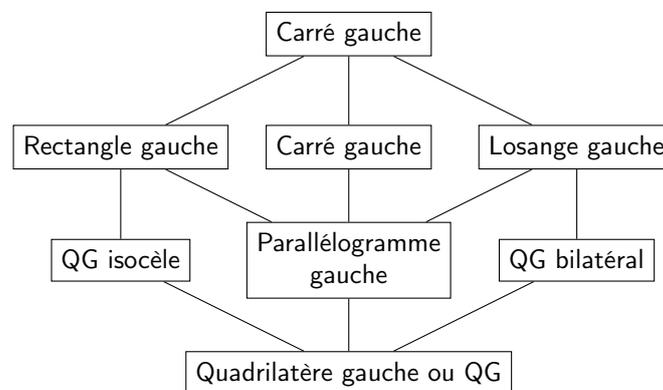




Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8

Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS,
Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS, Jacqueline SENGIER



26 août 2013

Math-UREM

Version 2



Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Généralités sur les quadrilatères gauches | 1 |
| 1.1 | Les automorphismes de E^3 | 1 |
| 1.2 | Le groupe des automorphismes du quadrilatère gauche | 2 |
| 1.3 | Axe de symétrie | 2 |
| 1.4 | Tous les quadrilatères gauches ont-ils la même forme? | 3 |
| 2 | Liens entre bidroite et quadrilatère gauche | 5 |
| 2.1 | Les médianes, leurs milieux, et le centre | 5 |
| 2.2 | Le squelette d'un quadrilatère gauche | 6 |
| 2.3 | QG conservé par le demi-tour δ_1 dont l'axe est la droite R | 7 |
| 2.4 | QG conservé par le demi-tour δ_2 ou δ_3 dont l'axe est perpendiculaire à R en o | 8 |
| 2.5 | QG conservé par la symétrie bilatérale σ_A ou σ_B | 9 |
| 2.6 | QG conservé par une antirotation K ou K' | 10 |
| 2.7 | Injection entre isométries du QG et cas combinatoires | 12 |
| 3 | Classification des quadrilatères gauches | 13 |
| 3.1 | Groupe d'ordre 1 | 13 |
| 3.2 | Groupes d'ordre 2 | 14 |
| 3.2.1 | Quadrilatères conservés par un automorphisme combinatoire $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ ou $\alpha = (1, 4)(2, 3)$ | 14 |
| 3.2.2 | Quadrilatères conservé par l'automorphisme combinatoire $\alpha = (1, 3)(2, 4)$ | 15 |
| 3.2.3 | Quadrilatères conservés par un automorphisme combinatoire $\alpha = (1)(3)(2, 4)$ ou $\alpha = (2)(4)(1, 3)$ | 16 |
| 3.3 | Groupes d'ordre 4 | 17 |
| 3.3.1 | Sous-groupe combinatoire du rectangle $\{I, (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3)(2, 4)\}$ | 17 |
| 3.3.2 | Sous-groupe combinatoire du losange $\{I, (1)(3)(2, 4), (1, 3)(2)(4), (1, 3)(2, 4)\}$ | 25 |
| 3.3.3 | Groupe combinatoire cyclique d'ordre quatre $\mathbb{Z}_4 = \{I, (1, 3)(2, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2)\}$ | 26 |
| 3.3.4 | Le sucre d'Annie : les QG conservés par \mathbb{Z}_4 | 28 |
| 3.4 | Groupe combinatoire d'ordre 8 : D_8 | 29 |
| 3.5 | Synthèse | 30 |
| 4 | Représentation du groupe D_8 et de ses sous-groupes en tant que groupes d'isométries | 31 |
| 4.1 | Caractéristiques de chaque nœud | 31 |
| 4.2 | Remarque sur les quadrilatères de la sphère | 33 |
| 4.3 | Représentation du groupe diédrique D_8 par des automorphismes | 33 |
| 4.4 | Représentation du groupe diédrique D_8 par des symboles | 33 |
| 4.5 | Représentation du groupe diédrique D_8 par des mots | 34 |
| 4.6 | Représentation du groupe diédrique D_8 par des dessins | 34 |

| | |
|---|-----------|
| 5 Annexes | 35 |
| 5.1 Annexe 1 : Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation | 35 |
| 5.2 Annexe 2 : Classification des retournements de E^3 | 36 |
| 5.3 Annexe 3 : Compléments sur les antirotations | 37 |
| 5.4 Annexe 4 : Analyse du cas où le centre de gravité c est confondu avec le centre o du QG | 39 |
| Glossaire | 41 |
| Bibliographie | 44 |

Résumé

Cet article analyse la notion de quadrilatère gauche. Les diagonales de tout quadrilatère gauche forment une bidroite dont le groupe des symétries est étudié dans l'article consacré aux bidroites ([1]). La classification des quadrilatères gauches s'inspire de la classification des quadrilatères combinatoires et s'appuie sur les propriétés des bidroites. La classification argumentée que nous obtenons fait émerger les familles suivantes : carrés gauches, rectangles gauches, losanges gauches, parallélogrammes gauches, quadrilatères gauches isocèles, QG bilatéraux, QG dont le groupe est d'ordre 1.

Mots clés

Quadrilatère gauche, Carré gauche, groupe diédrique d'ordre 8, bidroite.

Introduction

Les auteurs du présent document se sont réunis très régulièrement depuis le 23 mai 2008. Ils ont finalisé ce travail le 14 décembre 2012. Une présentation publique en a été faite le 23 novembre 2012 à l'Université Libre de Bruxelles, ainsi que le 26 août 2013 au Congrès de la SBPMef au Auderghem.

Les quadrilatères de l'espace euclidien E^3 Les quadrilatères gauches ou quadrilatères de l'espace euclidien possédant quatre sommets qui engendrent l'espace sont largement méconnus dans l'enseignement. Autrement dit, un quadrilatère gauche est un quadrilatère dont les 4 sommets ne sont pas contenus dans un même plan. Il suffit pour cela qu'il existe deux côtés opposés qui ne soient pas dans un même plan.

Ils nous ont réservé bien des surprises et bien des bonheurs. La surprise provient du manque de repères, en l'absence de familles connues comme c'est le cas dans le plan. Elle provient encore de notre difficulté à voir le quadrilatère et une certaine irritation à ce sujet. Pas question ici d'une arnaque répandue selon laquelle tout se réduirait aux représentations planes. Le bonheur est de sortir des sentiers battus et des préjugés. Il est nécessaire de visualiser d'abord avec les doigts, puis avec des bouts de bois divers qui matérialisent les côtés et des tiges en fer comme axes de symétrie, ou encore, à l'aide du matériel GEOMAG. Le matériel pédagogique est peu coûteux et il n'est pas exclu d'équiper les élèves en petits groupes.

Le bonheur est que la méthode utilisée en [2] pour classer les quadrilatères plans, qui utilise la classification des sous-groupes du groupe diédrique D_8 , fonctionne à nouveau parfaitement. Ce n'est pas surprenant quand on comprend la puissance des groupes de symétrie comme en [9].

Chapitre 1

Généralités sur les quadrilatères gauches

Il n'est pas inutile de rappeler que nous nous proposons d'étudier les quadrilatères gauches de E^3 . Dans cet espace, une rotation se fait autour d'une *axe de rotation* et est un déplacement. Afin d'éviter toute confusion au lecteur, nous utiliserons le terme *rotation spatiale* dans le texte qui suit.

1.1 Les automorphismes de E^3

Lemme 1. *Toute isométrie¹ de la droite qui fixe deux points est l'identité.*

Démonstration. Si les points a et b de la droite D sont fixes, tout autre point p de la droite est unique par ses distances aux deux points. Par une isométrie, les distances sont conservées et le point p est dès



FIGURE 1.1 – Lemme 1 : Isométrie de la droite

lors fixe (Figure 1.1).

□

Lemme 2. *Toute isométrie² de E^2 qui fixe trois points non alignés est l'identité.*

Démonstration. Si les points non alignés a, b et c du plan sont fixes, les droites ab, ac et bc sont des droites de points fixes par le lemme 1 (Figure 1.2). Soit p un point du plan abc distinct du point a . Le point d , intersection de ap et de bc est fixe vu qu'il appartient à bc . Dès lors, la droite ad est une droite de points fixes et p est fixe. Dans le cas où ap et bc sont parallèles, il suffit de refaire le même raisonnement avec deux autres droites.

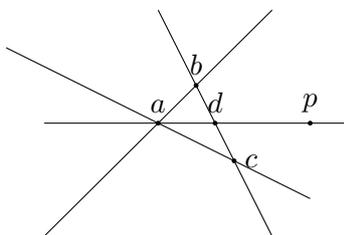


FIGURE 1.2 – Lemme 2 : Isométrie de E^2

□

1. Un énoncé plus fort est que toute *similitude* et même toute *affinité* de la droite qui fixe deux points est l'identité.
2. Un énoncé plus fort est que toute *similitude* et même toute *affinité* du plan qui fixe trois points non alignés est l'identité.

Théorème 1. *Toute isométrie³ de E^3 qui fixe quatre points non coplanaires est l'identité.*

Démonstration. Soit p distinct de d , un point de l'espace E^3 . Si les points non coplanaires a, b, c et d sont fixes, le plan abc est un plan de points fixes par le lemme 2 (Figure 1.3).

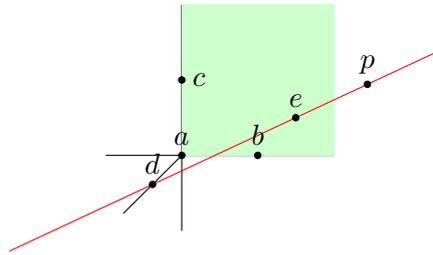


FIGURE 1.3 – Théorème 1 : Isométrie de E^3

Le point e , intersection de pd et de abc est donc fixe. Dès lors, la droite de est une droite de points fixes et p est un point fixe. Dans le cas où la droite pd est parallèle au plan abc , il suffit de refaire le même raisonnement avec un autre plan (abd par exemple). \square

1.2 Le groupe des automorphismes du quadrilatère gauche

Soit Q un quadrilatère dont les côtés opposés sont sur des droites gauches⁴ et que nous appelons quadrilatère gauche de sommets consécutifs 1, 2, 3, 4 non contenus dans un plan.

Par automorphisme de Q nous entendons une isométrie α de E^3 qui laisse Q invariant. Elle détermine une permutation induite α_i sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ des sommets de Q . Il est clair que α_i est un automorphisme combinatoire de Q . En revanche, un automorphisme combinatoire du quadrilatère n'est pas forcément induit par un automorphisme de Q .

Lemme 3. *La relation $\alpha \rightarrow \alpha_i$ est injective.*

Démonstration. Si β est un automorphisme de Q et si $\beta_i = \alpha_i$, nous voyons que $(\beta^{-1} \circ \alpha)_i$ est la permutation identique. Par le théorème 1, $\beta^{-1} \circ \alpha$ est dès lors l'identité. Donc $\beta = \alpha$. \square

Ceci signifie que tout automorphisme combinatoire ne peut s'étendre que de manière unique en isométrie de E^3 .

Dès lors, l'automorphisme peut s'identifier avec la permutation des quatre sommets. Puisque le groupe d'automorphismes combinatoires du quadrilatère est le groupe diédrique D_8 , nous constatons que le groupe G des automorphismes du quadrilatère Q est un sous-groupe de D_8 .

Comme nous connaissons les sous-groupes de D_8 , une méthode s'impose. Nous passerons en revue à la section 3 les sous-groupes a priori possibles, comme nous l'avons fait dans l'article *Classification objective des quadrilatères* (Réf. [3])⁵.

1.3 Axe de symétrie

Etant donné un sous-groupe G du groupe *abstrait* D_8 , il convient d'en classer les représentations au sein du groupe des isométries de l'espace.

Considérons un exemple. Supposons que G soit d'ordre deux. Soit α son élément non identique. Dans ce cas, α se représente a priori de trois manières dans l'espace :

3. Un énoncé plus fort est que toute *similitude* et même toute *affinité* de E^3 qui fixe quatre points non coplanaires est l'identité. Remarquons que dans cet article, si on parle d'*automorphisme*, on parle en fait d'*isométries*, sauf mention explicite du contraire.

4. Il est à noter que toute figure orientée possède un symétrique et que l'une de ces figures est appelée *droite* et l'autre *gauche*. Le terme *gauche* n'est pas utilisé dans ce sens dans cet exposé.

5. D_8 est aussi le groupe d'une bidroite orthogonale (Réf. [1])

- par une *symétrie centrée*,
- par une *symétrie axiale* ou *rotation spatiale d'un demi-tour*,
- ou par une *symétrie bilatérale*.

Ce que l'on vient de remarquer pour les représentations de G d'ordre 2 s'applique aux groupes d'ordre plus élevé, car ils contiennent un ou des sous-groupes d'ordre 2.

Appelons Axe α l'ensemble des points fixes de α . Dès lors,

- dans le cas d'une symétrie centrée, Axe α est un *point*,
- dans le cas d'une symétrie axiale ou rotation spatiale d'un demi-tour, Axe α est une *droite*,
- et dans le cas d'une symétrie bilatérale, Axe α est un *plan*.

A vrai dire, comme nous l'avons déjà fait dans le plan (Réf. [3]), nous ne partons pas du groupe *abstrait* D_8 , mais bien du groupe D_8 d'un quadrilatère *combinatoire* constitué des automorphismes combinatoires de celui-ci comme nous le décrivons dans la section 1.2.

1.4 Tous les quadrilatères gauches ont-ils la même forme ?

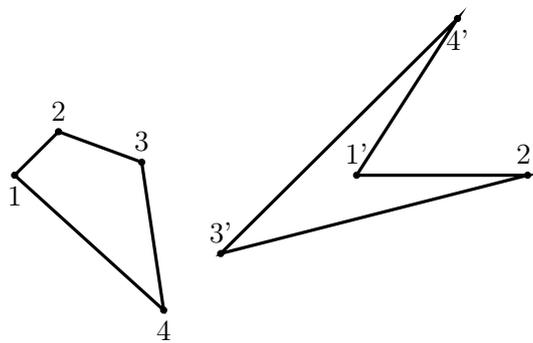


FIGURE 1.4 – Section 1.4 : Deux quadrilatères gauches 1234 et 1'2'3'4'

Rappelons que la structure affine de E^3 est constituée des points, des droites, des plans, de leur parallélisme et de l'inclusion.

