage. Dans les deux cas, un rôle majeur est joué par les involutions, les éléments d'ordre deux, qu'on appelle les polarités en dualité projective. Un rôle tout aussi majeur est forcément joué par le centralisateur d'une polarité. Ceci débouche sur les groupes classiques : groupes orthogonaux, symplectiques, unitaires.

Mais redescendons sur terre.

1.5. Le point majeur : bousculer Euclide

Dans un plan projectif convenable, le point et la droite ont au fond les mêmes propriétés. Voilà une conclusion d'une audace extraordinaire à laquelle sont arrivés les géomètres du début du 19e siècle, surtout Gergonne et Poncelet en 1825. Il a fallu bousculer ce monument d'entre les monuments que sont les *Eléments* d'Euclide, de deux façons au moins. D'abord, il a fallu rompre peu à peu avec l'idée millénaire d'un plan et d'un espace uniques. Ceci mériterait une analyse serrée de textes durant la période couverte par le travail de Chemla-Pahaut [11] soit 1753–1826 environ. Un des moteurs de la nécessité des points à l'infini fut, j'en suis convaincu, le théorème de Bézout (1730–1783) sur les courbes algébriques qui est lui-même une sorte d'axiome de la géométrie algébrique, une propriété dont on ne peut et ne veut pas se passer. Il émerge vers 1770, une date on ne peut plus vague pour un sujet mouvementé. Sa démonstration n'est pas maîtrisée avant 1874 avec Halphen (1844–1889). Une géométrie projective plane se constitue donc et s'impose avec le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet en 1822. Il faudra longtemps encore pour que le concept de plan projectif soit clairement et consciemment achevé. Sur un plan structurel, indépendant de coordonnées, il faut attendre les années 1890. Le processus atteint sa complète maturité dans le traité de Veblen et Young en 1910.

Il faut donc une très longue genèse pour disposer d'un ingrédient de base du principe de dualité : le concept de plan projectif. Au passage, s'est évacuée une difficulté majeure : la continuité. On a découvert que le fonctionnement de la géométrie projective n'exige pas la continuité. Dans notre langage algébrique, on est passé du corps des réels à un corps quelconque. Ceci est bien digéré par Veblen et Young dans [30]. Le terme de corps n'est pas utilisé mais le concept est clairement défini. Ce fait est inconnu dans l'histoire de l'algèbre et de la notion de corps du moins à ma connaissance. Ensuite, il a fallu contredire les axiomes d'Euclide selon lesquels le point est ce qui n'a pas de parties alors qu'une droite est implicitement un ensemble de points. Comment un point seul d'une part et un ensemble infini d'autre part pourraient-ils avoir les mêmes propriétés ?

1.6. La relation avec l'algèbre : la sesquilinéarité

Mon sujet est inséparable de l'algèbre et ceci à toutes les époques.

Il convient de rappeler qu'un espace projectif peut se dériver d'un espace vectoriel sur un corps (non nécessairement commutatif). Il convient de rappeler qu'il y a une théorie de la dualité dans un espace vectoriel, que tout espace vectoriel possède un espace dual, que la dimension peut être infinie et qu'alors cette dimension n'est pas invariante par dualité. Il convient de rappeler que le corps de base possède lui-même un corps dual, souvent mais pas toujours isomorphe au premier. Il convient de rappeler qu'un corps peut posséder des anti-automorphismes, qu'un espace vectoriel peut s'équiper d'une forme sesquilinéaire. Il convient de rappeler les anti-automorphismes involutifs et les formes sesquilinéaires réflexives.

Tout ce qui précède est ce que j'appelle la *sesquilinéarité*. On ne peut pas étudier la dualité projective en ignorant ce concept. Tel que nous le connaissons il est arrivé à maturité dans un travail publié en 1936 par G. Birkhoff (1911–) et von Neumann (1903–1957) [5] et consacré à la logique de la mécanique quantique. Cela peut surprendre. J'ai dit qu'on ne peut pas éviter la sesquilinéarité. Elle n'était cependant pas accomplie au début et notre esquisse historique peut redescendre sur terre : une fois de plus. J'aurais dû dire aussi que les espaces projectifs sont inséparables des espaces vectoriels et de la *linéarité*. La réciproque devrait être respectée mais elle est loin de l'être.

1.7. Influence sur la logique.

Je cite J. J. Gray [16].

> In one of the few major papers in our subject ([21]), Ernest Nagel explored what he believed to be the connection between modern geometry and the rise of modern logic. It was his thesis that projective geometry, with its striking duality between points and lines in the plane, made it difficult for the more critically aware mathematicians to leave geometry resting on an intuitive base. Nagel argued that the example of geometry was vitally important in moving mathematicians away from believing that their subject rested on a careful mode of abstraction, and towards believing that what made mathematics work was its mode of reasoning. In short, that projective geometry pushed Pash, Peano, and Hilbert towards abstract axiomatics, which, when Nagel was writing, was the language of the mathematical gospel.

2. Germes de dualité en géométrie élémentaire

2.1. Tous les polygones exhibent de façon criante et je crois explicite une dualité sommet-côté qui remonte à la préhistoire. Cette dualité va et vient. Dans la scolarité, elle se détruit souvent, on y revient, elle se détruit. Il faut se souvenir qu'un point et une droite sont des êtres qu'il est difficile de mettre sur un pied d'égalité.

2.2. Chez Apollonius, nous rencontrons évidemment la relation point-tangente du cercle et plus généralement, des coniques. On rencontre la polaire d'un point. Et le conjugué harmonique qui représente pour nous la notion de polarité sur une droite projective.

2.3. Dans le livre XIV des *Eléments* d'Euclide, un ajout postérieur, nous découvrons l'octaèdre inscrit dans un cube.

2.4. Kepler (1619) étudie les polyèdres réguliers et distingue des polyèdres mâles et femelles.

2.5. La fameuse formule d'Euler est un magnifique exemple implicite de dualité point-plan.

2.6. L'espace euclidien vu par Poncelet est, dans notre langage, un espace affin réel muni à l'infini d'une polarité sans points absolus. Le plan à l'infini de l'espace euclidien est aussi le plan elliptique de la géométrie non-euclidienne qui sera reconnu comme tel fort brièvement par Riemann (1853) puis Klein. La sphère de la trigonométrie sphérique est un revêtement double du plan elliptique.

3. Gergonne et Poncelet : le principe de dualité

3.1. La montée de la dualité au travers de la trigonométrie sphérique est brillamment et minutieusement analysée par Chemla et Pahaut, dans leur exposé de ce jour et dans des articles publiés en 1988 et 1989. Je dois beaucoup à ces travaux pour comprendre la démarche de Gergonne. Il convient de citer également Geymonat [15].

3.2. Gergonne (1771–1859) s'est longuement convaincu du principe de dualité compris par l'interchangeabilité des mots point et droite dans divers énoncés en prouvant de manière explicite et côte à côte une foule d'énoncés. De nos jours, une définition axiomatique de plan projectif conduit à un énoncé immédiat du principe de dualité ou plutôt d'un théorème de dualité. Pourquoi ce terme de principe qui semble ressortir plutôt à la physique et pas plutôt le terme de théorème ? Parce que, la structure à laquelle s'applique la dualité n'était pas dégagée. Il ne me semble pas douteux que la dualité a aidé la structure à se dégager. Pour en revenir à Gergonne, il ne pouvait pas démontrer le principe de dualité parce qu'il n'avait pas la définition d'un plan projectif.

3.3. De nos jours, on définit les plans projectifs par des axiomes simples. Cela remonte aux années 1890-1910. On peut dès lors définir le plan dual de tout plan projectif. Toute propriété du premier possède une duale dans le plan dual. Ce sont deux expressions légèrement différentes du principe de dualité. Attention : le dual d'un plan projectif n'est pas forcément isomorphe à celui-ci. Donc, dans un plan, une propriété peut être vraie sans que sa duale le soit. Sa duale est vraie dans le plan dual.

3.4. Autre remarque : les axiomes traditionnels de plans projectifs écartent souvent et à tort, le plus petit d'entre eux qui est le triangle comme par hasard. Ce rapprochement et son importance sont dûs à Tits (1930–) en 1962 dans la fondation de la théorie des immeubles. Voir [22]. Soit dit en passant, la théorie des immeubles est un des prolongements naturels de la géométrie projective et la dualité s'y retrouve profondément. Permettez-moi d'insister par une citation de Shreeram S. Abhyankar [1] :

> . . . even a great man like Zariski can be wrong once. I was referring to the assertion which he made to me at the end of his projective geometry course that projective geometry was a beautiful but dead subject and that it was not worth doing research in it. As I have just pointed out projective geometry had a robust rebirth around 1960.