Trois vecteurs de même origine et linéairement indépendants forment une base de E^3 .

Théorème 2. *Il existe une affinité qui transforme tout quadrilatère gauche 1'2'3'4' en tout quadrilatère gauche 1234.*

Démonstration. Considérons 1 comme une origine et ramenons $2', 3', 4'$ à l'origine en $2'', 3'', 4''$, ce qui signifie que $2'' = t(2'), 3'' = t(3'), 4'' = t(4')$ où t est la translation appliquant $1'$ sur 1 (Figure 1.5).

Les vecteurs $\vec{12}, \vec{13}, \vec{14}$ sont linéairement indépendants de même que les vecteurs $\vec{12''}, \vec{13''}, \vec{14''}$ en vertu du fait que 1234 et 1'2'3'4' sont des quadrilatères gauches.

Il existe une transformation linéaire g fixant l'origine 1 et transformant les points $2'', 3'', 4''$ en les points 2, 3, 4. Dès lors, $g \circ t$ est une affinité qui transforme 1'2'3'4' en tout quadrilatère gauche 1234. \square

On peut donc affirmer que du point de vue affín, tous les quadrilatères gauches ont la même forme. Une classification euclidienne amène des différences au sein des quadrilatères.

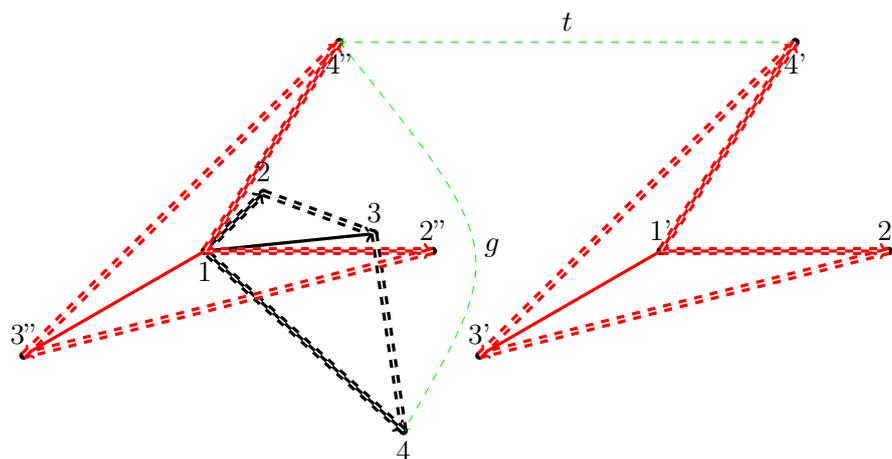


FIGURE 1.5 – Affinité qui transforme tout quadrilatère gauche $1'2'3'4'$ en tout quadrilatère gauche 1234 .

Chapitre 2

Liens entre bidroite et quadrilatère gauche

2.1 Les médianes, leurs milieux, et le centre

Rappelons qu'une médiane d'un quadrilatère est le segment joignant les milieux de deux côtés opposés de ce quadrilatère.

Théorème 3. *Les médianes d'un quadrilatère gauche se coupent en leurs milieux.*

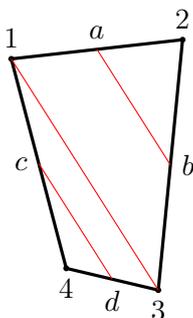


FIGURE 2.1 – Théorème 3 : Le parallélogramme de Varignon

Démonstration. Appelons respectivement a, b, c , et d les milieux des côtés $[1, 2], [2, 3], [1, 4], [3, 4]$ du quadrilatère (Figure 2.1). Dans le triangle 123, nous avons $\vec{13} = \vec{12} + \vec{23} = 2\vec{a2} + 2\vec{2b} = 2\vec{ab}$ et de même dans le triangle 143, nous avons $\vec{13} = 2\vec{cd}$. Il s'en suit que $\vec{ab} = \vec{cd}$ (parallélogramme de Varignon¹).

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieux. Or ces diagonales sont les médianes du quadrilatère, ce qui démontre la propriété. \square

Remarque².

Théorème 4. *Toute isométrie α qui conserve un quadrilatère gauche Q , conserve le segment joignant les milieux distincts m et n des segments diagonaux $[1, 3]$ et $[2, 4]$ et le plan π perpendiculaire à la droite mn au point c milieu de $[m, n]$.*

1. Pierre Varignon (1654 [Caen] - 23 décembre 1722 [Paris])

Pierre Varignon est un des mathématiciens français les plus célèbres du temps de Newton et Leibniz. Elevé dans une famille modeste de la côte normande, il se destine d'abord à une carrière religieuse, étudiant la théologie et la philosophie au collège jésuite de Caen, avant d'être ordonné prêtre en 1683. Mais la rencontre fortuite d'un exemplaire des *Eléments* d'Euclide change sa vie, et, dans la tradition jésuite, il se consacre tout entier à l'étude de sa nouvelle passion, les mathématiques.

Consulter les sites <http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=varignon>
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Varignon.html>

2. On trouve une jolie démonstration de ce théorème dans Vilenkine (Réf. [17] p. 186-187)

Démonstration. Les points m et n sont distincts, sinon le quadrilatère G serait plan (Figure 2.2). Le milieu c du segment $[m, n]$ est fixé par l'isométrie α .

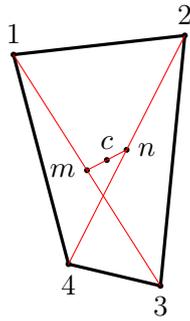


FIGURE 2.2 – Théorème 4 : c centre de gravité du quadrilatère gauche 1234

Donc α conserve c , la droite mn et le plan π perpendiculaire à la droite mn au point c . □

Théorème 5. *Le point c est le centre de gravité du tétraèdre 1234.*

Démonstration. Les points 1, 2, 3 et 4 ont des masses identiques. Les masses en 1 et en 3 se remplacent par une masse double en m , milieu de $[1, 3]$. Les masses en 2 et en 4 se remplacent par une masse double en n , milieu de $[2, 4]$. Les doubles masses en m et n se remplacent par une masse quadruple en c , milieu de $[m, n]$. Dès lors, c est le centre de gravité du tétraèdre 1234. □

2.2 Le squelette d'un quadrilatère gauche

Les droites gauches 13 et 24 forment une bidroite qui possède une perpendiculaire commune R . Ainsi, Q possède un squelette :

- le centre de gravité c ,
- l'axe-droite mn ,
- l'axe-plan π ,
- la bidroite des diagonales 13 et 24, leur perpendiculaire commune R et le centre³ o de la bidroite que nous appelons centre du quadrilatère gauche,
- les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux deux diagonales du quadrilatère gauche.

Le milieu du segment $[p_{13}, p_{24}]$ est le point o . (Il se peut que les points c et o soient distincts (Figure 2.3 (a)) ou confondus (Figure 2.3 (b)), de même que les droites mn et R .)⁴

Toute symétrie du quadrilatère est une symétrie de cette bidroite (voir le dossier Bidroites, Réf. [1]).

Conséquences :

- le centre o du QG est un point fixe de tout automorphisme du QG.
- Un axe de symétrie (point, droite ou plan) d'une isométrie conservant un QG comprend le centre o .

Rappelons (voir le dossier Bidroites, Réf. [1]) qu'il y a quatre isométries conservant une bidroite non orthogonale. Il s'agit de l'identité, de trois rotations d'un demi-tour : l'une appelée δ_1 dont l'axe est la droite R et les deux autres appelées δ_2 et δ_3 d'axes perpendiculaires à R en o . Les isométries conservant une bidroite orthogonale sont au nombre de huit.

Aux quatre isométries précédentes s'ajoutent

- deux symétries bilatérales : σ_A et σ_B dont les axes sont un plan contenant la droite R
- et une des droites gauches, et deux anti-rotations $K = \delta_2 \circ \sigma_A$ et $K' = \delta_3 \circ \sigma_B$.

Dans la suite de la Section 2, nous analysons ces isométries en tant qu'isométries de QG et leurs conséquences combinatoires.

3. Dans le dossier « Bidroites », ce point o est désigné par c .

4. Une caractérisation des quadrilatères pour lesquels $c = o$ est renvoyée à l'annexe 4.

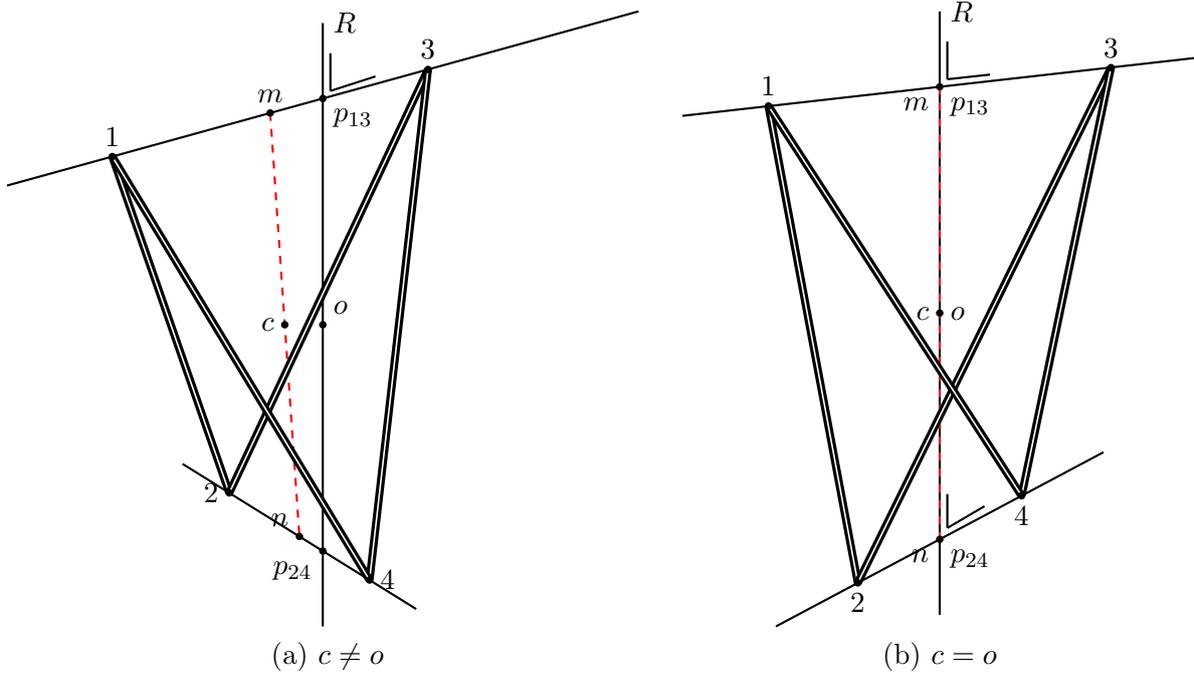


FIGURE 2.3 – Le squelette d’un quadrilatère gauche

Théorème 6. *** *Un quadrilatère gauche ne peut être conservé par une symétrie centrée.*

Démonstration. La symétrie centrée n’est pas une des isométries qui conserve une bidroite. □

2.3 QG conservé par le demi-tour δ_1 dont l’axe est la droite R

Supposons que δ_1 conserve un QG 1234.

Cas combinatoires :

Lemme 4. *Si une rotation d’un demi-tour d’axe R conserve un QG 1234, alors elle est du type combinatoire $(1, 3)(2, 4)$.*

Démonstration. A priori, puisqu’un demi-tour est d’ordre deux⁵, nous disposons de cinq cas combinatoires pour δ_1 .

Ces cinq cas possibles sont :

1. $(1, 3)(2, 4)$,
2. $(1, 2)(3, 4)$,
3. $(1, 4)(2, 3)$,
4. $(2)(4)(1, 3)$,
5. $(1)(3)(2, 4)$.

De plus, l’isométrie δ_1 conserve chacune des droites de la bidroite des diagonales 13 et 24 en raison du fait que son axe est R . Les cas $(1, 2)(3, 4)$ et $(1, 4)(2, 3)$ permutent les diagonales, ils sont à éliminer.

Dans les cas $(2)(4)(1, 3)$ et $(1)(3)(2, 4)$, δ_1 fixe deux sommets. Comme les points fixés par δ_1 se trouvent sur l’axe R et les deux sommets permutés sur une perpendiculaire à R , le QG est contenu dans un plan, ce qui contredit nos hypothèses. Dès lors, le type combinatoire de δ_1 est $(1, 3)(2, 4)$. □

Construction du QG :

5. Un automorphisme α est d’ordre deux quand $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha = I$

Lemme 5. *Il existe des QG conservés par l'isométrie δ_1 .*

Démonstration. Partons de la droite R et de trois de ses points p_{13}, o, p_{24} tels que $\text{dist}(p_{13}, o) = \text{dist}(p_{24}, o) \neq 0$:

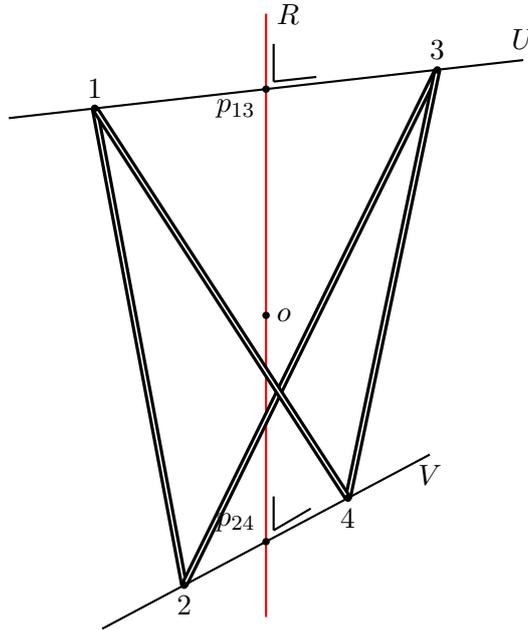


FIGURE 2.4 – Il existe des QG conservés par l'isométrie δ_1

Partons d'une droite U perpendiculaire à R en p_{13} , future droite 13.