La nouvelle robustesse de la géométrie projective vers 1960 n'est rien d'autre que la théorie des immeubles de Tits.

3.5. En 1806, Brianchon (1785–1864) découvre le théorème sur les hexagones circonscrits à une conique : c'est le dual du théorème de Pascal. Je n'ai pas vu son travail. Il me paraît essentiel. Comment lui est venue l'idée ? Quel était l'état de la dualité dans les cours suivis par cet étudiant ?

3.6. Poncelet (1788-1867) a développé la théorie des pôles et polaires par rapport à une conique dans son traité de 1822. Dans notre langage, il a exploré une polarité, un anti-automorphisme d'ordre deux du plan projectif réel-complexe. Il a montré que ce plan est self-dual. La querelle l'ayant opposé à Gergonne sur le fait de savoir quel est le bon point de vue : le principe de dualité ou l'existence d'une dualité par les pôles et polaires doit à mon sens se conclure en disant que chaque adversaire a raison et qu'ils apportent des éléments complémentaires. La théorie des pôles et polaires a elle-même une histoire élaborée qui débute chez Apollonius et qui mériterait une étude serrée. Les polarités ont une importance centrale dans la théorie des immeubles. Ce n'est pas un sujet anodin.

4. Plücker : les coordonnées homogènes

4.1. Une avancée majeure. J'oublie Möbius et son calcul barycentrique de 1826. Plücker (1801–1868) découvre (1829) qu'en coordonnées homogènes, une droite (du plan) possède une équation de la forme $AX + BY + CZ = 0$. La droite possède donc visiblement des coordonnées (A,B,C) qui jouent le même rôle que les coordonnées (X,Y,Z) d'un point. La dualité à la manière de Gergonne ou de Poncelet, s'éclaire. La bilinéarité éclate. Plücker s'exprime comme suit (cité d'après Coolidge [12] et traduit ici de l'allemand).

> Ce n'est qu'à la fin août 1829 … que j'ai eu l'idée de considérer les constantes dans l'équation d'une ligne droite comme coordonnées de cette ligne et de ce fait, de déterminer une courbe par une équation en ces coordonnées.

4.2. Il n'y a pas encore d'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, du moins de manière explicite, mais son projectif $P(\mathbb{R}^3)$ est bien là. Passé sous silence dans l'histoire de l'algèbre linéaire, me semble-t-il. Et dans l'histoire. La version bilinéaire du produit scalaire est présente dans l'histoire avant le produit scalaire lui-même. Stupéfiant.

5. Plücker : les courbes algébriques

5.1. Plücker exploite sa découverte. Toute courbe algébrique apparaît comme un ensemble de points mais aussi comme un ensemble de tangentes. Ainsi, la courbe possède une courbe duale. Il faut des années pour en saisir les secrets. Il découvre que la duale d'une cubique (elliptique du plan complexe) est une sextique possédant 9 points de rebroussement. Le dual d'un point de rebroussement est un point d'inflexion.

5.2. Dans la foulée si j'ose dire, il obtient les fameuses formules de Plücker. En 10 ans environ, Plücker (et d'autres il est vrai dont Poncelet) mettent la géométrie algébrique sur une piste bouleversante. Grâce aux coordonnées homogènes, à la dualité, à la formule d'Euler concernant les polynômes homogènes et grâce au théorème de Bézout. Considérons une courbe algébrique plane de degré m, de classe m^*, ayant d points doubles,

r points de rebroussement, r^* points d'inflexion et d^* bitangentes. Alors,

$$\begin{aligned} m^* &= m(m-1) - 2d - 3r \\ m &= m^*(m^*-1) - 2d^* - 3r^* \\ r^* &= 3m(m-2) - 6d - 8r \\ r &= 3m^*(m^*-2) - 6d^* - 8r^*. \end{aligned}$$

6. Grassmann et Plücker : grassmanniennes, coordonnées de Plücker, quadrique de Klein

6.1. La géométrie de dimension trois. Elle n'est jamais oubliée par les pionniers. C'est un des héritages les plus évidents du grand Monge (1746–1818). Dans ce cas, la dualité porte sur les points et les plans. La duale d'une droite est une droite. Trente ans après ses fabuleux exploits, Plücker pense bien naturellement à des coordonnées de droites dans l'espace à trois dimensions. Il y parvient. La droite de cet espace devient un point d'un espace de dimension cinq. Son œuvre est achevée par son très jeune assistant Félix Klein qui publie le livre de Plücker et qui achève le travail avec sa découverte de la quadrique de Klein dans l'espace projectif de dimension cinq. On est en 1866. Un travail plus général a été développé par Grassmann pour les sous-espaces de dimension donnée d'un espace vectoriel quelconque. Ce travail n'est pas connu par Plücker et par Klein. Nous sommes en présence des variétés grassmanniennes qui importent encore en géométrie algébrique et en géométrie d'incidence.