Partons d'une droite V perpendiculaire à R en p_{24} , future droite 24.

Exigeons que U ne soit pas parallèle à V .

Partons d'un point 1 sur U distinct de p_{13} .

Soit 3 le symétrique de 1 sur U par rapport à p_{13} .

Partons d'un point 2 sur V avec $2 \neq p_{24}$.

Soit 4 le symétrique de 2 sur V par rapport à p_{24} .

Nous obtenons un QG 1234 pour lequel δ_1 , demi-tour d'axe R est une isométrie. □

Théorème 7. **** Un QG conservé par un demi-tour est un parallélogramme gauche.*

Démonstration. Immédiat en vertu des lemmes 4 et 5. □

2.4 QG conservé par le demi-tour δ_2 ou δ_3 dont l'axe est perpendiculaire à R en o

Cas combinatoires :

Lemme 6. *Si une rotation d'un demi-tour d'axe perpendiculaire à R conserve un QG 1234, alors elle est du type combinatoire $(1, 2)(3, 4)$ ou $(1, 4)(2, 3)$.*

Démonstration. A priori, puisqu'un demi-tour est d'ordre deux, nous disposons pour δ_2 et δ_3 des cinq cas combinatoires cités à la Section 2.3. Ces cinq cas possibles sont

1. $(1, 3)(2, 4)$,
2. $(1, 2)(3, 4)$,
3. $(1, 4)(2, 3)$,
4. $(2)(4)(1, 3)$,
5. $(1)(3)(2, 4)$.

Cette fois, les rotations δ_2 et δ_3 permutent les diagonales 13 et 24. Le cas $(1, 3)(2, 4)$ est éliminé. D'autre part, les deux sommets fixés par $(2)(4)(1, 3)$ ou $(1)(3)(2, 4)$ appartiennent à l'axe de la rotation et de ce fait par le même raisonnement que dans le lemme 4, Section 2.3, le QG est contenu dans un plan, ce qui contredit nos hypothèses. Dès lors, le type combinatoire de δ_2 ou de δ_3 est $(1, 2)(3, 4)$ ou $(1, 4)(2, 3)$. \square

Construction du QG :

Lemme 7. *Il existe des QG conservés par l'isométrie δ_2 ou δ_3 .*

Démonstration. Construisons un QG conservé par $\delta_2 = (1, 2)(3, 4)$.

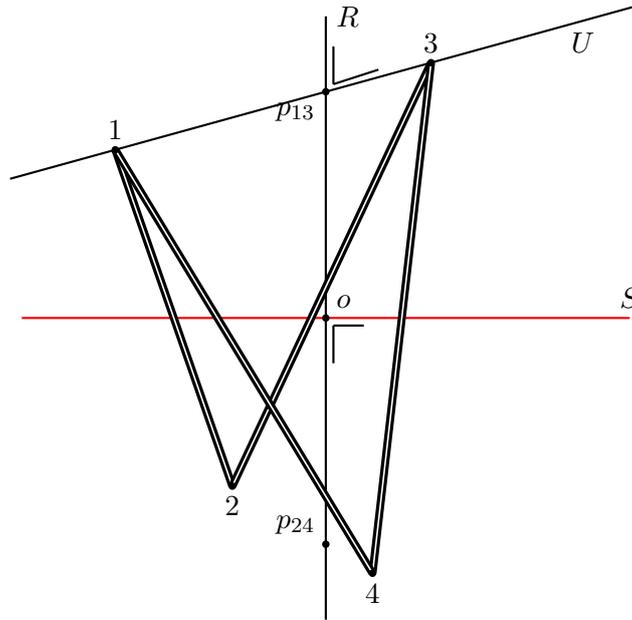


FIGURE 2.5 – QG conservé par l'isométrie $\delta_2 = (1, 2)(3, 4)$

Il n'y a pas de perte de généralité puisque δ_3 possède les mêmes caractéristiques que δ_2 et l'isométrie $(1, 4)(2, 3)$ joue un rôle symétrique par rapport à celui de l'isométrie $(1, 2)(3, 4)$.

Partons de la droite R et de ses points p_{13}, o, p_{24} tels que $\text{dist}(p_{13}, o) = \text{dist}(p_{24}, o) \neq 0$.

Partons d'une droite S perpendiculaire à R en o et du demi-tour δ_2 dont elle est l'axe.

Partons d'une droite U perpendiculaire à R en p_{13} non-parallèle à S et de deux points distincts 1 et 3 de U et différents de p_{13} .

Soit 4 le point $\delta_2(3)$ et 2 le point $\delta_2(1)$. Alors le QG 1234 admet l'isométrie δ_2 . \square

2.5 QG conservé par la symétrie bilatérale σ_A ou σ_B

Cas combinatoires :

Lemme 8. *Si une symétrie bilatérale conserve un QG 1234, alors elle est du type combinatoire $(1)(3)(2, 4)$ ou $(2)(4)(1, 3)$.*

Démonstration. Les transformations σ_A et σ_B jouant des rôles symétriques, nous nous contenterons de faire la démonstration pour σ_A . Si σ_A est une symétrie bilatérale dont l'axe est le plan Axe σ_A et conservant un QG 1234, alors il y a au moins deux sommets fixés du QG contenus dans Axe σ_A puisque la diagonale située dans Axe σ_A est une droite de points fixes. Le plan Axe σ_A comprend les points fixes 1 et 3 et est médiateur du segment $[2, 4]$.

Seuls les automorphismes combinatoires σ_A, σ_B et l'identité I ont un point fixe. I ne peut convenir car tous les sommets seraient dans le plan Axe σ_A .

□

Construction du QG :

Soit une symétrie bilatérale σ par rapport à un plan Axe σ . Supposons $1 \in \text{Axe } \sigma$. De ce fait, $3 \in \text{Axe } \sigma$. Forcément 2 et 4 sont en dehors de Axe σ qui est le plan médiateur de $[2, 4]$.

Lemme 9. *Il existe un QG conservé par l'isométrie σ_A ou σ_B .*

Démonstration. Partons d'un plan Axe σ .

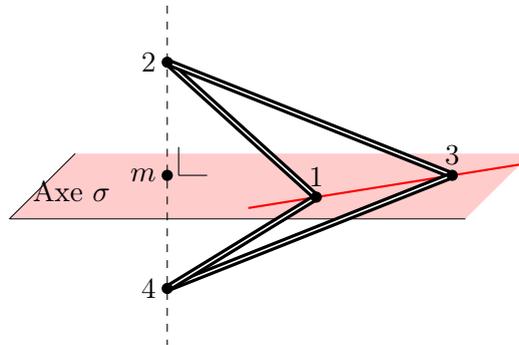


FIGURE 2.6 – QG conservé par l'isométrie σ_A ou σ_B

Nous y donnons deux points distincts 1 et 3, un point 2 extérieur à Axe σ et au plan perpendiculaire à Axe σ contenant la droite 13. Si σ est la symétrie bilatérale dont l'axe est Axe σ , le sommet 4 est déterminé : c'est $\sigma(2)$. Le QG 1234 ainsi construit est conservé par la symétrie σ . □

2.6 QG conservé par une antirotation K ou K'

Rappelons, comme dans le glossaire, qu'une antirotation K est définie de deux manières équivalentes :

1. K est la composée d'une symétrie bilatérale μ et d'une rotation ρ d'axe perpendiculaire à l'axe de μ ou $K = \mu \circ \rho$. Nous nous intéressons au cas $\rho = \frac{1}{4}$ de tour.
2. K est la composée d'une symétrie centrée σ et d'une rotation ρ' d'axe passant par le centre de σ ou $K = \rho' \circ \sigma$. Nous nous intéressons au cas $\rho' = \frac{1}{4}$ de tour.

Pour la preuve d'équivalence, consulter le lemme 25, Section 5.3, Annexe 3.

Nous indiquons ici ce qui relie les transformations μ, ρ et σ, ρ' (preuves dans l'Annexe 3.) :

- Le centre de la symétrie centrée σ est le point d'intersection de l'axe de la symétrie bilatérale μ et de l'axe de la rotation ρ :

$$\text{Axe } \sigma = \text{Axe } \mu \cap \text{Axe } \rho$$

- Les rotations ρ et ρ' ont le même axe et diffèrent d'un demi-tour :

$$\text{Axe } \rho = \text{Axe } \rho'$$

Il résulte des théorèmes 2 et 4 du dossier « Bidroites » (Réf. [1], sections 2.3 et 2.7) que si une antirotation conserve une bidroite, celle-ci est orthogonale. Il s'ensuit que les diagonales de tout quadrilatère conservé par une antirotation sont orthogonales.

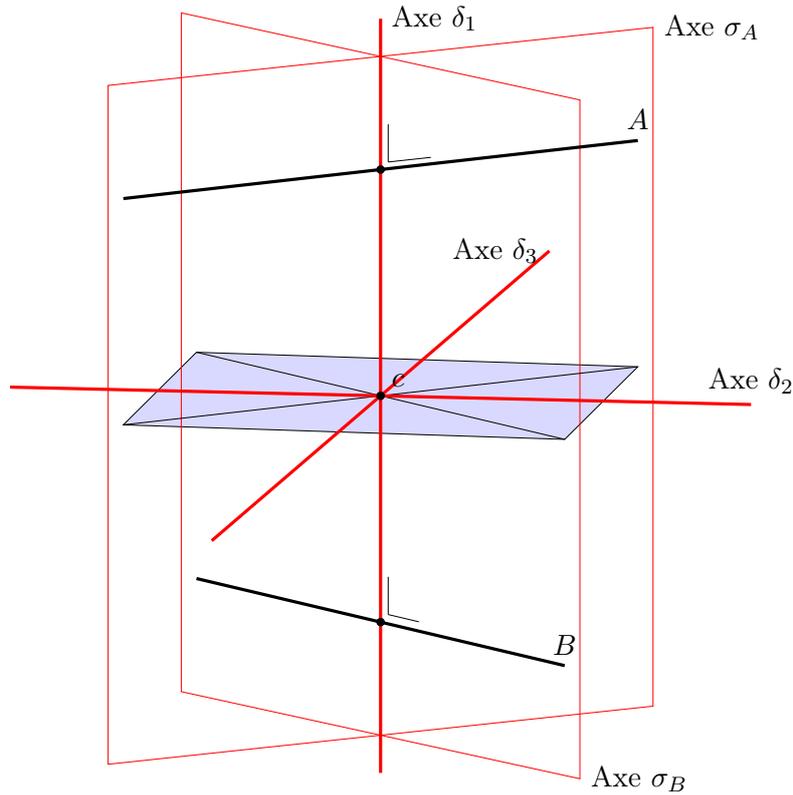


FIGURE 2.7 – Bidroite orthogonale AB

En consultant la table de composition des isométries conservant une bidroite orthogonale AB ,

| | I | δ_1 | δ_2 | δ_3 | σ_A | σ_B | K | K' |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| I | I | δ_1 | δ_2 | δ_3 | σ_A | σ_B | K | K' |
| δ_1 | δ_1 | I | δ_3 | δ_2 | σ_B | σ_A | K' | K |
| δ_2 | δ_2 | δ_3 | I | δ_1 | K | K' | σ_A | σ_B |
| δ_3 | δ_3 | δ_2 | δ_1 | I | K' | K | σ_B | σ_A |
| σ_A | σ_A | σ_B | K' | K | I | δ_1 | δ_3 | δ_2 |
| σ_B | σ_B | σ_A | K | K' | δ_1 | I | δ_2 | δ_3 |
| K | K | K' | σ_B | σ_A | δ_2 | δ_3 | δ_1 | I |
| K' | K' | K | σ_A | σ_B | δ_3 | δ_2 | I | δ_1 |

on remarque qu'il y a deux antirotations K et K' jouant un rôle symétrique. On y voit aussi que $K = \delta_3 \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \delta_2$ où

- σ_A est la symétrie bilatérale dont l'axe est le plan défini par les droites A et R (perpendiculaire commune à A et B).
- δ_2 et δ_3 sont les rotations d'un demi-tour dont les axes sont des droites perpendiculaires à R et bissectrices des parallèles à A et B par le centre c de la bidroite.

Lemme 10. *Les antirotations conservant un QG sont nécessairement d'ordre quatre.*

Rappel : Un automorphisme α est d'ordre quatre quand $\alpha^4 = I$.

Démonstration. En se référant à la table de composition citée ci-dessus, on voit aisément que $K^2 = (\delta_3 \circ \sigma_A) \circ (\sigma_A \circ \delta_2) = \delta_3 \circ \delta_2 = \delta_1$ qui est la rotation d'un demi-tour d'axe R . Il s'ensuit que $K^4 = \delta_1^2 = I$. Le même raisonnement vaut pour la deuxième antirotation K' .

□

Lemme 11. *Si K est une antirotation conservant un QG 1234, alors*

- (i) les diagonales du QG sont orthogonales,
(ii) La forme combinatoire de K est $(1, 2, 3, 4)$ ou $(1, 4, 3, 2)$.

Démonstration. (i) Immédiat.

(ii) Ce sont les seules formes combinatoires d'ordre quatre dans le groupe D_8 . □

2.7 Injection entre isométries du QG et cas combinatoires

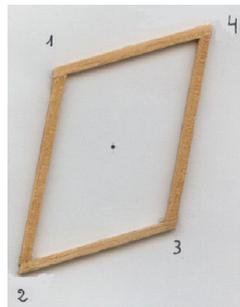
On retrouve ici ce qui avait déjà été prouvé dans le lemme 3, Section 1.2.

Théorème 8. *Si un QG possède une isométrie de type combinatoire donné, cette isométrie est unique.*

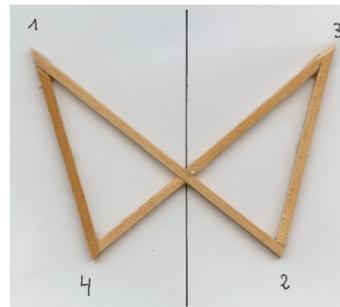
Démonstration. Supposons qu'il y ait deux isométries g et h . Dans ce cas, le type combinatoire de $h^{-1} \circ g$ est l'identité et toute isométrie de l'espace fixant quatre points non coplanaires est l'identité (Théorème 1). Puisque c'est l'identité, $h^{-1} \circ g = I \Rightarrow g = h$. □

Théorème 9. *Le groupe des isométries du QG est isomorphe à un sous-groupe du groupe combinatoire.*

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème 8. □



Parallélogramme plan



Papillon trapèze isocèle
à diagonales parallèles

FIGURE 2.8 – Cas combinatoire $(1, 3)(2, 4)$

Remarquons que l'énoncé du théorème 8 n'est pas valable pour les QP où deux isométries pouvaient correspondre au même automorphisme combinatoire. Par exemple $(1, 3)(2, 4)$ était une symétrie centrée (parallélogramme) ou une symétrie axiale (papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles) (voir la Figure 2.8).

Chapitre 3

Classification des quadrilatères gauches

Avertissement : dans le dossier *Classification objective des quadrilatères* (Réf. [3] et [2]), les auteurs sont partis du groupe D_8 pour conclure par l'identité I . Dans le présent document, nous partons de l'identité I pour terminer par D_8 . La première démarche est de type « Top – Down », tandis que celle que nous avons adoptée ici est de type « Bottom – Up ». La présente classification s'intitule *Classification par les sous-groupes de D_8* . Une autre classification plus fine suivra dans le document *II : Quadrilatères gauches, un nouveau critère de classification*. Une troisième classification suivra dans le document *III : Quadrilatères gauches par ombre et revêtement*.

3.1 Groupe d'ordre 1

Tout quadrilatère possède un groupe d'automorphismes contenant le sous-groupe I d'ordre 1 (l'identité). Cette famille est constituée de tous les quadrilatères gauches. Un membre de cette famille (un élément) est appelé *quadrilatère gauche*. Cette démarche est cohérente avec la décision prise dans le plan (voir le dossier sur les quadrilatères plans, Réf. [3]) où nous voulons, par exemple, que tout carré soit un rectangle. En outre, nous pensons qu'il existe des quadrilatères gauches dont le groupe de symétrie ne comprend que I . Pour en construire un, rappelons que toute symétrie du quadrilatère est une symétrie de la bidroite constituée par ses diagonales.

Construction :

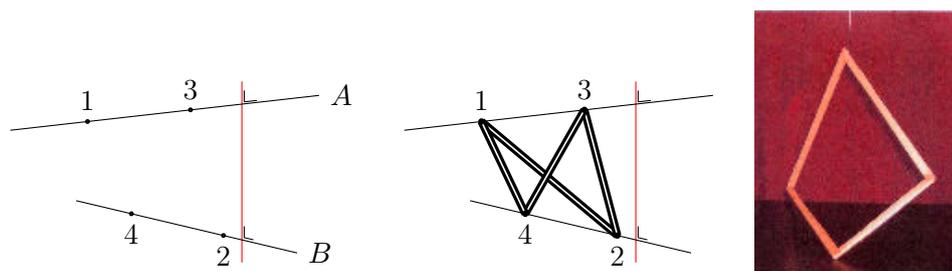


FIGURE 3.1 – *Quadrilatère gauche quelconque*

Choisissons deux droites gauches A et B et les points 1 sur A et 2 sur B .

Plaçons le point 3 sur A de telle façon que les longueurs des côtés $[1, 2]$ et $[2, 3]$ soient différentes. Ceci est possible puisqu'il y a au maximum deux points de A qui ne conviennent pas : les points de percée de A dans la sphère de centre 2 et de rayon $\text{dist}(1, 2)$. Il reste à placer le point 4 sur B de façon à ce que le QG 1234 ait quatre côtés de longueurs différentes. Il y a au maximum neuf points à exclure sur B . En effet, la condition $\text{dist}(1, 4) \neq \text{dist}(3, 4)$ n'exclut que le point d'intersection de B et du plan médiateur de $[1, 3]$. La condition $\text{dist}(1, 4) \neq \text{dist}(1, 2)$ exclut les points de percée de B dans la sphère de centre 1 et de rayon $\text{dist}(1, 2)$. La condition $\text{dist}(1, 4) \neq \text{dist}(2, 3)$ exclut les points de percée de B dans la sphère de centre 1 et de rayon $\text{dist}(2, 3)$. La condition

$\text{dist}(3, 4) \neq \text{dist}(1, 2)$ exclut les points de percée de B dans la sphère de centre 3 et de rayon $\text{dist}(1, 2)$ et la condition $\text{dist}(3, 4) \neq \text{dist}(2, 3)$ exclut les points de percée de B dans la sphère de centre 3 et de rayon $\text{dist}(2, 3)$.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Lemme 12. *Il existe des quadrilatères gauches dont le groupe de symétries se réduit à l'identité.*

Démonstration. Le quadrilatère 1234 construit ci-dessus est gauche puisque ses diagonales $13 = A$ et $24 = B$ le sont. Comme il possède quatre côtés de longueurs différentes, il ne peut être conservé que par l'identité I . \square

3.2 Groupes d'ordre 2

Nous sommes en présence de trois types d'automorphismes combinatoires (Réf. [3] et [2]). Chacun de ces automorphismes s'étend de manière unique en une isométrie de E^3 (voir Section 2.7).

- Soit $(1, 2)(3, 4)$ ou $(1, 4)(2, 3)$, qui jouent un rôle « symétrique » et dont il suffit dès lors de traiter un seul exemplaire. Nous savons (voir les Sections 2.4 et 2.7) que ce sont des rotations d'un demi-tour d'axe perpendiculaire à R par o . L'axe est une des bissectrices des parallèles aux diagonales par o pour $(1, 2)(3, 4)$ et l'autre bissectrice pour $(1, 4)(2, 3)$.
- Soit $(1)(3)(2, 4)$ ou $(2)(4)(1, 3)$, qui jouent un rôle « symétrique » et dont il suffit dès lors de traiter un seul exemplaire. Nous savons (voir les Sections 2.5 et 2.7) que ce sont des symétries bilatérales :
 - celle dont l'axe est le plan défini par R et la diagonale 13 pour $(1)(3)(2, 4)$,
 - et celle dont l'axe est le plan défini par R et la diagonale 24 pour $(2)(4)(1, 3)$.
- Soit $(1, 3)(2, 4)$. Nous savons (voir les Sections 2.3 et 2.7) que c'est une rotation d'un demi-tour dont l'axe est R .

3.2.1 Quadrilatères conservés par un automorphisme combinatoire $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ ou $\alpha = (1, 4)(2, 3)$

Lemme 13. *Si un tel quadrilatère gauche existe, alors α est une rotation spatiale d'un demi-tour dont l'axe est la droite passant par les milieux des côtés $[1, 2]$ et $[3, 4]$.*

Démonstration. Immédiat. \square

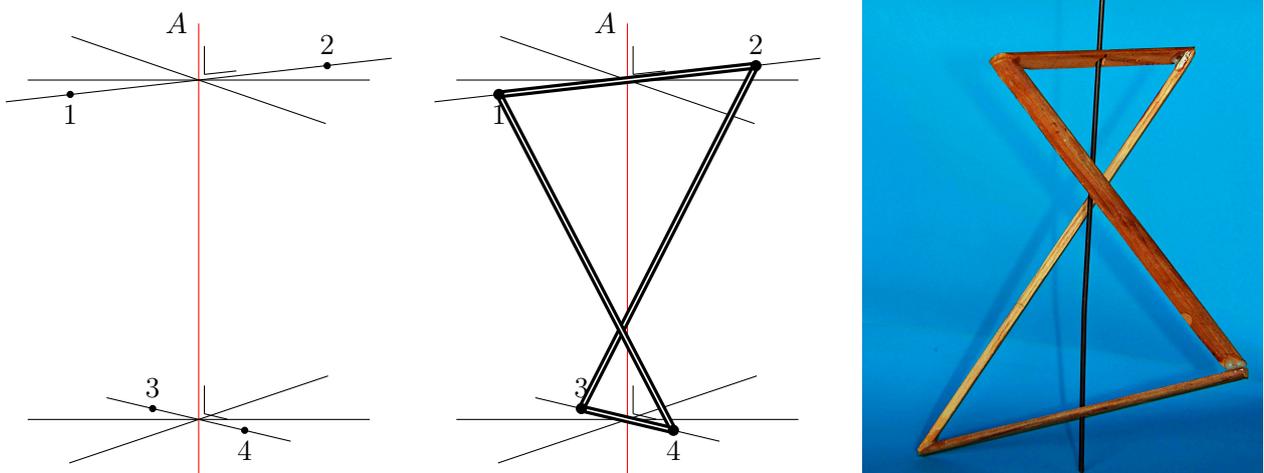


FIGURE 3.2 – Symétrie $(1, 2)(3, 4)$ dont l'axe est une droite A et QG isocèle

Existence du QG :

La construction décrite dans la Section 2.4 prouve l'existence d'un quadrilatère gauche qui est conservé par un automorphisme $\alpha = (1, 2)(3, 4)$.

Nous décidons qu'un quadrilatère gauche ainsi construit est appelé *QG isocèle*.

Définition 1. *Un QG isocèle est un QG conservé par un demi-tour dont l'axe passe par les milieux de deux côtés opposés.*

Remarque : ceci n'interdit pas qu'il soit conservé par d'autres isométries.

Lemme 14. *Il existe des quadrilatères gauches isocèles dont l'ensemble des automorphismes est constitué uniquement de l'identité I et de α .*

Démonstration. Dans la construction décrite à la Section 2.4, il suffit de choisir le sommet 3 tel que $\text{dist}(3, p_{13}) \neq \text{dist}(1, p_{13})$. De ce fait, une isométrie hypothétique β autre que δ_2 ne peut transformer le sommet 1 en les sommets 2, 3, 4, donc β fixe 1. Alors β fixe 2, 3, 4 et $\beta = I$. Le QG 1234 ainsi obtenu n'admet que les deux isométries I et α . \square

L'inspection physique d'un modèle incite à croire qu'il y a plusieurs formes différentes. Nous y revenons dans le dossier II où nous introduisons un critère de classification supplémentaire.

3.2.2 Quadrilatères conservé par l'automorphisme combinatoire $\alpha = (1, 3)(2, 4)$

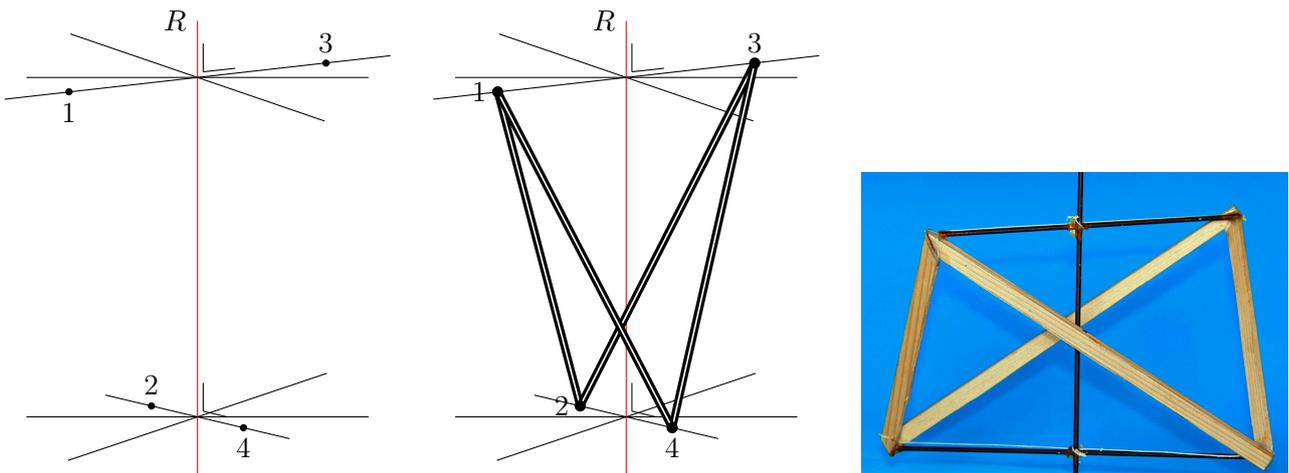


FIGURE 3.3 – Symétrie $(1,3)(2,4)$ dont l'axe est la droite R et *parallélogramme gauche*

Nous savons que α est le demi-tour d'axe R et que le QG existe (Section 2.3 et 2.7). Un quadrilatère gauche ainsi construit est appelé *parallélogramme gauche* ou *QG parallélogramme*.

Définition 2. *Un parallélogramme gauche est un QG conservé par un demi-tour dont l'axe est la perpendiculaire commune à ses diagonales.*

Remarque : ceci n'interdit pas qu'il soit conservé par d'autres isométries.

Lemme 15. *Il existe des parallélogrammes gauches dont l'ensemble des automorphismes est constitué uniquement de l'identité I et de α .*

Démonstration. Reprenons la construction décrite dans la Section 2.3. Elle prouve l'existence d'un quadrilatère gauche qui est conservé par un automorphisme $\alpha = (1, 3)(2, 4)$ et autorise le choix du sommet 2 en tout point distinct de p_{24} sur la droite V , future diagonale 24.

Si nous souhaitons qu'un parallélogramme gauche n'admette aucune autre isométrie que I et α , il suffit de choisir le sommet 2 tel que $\text{dist}(2, p_{24}) \neq \text{dist}(1, p_{13})$ et tel que la droite 13 ne soit pas dans le plan médiateur du segment $[2, 4]$.