6.2. La quadrique de Klein occupe encore une grande importance de nos jours pour l'explication d'isomorphismes de groupes classiques et dans une foule de questions concernant les espaces polaires.

6.3. Les coordonnées homogènes, les ancêtres des espaces vectoriels de dimension trois, ouvrent les portes de dimensions plus élevées, d'espaces vectoriels quelconques. Le pas sera franchi peu à peu. Grassmann (1844 puis 1862) développe son algèbre linéaire. C'est une histoire qui s'écarte de mon sujet et qui est aujourd'hui mieux connue que celle de la dualité projective.

7. Jordan, Lie, Dickson : les groupes classiques

7.1. Algèbre, théorie des groupes, géométrie

Je reprends un thème que j'ai déjà traité dans mon histoire des espaces polaires, [7]. La dualité projective est proche des groupes ou plutôt des groupes classiques. D'abord vient un corps commutatif ou un corps qui peut être restreint de diverses manières. Ensuite vient un espace vectoriel ou projectif sur le corps de base. Puis, une forme quadratique, bilinéaire, hermitienne, etc. Je résume ces données en disant qu'elles constituent l'algèbre. Il en émerge deux tendances. En *théorie des groupes* on définit et on étudie un groupe à partir de l'algèbre et on ne s'occupe pas du reste. On obtient les groupes orthogonaux, symplectiques et unitaires. En *géométrie d'incidence,* on définit et étudie des polarités et des espaces polaires. On ne s'occupe pas du reste. En réalité, l'algèbre, la théorie des groupes et la géométrie sont étroitement liés et les liens demeurent flous pour la plupart.

7.2. La dualité projective dans les groupes finis selon Jordan [19]

Après les grands pionniers de la théorie des groupes (de substitutions) que sont Ruffini, Lagrange, Galois, Cauchy et Cayley le premier à comprendre le tout, à transférer les idées en géométrie euclidienne et à élaborer une théorie cohérente fut Jordan [19]. Son livre de 690 pages demeure une source respectée. Il construit les groupes classiques sur un corps fini d'ordre premier dans le droit fil de Galois. Il décrit et étudie successivement sous des noms qui importent peu ici, le groupe linéaire, les divers groupes orthogonaux et le groupe symplectique. À ma connaissance, c'est la première apparition explicite du groupe symplectique tous corps confondus. Il possède la réduction des formes quadratiques. Il sait de manière implicite qu'il n'y a pas de conique projective finie vide. Il n'a pas encore les groupes unitaires. Observons au passage que de nombreux collègues sont convaincus du fait que les groupes classiques sont apparus d'abord sur les réels-complexes.

7.3. Dickson [13]

Après Jordan, la grande synthèse suivante est due à Dickson. Il obtient les groupes classiques sur tout corps de Galois. Il obtient la simplicité d'un sous-groupe normal convenable. Il obtient les isomorphismes entre groupes classiques. Plus tard, les groupes classiques qui sont les groupes de la dualité furent développés de manière plus générale sur un corps quelconque par van der Waerden, puis Dieudonné [14]. C'est une apogée. Les coordonnées tendent à disparaître au profit de la structure et de la simplicité. La géométrie projective est entièrement effacée. À un moment, le mot quadrique échappe à l'attention de Dieudonné.

7.4. Algèbres

Les groupes et la géométrie sont liés à un autre type de structure à savoir les algèbres. Il convient de songer à la grande théorie algébrique des algèbres de Lie développée par Chevalley en 1955. La dualité n'est jamais loin, cette fois dans des contextes qui cessent d'être strictement projectifs.

7.5. Groupes de Lie

Un sujet lié à notre article est la théorie des groupes de Lie dont l'émergence est superbement reconstituée et contée par Hawkins [18].