Soit une isométrie β conservant le QG. Elle ne permute pas les diagonales puisque $\text{dist}(2, p_{24}) \neq \text{dist}(1, p_{13})$. Nous pouvons envisager les deux cas combinatoires suivants : soit les sommets 1 et 3 sont fixés, soit les sommets 1 et 3 sont permutés.

- Si 1 et 3 sont fixés alors $\beta = I$ ou $\beta = (1)(3)(2, 4)$ qui est la symétrie bilatérale dont l'axe est le plan déterminé par R et 13 (voir section 2.4 et 2.7). Du fait que la droite 13 n'est pas dans le plan médiateur du segment $[2, 4]$, axe de la symétrie $(1)(3)(2, 4)$, l'un des points 1 ou 3 ne peut être équidistant de 2 et 4. On ne peut pas permuter simultanément les côtés $[1, 2]$ et $[1, 4]$ et les côtés $[3, 2]$ et $[3, 4]$.
- Si 1 et 3 sont permutés alors $\beta = (1, 3)(2, 4) = \alpha$ ou $\beta = (1, 3)(2)(4)$ qui est la symétrie bilatérale dont l'axe est le plan déterminé par R et la droite 24 (voir les Sections 2.4 et 2.7). Si β et α conservent le QG, alors la transformation $\alpha \circ \beta = (1, 3)(2, 4) \circ (1, 3)(2)(4) = (1)(3)(2, 4)$ le conserve aussi. Nous venons de prouver que cela contredit nos hypothèses de construction. Il faut nécessairement que $\beta = \alpha$ ou que $\beta = I$.

□

3.2.3 Quadrilatères conservés par un automorphisme combinatoire $\alpha = (1)(3)(2, 4)$ ou $\alpha = (2)(4)(1, 3)$

Lemme 16. *Si un tel quadrilatère existe, alors α est une symétrie bilatérale.*

Démonstration. Immédiat (voir les Sections 2.5 et 2.7).

□

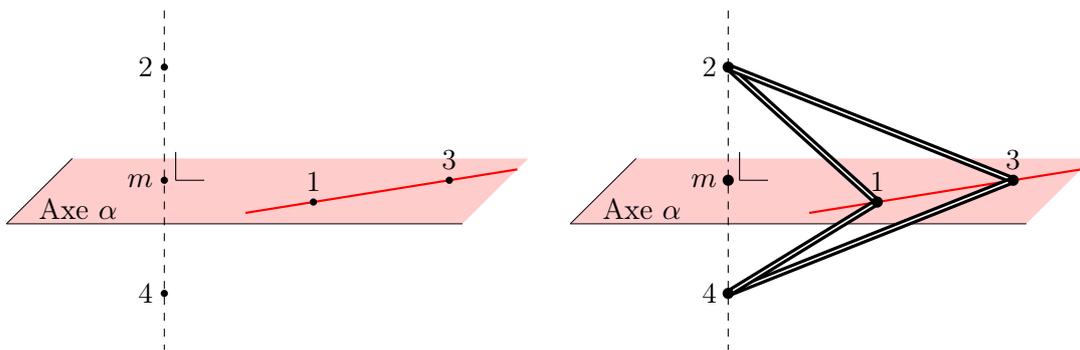


FIGURE 3.4 – Symétrie $(1)(3)(2,4)$ dont l'axe est un plan

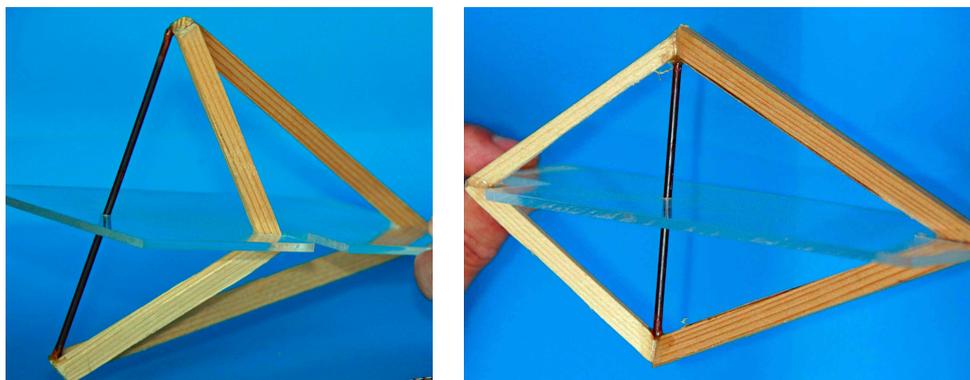


FIGURE 3.5 – *QG bilatéral*

La construction décrite dans la Section 2.4 prouve l'existence d'un quadrilatère gauche qui est conservé par un automorphisme $\alpha = (1)(3)(2, 4)$. Nous arrivons à la même conclusion pour $\alpha = (2)(4)(1, 3)$, ces deux transformations jouant un rôle symétrique.

Un quadrilatère gauche ainsi construit est appelé *QG bilatéral* (Figure 3.5).

Définition 3. Un QG bilatéral est un QG conservé par une symétrie bilatérale dont l'axe est un plan défini par la droite R et une des diagonales du QG.

Lemme 17. Il existe des quadrilatères gauches bilatéraux dont l'ensemble des automorphismes est constitué uniquement de l'identité I et de α .

Démonstration. Si nous souhaitons que le QG n'admette aucune autre isométrie, il suffit de choisir le sommet 2 tel que $\text{dist}(2, 1) \neq \text{dist}(2, 3)$. En effet du fait que $\text{dist}(2, 1) \neq \text{dist}(2, 3)$ et que 13 est dans le plan médiateur de $[2, 4]$, on ne peut permuter les côtés $[1, 2]$ ou $[1, 4]$ avec aucun des côtés $[2, 3]$ ou $[3, 4]$. Les seules isométries possibles sont l'identité I et $\alpha = (1)(3)(2, 4)$. Nous arrivons à la même conclusion pour $\alpha = (2)(4)(1, 3)$. \square

L'inspection physique d'un modèle incite à croire qu'il y a plusieurs formes différentes. Nous y revenons dans le dossier II où nous introduisons un nouveau critère de classification.

3.3 Groupes d'ordre 4

Nous devons considérer les trois sous-groupes de D_8 suivants :

le groupe combinatoire du rectangle : $\{I, (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3)(2, 4)\}$,
isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

le groupe combinatoire du losange : $\{I, (1)(3)(2, 4), (1, 3)(2)(4), (1, 3)(2, 4)\}$,
isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

le groupe combinatoire cyclique d'ordre 4 : $\{I, (1, 3)(2, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2)\}$,
isomorphe à \mathbb{Z}_4 .

Les éléments de ces sous-groupes sont également des isométries de l'espace. La nature géométrique des éléments d'ordre deux a été déterminée dans la Section 3.2.

Rappelons que

- $(1, 3)(2, 4)$ est une rotation spatiale d'un demi-tour dont l'axe est la droite R , perpendiculaire commune aux diagonales du QG (Section 3.2.2)
- $(1, 2)(3, 4)$ et $(1, 4)(2, 3)$ sont des rotations spatiales d'un demi-tour dont l'axe est la droite passant par les milieux des côtés opposés respectivement $[1, 2]$ et $[3, 4]$ ou $[1, 4]$ et $[2, 3]$ (Section 3.2.1).
- $(1)(3)(2, 4)$ et $(1, 3)(2)(4)$ sont des symétries bilatérales dont l'axe est le plan médiateur de $[2, 4]$ (respectivement $[1, 3]$) et comprend les sommets 1 et 3 (respectivement 2 et 4) (Section 2.5 et lemme 17, Section 3.2.3)

3.3.1 Sous-groupe combinatoire du rectangle $\{I, (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3)(2, 4)\}$

Nature géométrique du groupe :

Lemme 18. Le groupe combinatoire du rectangle est représenté par l'identité I et trois rotations spatiales d'un demi-tour α, β, γ .

Démonstration. Immédiat (voir les rappels ci-dessus). \square

Appelons respectivement A, B, C les axes de rotation de ces trois demi-tours α, β et γ .

Lemme 19.

- (i) La droite B est une trace de α ,
- (ii) La droite B est perpendiculaire à A .

Démonstration.

- (i) Comme le groupe est commutatif, $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ et $\alpha = \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}$. Soit un point $p \in B$. Il s'ensuit que $\alpha(p) := \beta(\alpha(\beta^{-1}(p)))$ (la notation $:=$ signifie *égal par définition*).

Or $\beta^{-1}(p) = p$ car $p \in B$.

Dès lors, $\alpha(p) = \beta(\alpha(p))$ implique que β fixe $\alpha(p)$ et donc que $\alpha(p) \in B$.

(ii) Ce point résulte du fait que les droites conservées par une rotation spatiale d'un demi-tour sont, outre l'axe de la rotation, les droites perpendiculaires à celui-ci.

De même, il va de soi que la droite C est une trace de α et que la droite C est perpendiculaire à la droite A . □

Corollaire 1. *Les axes A, B, C des trois demi-tours constituant le groupe d'isométries d'ordre quatre sont deux à deux perpendiculaires en un même point.*

Le groupe obtenu est unique à une isométrie près¹. Nous dirons que c'est un groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$, le + signifiant qu'il s'agit d'un groupe de rotations (nous le désignons aussi par le symbole ).

Groupe combinatoire du rectangle : le quadrilatère :

Poursuivons notre analyse d'un QG conservé par le groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ (ou ). Partons de trois demi-tours α, β, γ d'axes A, B, C perpendiculaires en o (Figure 3.6).

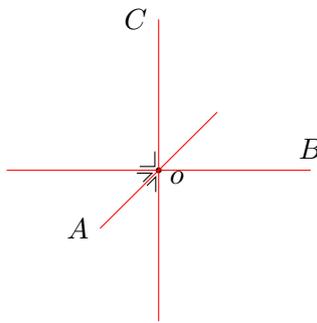


FIGURE 3.6 – Trois demi-tours

Considérons un QG 1234 invariant par les automorphismes α, β, γ qui agissent comme décrit ci-dessus dans la présente section. On voit que les points 1, 2, 3, 4 sont dans une même orbite.

Définition 4. *Si G est un groupe de transformations d'un espace E et si p est un point de E , l'orbite de p sous l'action de G est l'ensemble des transformés $g(p)$ où g parcourt G . Il se dit aussi que $\{g(p) \in E | g \in G\}$ est une orbite de G . A titre d'exemple, si G est le groupe des isométries conservant un carré du plan, une orbite de G est constituée par les quatre sommets du carré, une autre, par les quatre milieux des côtés, une autre par le centre du carré.*

Si le point 1 était contenu dans l'un des trois plans AB, BC, AC , par exemple AB , chacun de ses transformés serait contenu dans le plan AB et le quadrilatère 1234 serait plan. Pour tout point extérieur aux plans AB, BC, AC , le groupe génère un ensemble de quatre points qui sont les sommets d'un tétraèdre et les sommets de trois rectangles gauches.

En effet, le tétraèdre 1234 engendre trois quadrilatères gauches distincts.

Les droites A, B, C livrent un système de coordonnées à condition de choisir une unité. Le point 1 a des coordonnées (x, y, z) (Figure 3.7). Ses transformés par α, β, γ sont les points $\alpha(1) = (x, -y, -z)$, $\beta(1) = (-x, y, -z)$, $\gamma(1) = (-x, -y, z)$. Nous voyons apparaître un parallélépipède rectangle ayant ces quatre sommets et encore $(-x, y, z), (x, -y, z), (x, y, -z), (-x, -y, -z)$.

La réduction clarificatrice s'achève. L'existence de quadrilatères de ce type est facile à partir de tout parallélépipède rectangle.

Tout parallélépipède rectangle \mathcal{P} (Figure 3.7) livre une partition de ses huit sommets en deux tétraèdres (Figure 3.8) dont deux sommets quelconques ne sont pas sur une arête de \mathcal{P} . Les quatre sommets d'un de ces tétraèdres constituent une orbite (voir la Définition 4) du groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$

(ou ) du rectangle.

1. En cristallographie, \mathbb{Z}_2 est noté \mathbf{C}_2

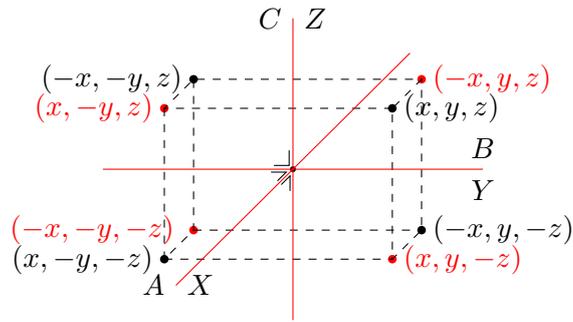


FIGURE 3.7 – Trois demi-tours et un parallépipède rectangle

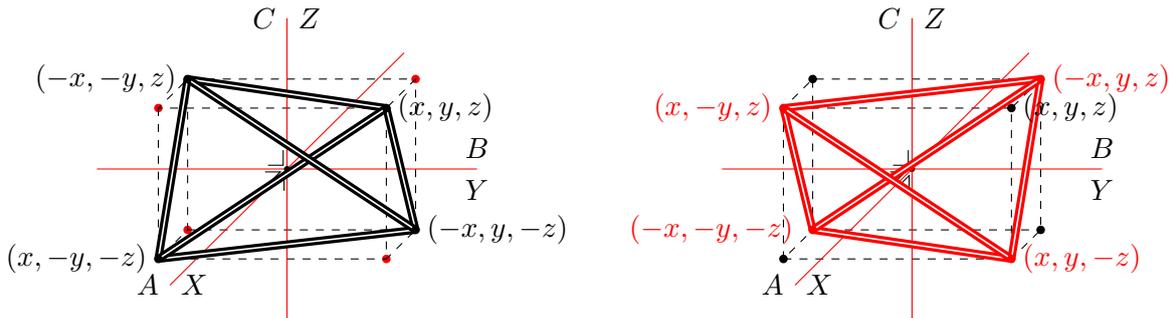


FIGURE 3.8 – Trois demi-tours, parallépipède rectangle et deux tétraèdres

Chacun de ces tétraèdres livre à son tour trois quadrilatères gauches distincts dont les sommets sont ceux du tétraèdre (Figures 3.9 et 3.10). Ces quadrilatères admettent le groupe de symétrie

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ (ou ). Ils sont inscrits dans le parallépipède rectangle \mathcal{P} et possèdent les symétries requises.