8. Avènement des espaces projectifs

J'ai brièvement analysé ce sujet dans [6]. Il ne s'agit pas de la géométrie projective mais bien des espaces projectifs qui émergent durant la période 1890–1910 et dont la maturation s'est poursuivie au 20e siècle. Parmi les pionniers il convient de citer G. Peano, M. Pieri, F. Enriques, E.H. Moore, F. Schur, A.N. Whitehead et O. Veblen. Pour les remarquables développements du 20e siècle un rapport complet et général sur les fondements de la géométrie projective est [2] qui comporte de nombreuses références et coups d'œils sur l'histoire. Ce livre marque un tournant. Baer commence comme suit :

> Dans ce livre nous comptons établir l'essentielle identité structu-

relle de la géométrie projective et de l'algèbre linéaire. Bien entendu, il a été réalisé depuis longtemps que ces deux disciplines sont identiques.

La géométrie projective se conforme à l'idée de symétrie optimale du fait que des droites parallèles ne peuvent plus se distinguer de droites sécantes. Ceci requiert avant tout d'ajouter des points à l'infini à l'espace ou au plan euclidien et la longue résistance historique à ces points est toujours vivace. C'est ensuite que la difficulté suivante, un seuil épistémologique comme on dit à présent, peut être surmontée : il s'agit d'homogénéiser le nouvel espace, selon une expression de Paul Libois, à savoir de ne plus faire de différence entre les points anciens et les points à l'infini et qu'ils sont tous des points d'un être nouveau : l'espace projectif. Si ce pas est accompli, une plus grande symétrie est accomplie, non seulement de manière formelle mais en profondeur. Le groupe des automorphismes s'agrandit de manière considérable et le groupe euclidien en est un sous-groupe. Il n'y a pas de doute que cet état est entièrement achevé et conscient dans le fameux traité de Veblen et Young [30]. Cet état avait été bien compris déjà durant la période précédente spécialement après l'optimisation des Fondements de la Géométrie par Hilbert en 1899. L'incidence (ou connexion) avait été isolée d'autres structures comme celle des segments (l'intéralité) et la congruence. Il était possible de progresser encore. En particulier, il convenait de se libérer par rapport à la dimension ce qui s'amorce timidement chez Veblen-Young. Ce processus serait achevé avec Birkhoff dans les années 1930 (voir [4]). Bien entendu, il avait cheminé aussi en Algèbre Linéaire sous l'influence de l'Analyse Fonctionnelle.

9. Le principe de trialité : Study 1913

Je me borne à signaler ce superbe sujet pour mémoire. Le cadre n'est plus un espace projectif mais bien une hyperquadrique non dégénérée d'un espace projectif de dimension 7 contenant deux familles de sous-espaces projectifs de dimension 3. Les trialités ont été classées par Tits dans [24]. Elles conduisent à des groupes nouveaux et des objets nouveaux qui sont des hexagones généralisés. Ceux-ci jouent un rôle essentiel dans la naissance de la théorie des immeubles. La trialité possède un lien profond avec les octonions dont l'histoire est évoquée de manière magistrale par Baez dans [3].

10. Les espaces polaires

J'ai développé ce sujet dans [7]. Rappelons que toute conique (convenable) et toute quadrique (convenable) déterminent une polarité. Toute polarité détermine un espace polaire. La théorie des espaces polaires est un des chapitres longs et difficiles de la théorie des immeubles de type sphérique de Tits. Voir à ce sujet, [28]. Un point de vue profond et récent sur les immeubles se trouve dans [29]. La préhistoire des immeubles est relatée dans [9].

11. Bibliographie

Sauf exception, je n'ai pas donné les références concernant les œuvres des grands mathématiciens du 19e siècle tels que Gergonne, Poncelet, Plücker. Une source précieuse et systématique à cet égard est la superbe histoire de la géométrie au 19e siècle de Laptev et Rosenfeld [20]. Je recommande également l'ouvrage de Hauchecorne et Surateau [17].

[1] S.S. Abhyankar. Resolution of singularities and modular Galois theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 38, p. 131–169, 2000.

[2] R. Baer. *Linear algebra and projective geometry.* Academic Press, New York, 1952.

[3] J.C. Baez. The Octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 39, p. 145–205, 2001.

[4] G. Birkhoff. *Lattice theory.* American Math. Soc., 1940. Third edition expanded and reorganized, 1967. [MR 10,673a, 37#2638].