Un quadrilatère gauche ainsi construit est appelé *Rectangle gauche* (voir Figures 3.9 et 3.10) ou *QG Rectangle*. Un quadrilatère gauche de ce type détermine un parallépipède rectangle.

Définition 5. *Un rectangle gauche est un QG conservé par trois rotations d'un demi-tour dont les axes sont deux à deux perpendiculaires en un même point.*

L'existence du QG est prouvée mais il peut être conservé par d'autres isométries.

Lemme 20. *Il existe des rectangles gauches dont l'ensemble des automorphismes est constitué de l'identité et de trois rotations d'un demi-tour.*

Démonstration. Si nous désirons obtenir un rectangle gauche dont le groupe d'automorphismes est $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ (ou ) , il suffit de partir d'un parallépipède ayant trois dimensions différentes. Dans ce cas, prouvons que le QG n'admet aucune des autres isométries possibles à savoir deux symétries bilatérales ou deux anti-rotations.

L'axe d'une symétrie bilatérale comprend une diagonale du QG qui est aussi une diagonale d'une face du parallépipède rectangle. L'axe ne peut être la médiatrice de l'autre diagonale que si la face qui la comprend est un carré. Le parallépipède aurait alors deux dimensions égales, ce que nous avons exclu. Il ne peut y avoir une symétrie bilatérale.

Une anti-rotation n'est possible que si les faces perpendiculaires à R sont des carrés. Il ne peut y avoir une anti-rotation. \square

L'aspect photo :

Selon les critères adoptés pour tout ce qui précède (sections 3.1 et 3.2), il n'y a plus lieu de distinguer les divers quadrilatères gauches dont le groupe est celui du rectangle. Ce sont des *rectangles gauches*.

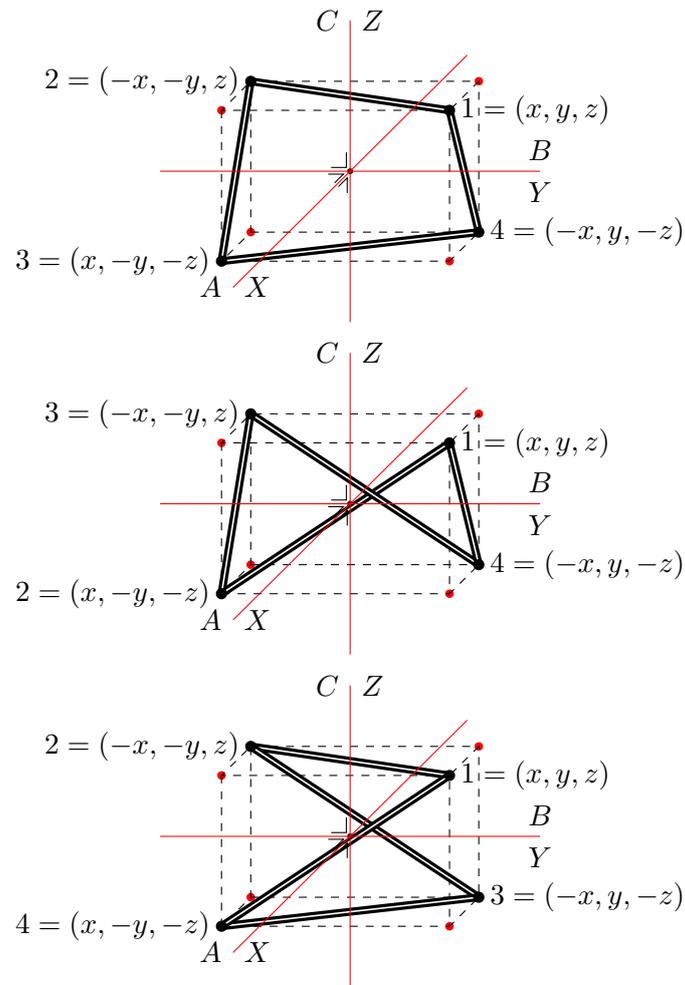


FIGURE 3.9 – Trois demi-tours, un tétraèdre et trois *Rectangles gauches*

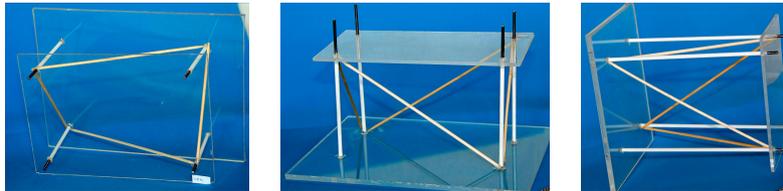


FIGURE 3.10 – *****Photos à refaire** Trois demi-tours, un tétraèdre et trois *Rectangles gauches*

Un des auteurs songe à photographier chaque QG et observe qu'à l'image, il obtient des Q plans de divers types : convexe, bec, papillon. Quelle est l'objectivité de ce constat ? Pour le confirmer, nous considérons des projections cylindriques

On peut se limiter à des projections cylindriques. Il nous semble assuré que tout QG peut se projeter ainsi en bec, convexe, ou papillon.

En effet,

- toutes les notions utilisées sont des notions affines,
- tous les quadrilatères gauches sont affinement équivalents,
- il existe un quadrilatère gauche qui donne lieu aux trois projections (bec, convexe, papillon).

Projections du rectangle gauche à l'aide de coordonnées :

Dans le cas du *Rectangle gauche*, trois projections orthogonales se distinguent : suivant la direction de A, B, C (Figure 3.11). Et des projections orthogonales : parallèles à A et sur le plan BC , etc.

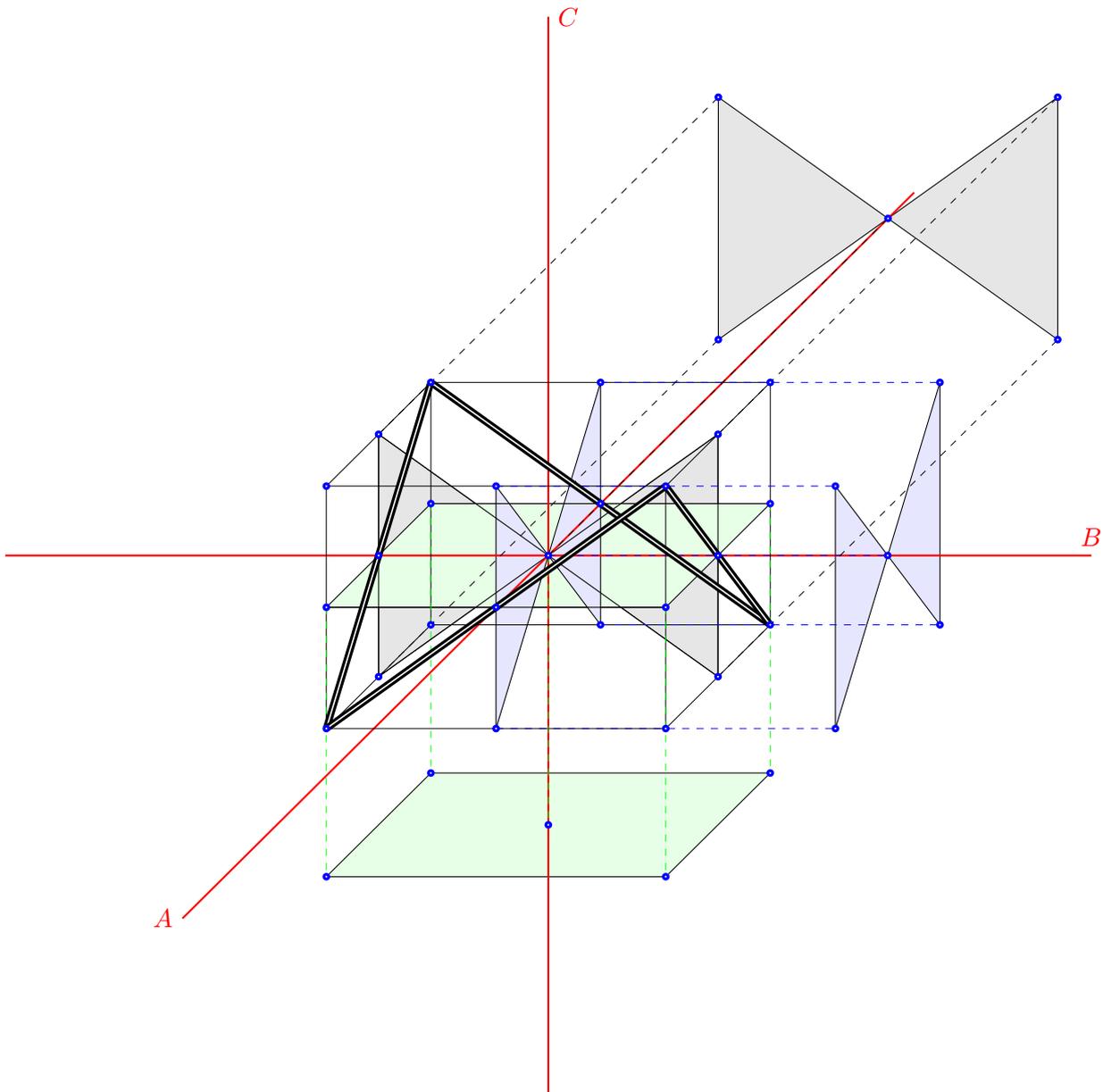


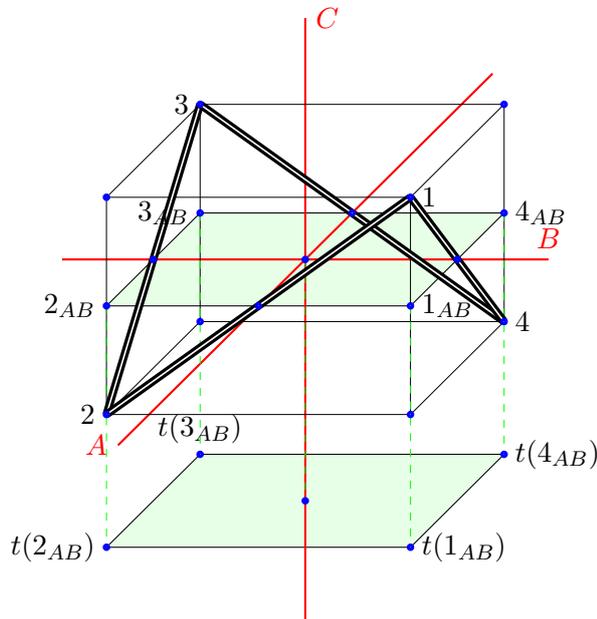
FIGURE 3.11 – Les trois projections orthogonales d'un rectangle gauche selon A, B et C

Considérons le rectangle gauche

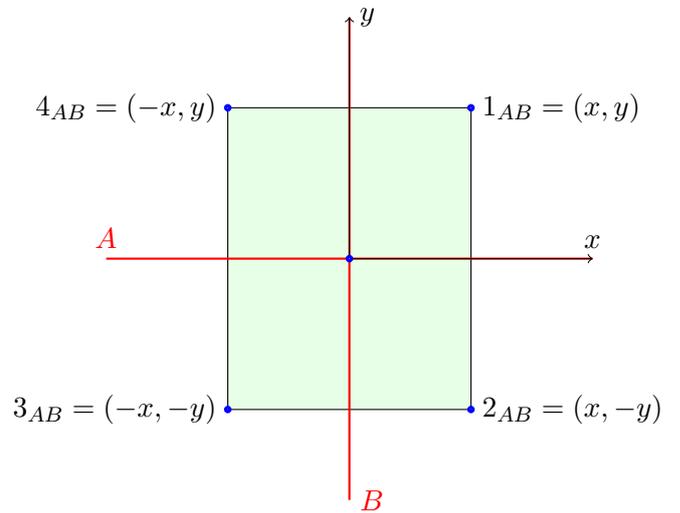
$$\begin{aligned} 1 &= (x, y, z) & 2 &= (x, -y, -z) \\ 3 &= (-x, -y, z) & 4 &= (-x, y, -z) \end{aligned}$$

– Projétons orthogonalement le QG selon C supposé vertical sur le plan AB

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases}$$



Projection du QG sur le plan AB selon C



Vue de la projection dans un système d'axes XY

FIGURE 3.12 –

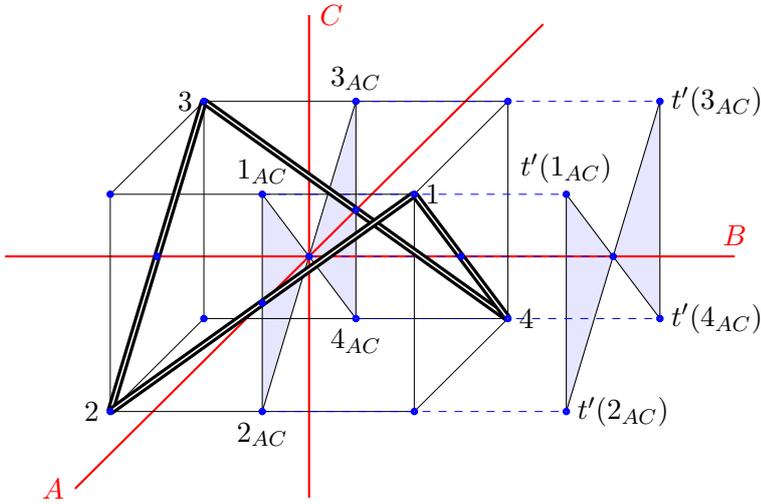
Ceci livre le quadrilatère plan :

$$\begin{aligned} 1_{AB} &= (x, y) \\ 2_{AB} &= (x, -y) \\ 3_{AB} &= (-x, -y) \\ 4_{AB} &= (-x, y) \end{aligned}$$

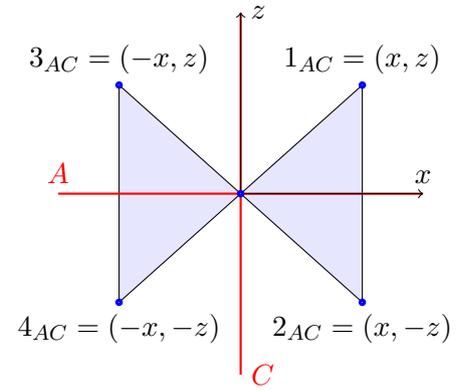
Il s'agit d'un rectangle.

– Projétons orthogonalement le QG selon B sur le plan AC

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \\ z' = z \end{cases}$$



Projection du QG sur le plan AC selon B



Vue de la projection dans un système d'axes XZ

FIGURE 3.13 –

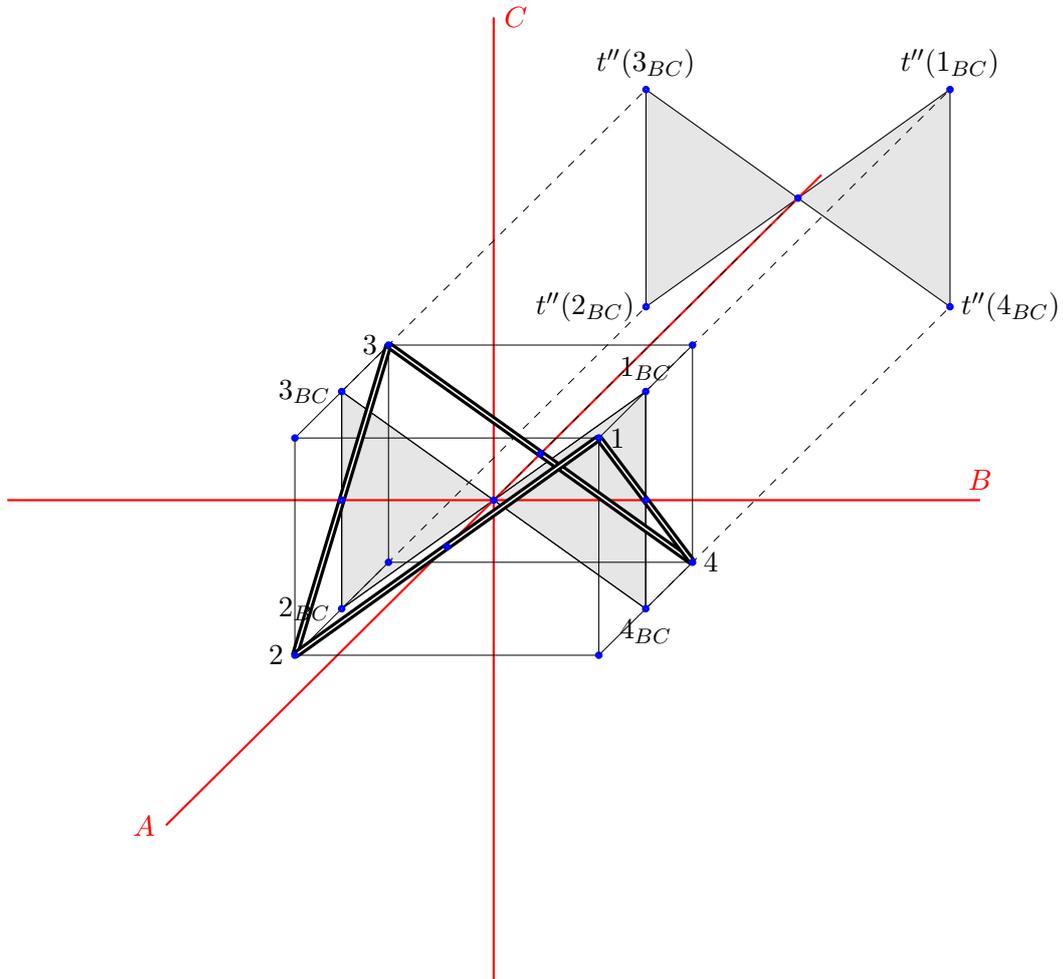
Ceci livre le quadrilatère plan

$$\begin{aligned} 1_{AC} &= (x, z) \\ 2_{AC} &= (x, -z) \\ 3_{AC} &= (-x, z) \\ 4_{AC} &= (-x, -z) \end{aligned}$$

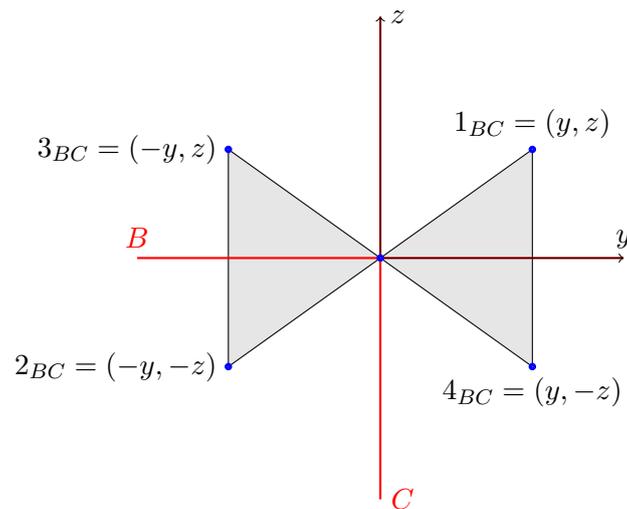
Il s'agit d'un papillon rectangle.

– Projétons orthogonalement le QG selon A sur le plan BC

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$



Projection du QG sur le plan BC selon A



Vue de la projection dans un système d'axes YZ

FIGURE 3.14 –

Ceci livre le quadrilatère plan

$$\begin{aligned} 1_{BC} &= (y, z) \\ 2_{BC} &= (-y, -z) \\ 3_{BC} &= (-y, z) \\ 4_{BC} &= (y, -z) \end{aligned}$$

Il s'agit d'un papillon rectangle.

Conclusion : nous résumons l'analyse développée tout au long de cette section dans le théorème suivant.

Théorème 10. Soit un QG ayant un groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ (ou ) , dont les axes orthogonaux sont A, B, C . Un des trois axes et un seul, mettons C est la perpendiculaire commune aux deux diagonales du QG. Des trois projections du QG selon A (respectivement B, C) sur BC (respectivement AC, AB), celle selon C livre un rectangle et les deux autres un papillon rectangle.

3.3.2 Sous-groupe combinatoire du losange $\{I, (1)(3)(2, 4), (1, 3)(2)(4), (1, 3)(2, 4)\}$

Nature géométrique du groupe :

Lemme 21. Le groupe combinatoire du losange est représenté par l'identité I , une rotation spatiale d'un demi-tour et deux symétries bilatérales.

Démonstration. Immédiat (voir description en début de la Section 3.3). □

Lemme 22. Les axes des deux symétries bilatérales sont des plans perpendiculaires qui ont pour intersection l'axe de la rotation spatiale.

Démonstration. Soit $\alpha = (1, 3)(2, 4)$, $\beta = (1)(3)(2, 4)$ et $\gamma = (2)(4)(1, 3)$. Nous avons rappelé au début de la section 3.3 que

- α est une rotation spatiale d'un demi-tour dont l'axe est la droite R ,
- β et γ sont des symétries bilatérales ; notons π_β et π_γ leurs axes. Observons que $\alpha \circ \beta = \gamma = \beta \circ \alpha$. La commutativité de la composition des deux symétries bilatérales implique que leurs axes sont des plans perpendiculaires. De plus, comme $\beta \circ \gamma = \alpha$, l'intersection $\pi_\beta \cap \pi_\gamma$ est l'axe de la rotation spatiale α .

□

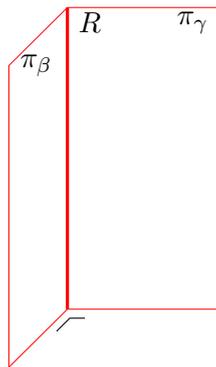


FIGURE 3.15 – Section 3.3.2 : Un demi-tour et deux symétries bilatérales

Conclusion : Le groupe obtenu est unique à une isométrie près. Nous dirons que c'est un groupe²

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ (ou ) . Il est constitué de deux symétries bilatérales d'axes perpendiculaires et d'une rotation d'un demi-tour dont l'axe est l'intersection des deux plans (Figure 3.15).

2. En cristallographie, \mathbb{Z}_2 est noté C_2

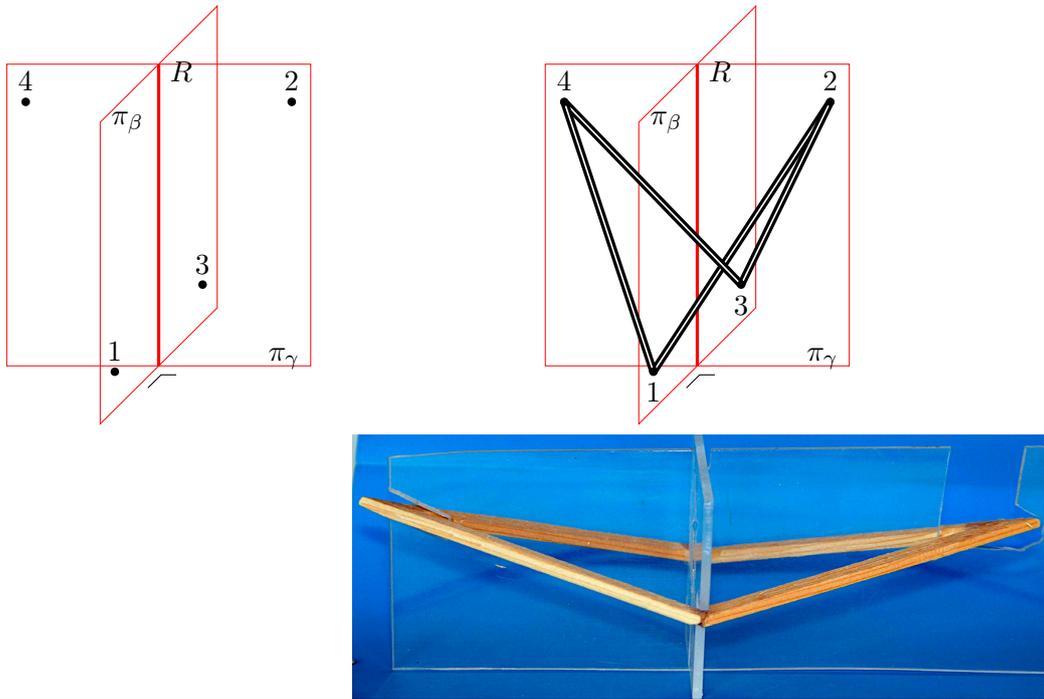


FIGURE 3.16 – Un demi-tour, deux symétries bilatérales et un *losange gauche*

Groupe combinatoire du losange : le quadrilatère :

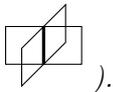
Pour établir l'existence de quadrilatères gauches comme voulus, on part d' α, β, γ et de leurs axes R, π_β et π_γ . Pour rappel les plans π_β et π_γ sont perpendiculaires et $\pi_\beta \cap \pi_\gamma = R$. Pour tout point 1 dans $\pi_\beta \setminus R$ et tout point 2 dans $\pi_\gamma \setminus R$ et qui sont dans deux plans distincts perpendiculaires à R , le point 3 est l'image par α du point 1 et le point 4 est celle du point 2, le quadrilatère gauche 1234 possède les propriétés requises, ce qui assure l'existence d'un tel quadrilatère.

Un quadrilatère gauche ainsi construit est appelé un *losange gauche* ou un *QG losange*.

Définition 6. *Un losange gauche est un QG conservé par deux symétries bilatérales dont les axes sont deux plans perpendiculaires.*

L'existence d'un tel QG est prouvée mais ceci n'interdit pas qu'il soit conservé par d'autres isométries.

Lemme 23. *Il existe un losange gauche dont le groupe d'automorphismes est $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ (ou*



Démonstration. Utilisons la construction d'un losange gauche décrite ci-dessus et choisissons le point 2 de telle façon que $\text{dist}(2, \pi_\beta) \neq \text{dist}(1, \pi_\gamma)$. La condition $\text{dist}(2, \pi_\beta) \neq \text{dist}(1, \pi_\gamma)$ interdit de permuter les diagonales. Les isométries du groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ sont, parmi les isométries admises, les seules qui conservent chaque diagonale. Le groupe d'isométries de ce losange gauche

est $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ (ou ).

□

3.3.3 Groupe combinatoire cyclique d'ordre quatre

$$\mathbb{Z}_4 = \{I, (1, 3)(2, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2)\}$$

Nature géométrique du groupe :

Considérons le groupe combinatoire cyclique d'ordre quatre constitué par

$$\{I, (1, 3)(2, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2)\}.$$

Nous connaissons les isométries qu'il incarne (voir les Sections 2.4, 2.6 et 2.7). Appelons³ $\alpha = (1, 3)(2, 4)$, $\beta = (1, 2, 3, 4)$, $\beta^{-1} = (1, 4, 3, 2)$ avec $\beta^2 = \alpha$. L'isométrie α est la rotation d'un demi-tour d'axe R , et les isométries β et β^{-1} sont des anti-rotations d'ordre quatre.

Rappelons que la droite R est conservée par tous les éléments du groupe \mathbb{Z}_4 et qu'ils fixent le point o , centre du quadrilatère gauche 1234 selon le squelette décrit à la Section 2.2.

Théorème 11. *L'anti-rotation β est la composée de la symétrie σ centrée en o et de la rotation ρ d'un quart de tour dont l'axe est R .*

Démonstration. β est la composée d'une symétrie centrée σ et d'une rotation ρ dont l'axe passe par le centre de symétrie.