[5] G. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Math.*, Vol. 37, p. 823–843, 1936.

[6] Fr. Buekenhout. The rise of incidence geometry and buildings in the 20th century. In P.L. Butzer et al., editor, *Charlemagne and his heritage, 1200 years of civilization and science in Europe*, pages 235–256, Turnhout, 1998. Brepols. [MR 2000a:01022].

[7] Fr. Buekenhout. Prehistory and history of polar spaces and of generalized polygons. In *Intensive course on finite geometry and its applications*, Gent, April 3–14, 2000.

[8] Fr. Buekenhout. Le groupe des déplacements de l'espace euclidien. In *Séminaire CREM–GEPEMA–UREM*, 2001.

[9] Fr. Buekenhout. The prehistory of Tits buildings. In *Colloque International, Géométrie au vingtième siècle : 1930–2000*, Paris, 2001.

[10] K. Chemla. The background to Gergonne's treatment to duality : spherical trigonometry in the late 18th century. In D. Rowe and J. McCleary, editors, *The history of modern mathematics*, volume 1, pages 331–359, Boston, 1989. Academic Press. [MR 91b:01036].

[11] K. Chemla et S. Pahaut. Préhistoires de la dualité : explorations algébriques en trigonométrie sphérique (1753–1825). In Roshdi Rached, éditeur, *Sciences à l'époque de la révolution française*, pages 148–200, Paris, 1988. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

[12] J.L. Coolidge. *A history of the conic sections and quadric surfaces.* Dover, New York, 1968. [MR 8,1c].

[13] L.E. Dickson. *Linear groups with an exposition of the Galois field theory.* Dover, New York, 1958.

[14] J. Dieudonné. *Sur la géométrie des groupes classiques.* Springer, Berlin, 1955. [MR 17,236; 28#1239 et 46#9186].

[15] L. Geymonat. Le Principe de Dualité : sa signification historique et épistémologique. In L. Boi, D. Flament, and J.-M. Salanskis, editors, *1830–1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics.*, pages 175–177. Volume 402 of Lecture Notes in Physics, Berlin, 1992.

[16] J.J. Gray. Poincaré and Klein-Groups and Geometries. In L. Boi, D. Flament, and J.-M. Salanskis, editors, *1830–1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, pages 35–44. Volume 402 of Lecture Notes in Physics, Berlin, 1992.

[17] B. Hauchecorne et D. Surateau. *Des mathématiciens de A à Z.* Ellipses, 1996.

[18] T. Hawkins. *Emergence of the theory of Lie groups. An Essay in the History of Mathematics 1869–1926.* Springer, New York, 2000.

[19] C. Jordan. *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris, 1870. Actuellement diffusé par les éditions Jacques Gabay, Paris.

[20] B.L. Laptev and B.A. Rosenfeld. In A.N. Kolmogorov and Yushkevich, editors, *Mathematics of the 19th century*, pages 1–118. Birkhäuser, Basel, 1996.

[21] E. Nagel. The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris*, Vol. 7, 1939. Cité d'après [16].

[22] J. Tits. *Groupes et Géométries de Coxeter.* Institut des Hautes Études Scientifiques. Notes polycopiées, pages 1–26.

[23] J. Tits. Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique. *Bull. Soc. Math. Belg.*, Vol. 8, p. 48–81, 1956. [MR 19,430d].

[24] J. Tits. Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent. *Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math.*, Vol. 2, p. 13–60, 1959.

[25] J. Tits. Les groupes simples de Suzuki et de Ree. *Séminaire Bourbaki*, Vol. 13, p. 1–18, 1960.

[26] J. Tits. Géométries polyédriques et groupes simples. In *Deuxième réunion du Groupement de mathématiciens d'expression latine*, pages 66–88, Florence, Sept. 1961, 1962.

[27] J. Tits. Géométries polyédriques finies. *Rendiconti di Mat.*, Vol. 23, p. 156–165, 1964. [MR 32#1251].

[28] J. Tits. *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, volume 386 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1974. [MR 57#9866].

[29] J. Tits and R. Weiss. *The classification of Moufang polygons.* Springer, 2002. À paraître.

[30] O. Veblen and J.W. Young. *Projective Geometry*, volume I. Blaisdell, New York, 1910. Vol. II, 1917.

Université libre de Bruxelles - CP 216
Département de Mathématique
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles
Belgique
e-mail : fbueken@ulb.ac.be