On a $\beta = \sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$

$\beta = \sigma \circ \rho$ entraîne $\rho = \sigma^{-1} \circ \beta = \sigma \circ \beta$ et

$\beta = \rho \circ \sigma$ entraîne $\rho = \beta \circ \sigma^{-1} = \beta \circ \sigma$

d'où $\rho^2 = (\beta \circ \sigma) \circ (\sigma \circ \beta) = \beta^2$.

On a aussi $\beta^2 = \alpha$ puisque $(1234) \circ (1234) = (13)(24)$.

Il s'ensuit que ρ n'est pas d'ordre deux puisque $\rho^2 = \alpha \neq I$.

Dès lors puisque $\alpha^2 = I$, on a $\beta^4 = I$ et $\rho^4 = I$.

La rotation ρ est une rotation d'ordre quatre, donc une rotation d'un quart de tour. D'autre part, β fixe le point o et conserve la droite R perpendiculaire commune aux diagonales 13 et 24.

Nous pouvons donc affirmer que σ est la symétrie centrée en o et ρ la rotation d'un quart de tour dont l'axe est la droite R passant par o .

En effet, supposons qu'un point k distinct de o soit le centre de σ . Les points k, o et $\sigma(o)$ sont alignés et $\rho(\sigma(o))$ est sur une perpendiculaire à ok passant par k car ρ est un quart de tour fixant k .

Comme $\beta(o) = \rho(\sigma(o)) = o$, la droite ok serait perpendiculaire à ok en k , ce qui est contradictoire.

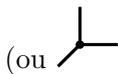
Donc le centre de σ est o . De plus σ et β conservent R . Donc $\beta(R) = \rho(\sigma(R)) = \rho(R) = R$. L'axe de ρ est R , sinon $\rho(R)$ est perpendiculaire à R . \square

Groupe combinatoire cyclique d'ordre 4 : le quadrilatère :

Le QG 1234 est une orbite (voir la Définition 4) du groupe engendré par $\beta = \sigma \circ \rho$ et ceci achève la réduction du problème. Nous sommes ramenés à la donnée d'une anti-rotation β d'ordre quatre et d'une de ses orbites.

Soit un quadrilatère 1234 et $\beta = (1, 2, 3, 4)$ une anti-rotation de centre o et d'axe R . Par le théorème précédent, la symétrie β conserve le quadrilatère 1234 et donc la bidroite 13 – 24.

Souvenons-nous qu'il y a deux sortes de bidroites, celles qui ont un groupe d'ordre quatre ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$)⁺



(ou) et celles qui ont le groupe D_8 . Il en résulte que la bidroite 13, 24 est orthogonale.

Regardons la bidroite par au-dessus selon la perpendiculaire commune R (voir Figure 3.17) ;

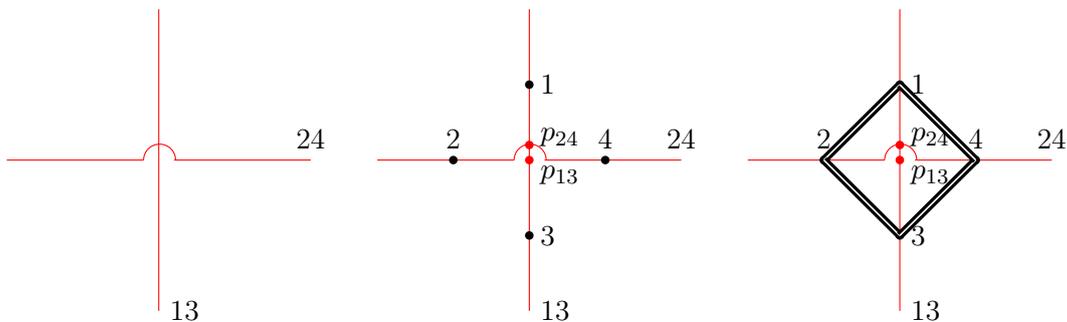


FIGURE 3.17 – Le groupe combinatoire d'ordre quatre : \mathbb{Z}_4

l'isométrie β^2 est une rotation spatiale d'un demi-tour. En outre $\beta^2 = (1, 3)(2, 4)$ conserve chaque droite de la bidroite.

3. Remarque : dans les sections 2.4, 2.6 $\alpha, \beta, \beta^{-1}$ sont appelées respectivement δ_1, K, K'

Les pieds de la bidroite sont notés p_{13} et p_{24} (voir la section 2.2). Les sommets 1 et 3 sont à même distance de p_{13} et les sommets 2 et 4 sont à même distance de p_{24} . L'isométrie β envoie 13 sur 24 et donc les distances $\text{dist}(1, p_{13}), \text{dist}(3, p_{13}), \text{dist}(2, p_{24}), \text{dist}(4, p_{24})$ sont égales en raison du fait que β possède ces quatre segments comme orbite.

Dès lors, la construction et l'existence du quadrilatère sont acquises.

On donne une bidroite orthogonale BC , un point 1 sur B autre que le pied de la perpendiculaire commune à B et C . Les points 2, 3, 4 sont déterminés sur B et C . Les arêtes 12, 23, 34, 41 sont déterminées. Un quadrilatère gauche ainsi construit est appelé *carré gauche* ou *QG carré*.

Définition 7. *Un carré gauche est un QG possédant au moins les symétries représentées par \mathbb{Z}_4 .*

Y a-t-il des carrés gauches dont le groupe des automorphismes est uniquement \mathbb{Z}_4 ? La réponse est négative comme nous le verrons dans la Section 3.3.4 : *Le sucre d'Annie*. Le théorème 12 sera la justification de la définition 7.

3.3.4 Le sucre d'Annie : les QG conservés par \mathbb{Z}_4

Nous avons convenu qu'un QG possédant les symétries représentées par \mathbb{Z}_4 est un *carré gauche* (Figure 3.18).

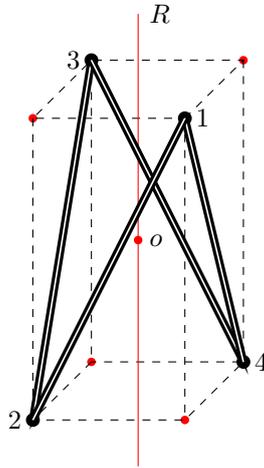


FIGURE 3.18 – *carré gauche*

Rappel : Tout quadrilatère plan qui admet le groupe de symétries \mathbb{Z}_4 admet automatiquement D_8 comme groupe de symétries. C'est un carré! En est-il de même pour les quadrilatères gauches?

Théorème 12. *Tout carré gauche admet automatiquement D_8 comme groupe de symétries.*

Démonstration. \mathbb{Z}_4 conserve la bidroite 13, 24 (Figure 3.18) ainsi que la perpendiculaire R commune à ces deux droites. La droite R passe par le milieu des segments $[1, 3]$ et $[2, 4]$ vu que le quadrilatère gauche est conservé par la rotation spatiale d'un demi-tour autour de R . Considérons le plan α contenant la droite 24 et R . La symétrie bilatérale par rapport à α fixe les sommets 2 et 4 du quadrilatère et permute les sommets 1 et 3. Par conséquent cette symétrie bilatérale conserve le quadrilatère gauche. Nous avons donc trouvé une symétrie supplémentaire aux symétries de \mathbb{Z}_4 . Par conséquent le groupe de symétries du QG est D_8 . □

Théorème 13. *Tout carré gauche conservé par le groupe $\mathbb{Z}_4 = \{I, (1, 2, 3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4, 3, 2)\}$ s'inscrit dans un parallélépipède rectangle à base carrée.*

Démonstration. Pour rappel : $\alpha = (1, 3)(2, 4)$ est une rotation spatiale d'un demi-tour d'axe R et $\beta = (1, 2, 3, 4)$ est une antirotation, $\beta = \sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$ où ρ est une rotation spatiale d'un quart de tour d'axe R et σ est une symétrie centrale de centre o .

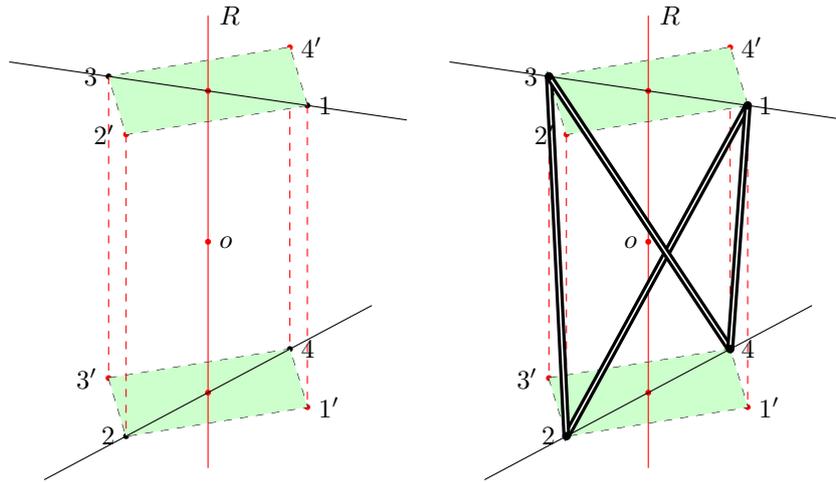


FIGURE 3.19 – Carrés gauches conservés par le groupe cyclique \mathbb{Z}_4

Comme le quadrilatère gauche 1234 est conservé par α , le segment $[1, 3]$ est perpendiculaire à R ; de même pour le segment $[2, 4]$. Les segments $[1, 3]$ et $[2, 4]$ ont même longueur puisque β conserve le quadrilatère gauche.

Les segments $[1, 3]$ et $[2, 4]$ ne peuvent être coplanaires.

Appelons $2'$ et $4'$ les images de 2 et 4 par la projection parallèle à R sur le plan perpendiculaire à R par 1 (et 3). Appelons $1'$ et $3'$ les images de 1 et 3 par la projection parallèle à R sur le plan perpendiculaire à R par 2 (et 4).

Nous avons $11' // 22' // 33' // 44' // R$.

Les deux plans de projection sont aussi parallèles puisqu'ils sont perpendiculaires à R .

Il en résulte que les segments $[1, 1']$, $[2, 2']$, $[3, 3']$ et $[4, 4']$ ont même longueur. Nous avons aussi $[1, 2']$, $[2', 3]$, $[3, 4']$ et $[4', 1]$ ont même longueur de même que les segments $[1', 2]$, $[2, 3']$, $[3', 4]$ et $[4, 1']$ puisque ρ est une rotation spatiale d'un quart de tour d'axe A . Dès lors, les sommets du quadrilatère gauche sont les sommets d'un parallélépipède à base carrée.

La condition est nécessaire pour que le quadrilatère gauche soit conservé par \mathbb{Z}_4 .

Cette condition est suffisante pour que \mathbb{Z}_4 conserve le quadrilatère gauche. En effet, $\rho(1234) = (4'1'2'3')$ et $\sigma(4'1'2'3') = (2341)$, donc $\beta(1234) = (2341)$. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir un cube. Constatons que $\alpha(1234) = (3412)$. \square

Remarque :

Contre toute attente, un QG inscrit dans un cube ne se distingue pas d'un QG inscrit dans un sucre quelconque. Il s'agit d'un carré gauche, cas particulier de rectangle gauche. Le groupe des isométries qui conservent un carré gauche est d'ordre 8, c'est un D_8 . Rappelons qu'un rectangle gauche possède un squelette formé des trois axes A , B et C des rotations d'un demi-tour qui le conserve. Ce squelette nous a permis à la Section 3.3.1 de construire le QG. Le groupe géométrique des automorphismes du squelette est d'ordre 48. Il s'agit du groupe des symétries d'un cube dont les faces sont parallèles à AB , BC , CA . Le groupe des symétries d'un rectangle gauche inscrit dans un cube est un sous-groupe propre de celui des symétries du cube.

Remarquons qu'un carré gauche est aussi un cas particulier de losange gauche.

3.4 Groupe combinatoire d'ordre 8 : D_8

Ce groupe contient \mathbb{Z}_4 . Le quadrilatère gauche est donc forcément un *carré gauche* (Figure 3.20), selon l'étude effectuée en section 3.3.

En outre, le groupe complet de ce quadrilatère gauche est le groupe D_8 , en vertu du théorème 12. L'existence du QG est réglée par l'étude effectuée dans la section 3.3.

FIGURE 3.20 – Dessin et photos de *Carrés gauches*

3.5 Synthèse

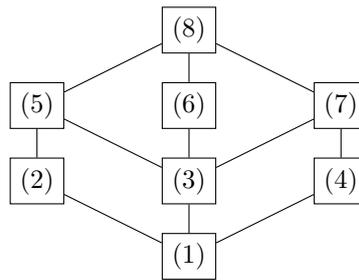
En résumé du parcours de cette section, nous obtenons 7 types de quadrilatères gauches classés selon leurs symétries, à savoir : *carré gauche*, *rectangle gauche*, *losange gauche*, *trapèze isocèle gauche*, *parallélogramme gauche*, *quadrilatère gauche bilatéral*, *quadrilatère gauche*.

Chapitre 4

Représentation du groupe D_8 et de ses sous-groupes en tant que groupes d'isométries

Rappelons que le QG et les QP sont gouvernés par un même schéma combinatoire. En particulier, le type combinatoire d'un groupe est pareil pour E^2 et pour E^3 .

Voici un schéma en arbre qui traduit l'ordre partiel dont est muni l'ensemble des sous-groupes de D_8 et dans lequel nous numérotons les nœuds.



Chacun de ces nœuds numérotés représente un sous-groupe de D_8 et fait l'objet d'une petite description qui suit.

4.1 Caractéristiques de chaque nœud

Nœud (1) Un QG de nœud (1)

- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 1,
- est conservé au moins par l'identité : $(1)(2)(3)(4)$,
- est appelé *QG* ou *QG quelconque*,

- est représenté par le dessin ,
- est représenté par le symbole I .

Nœud (2) Un QG de nœud (2)

- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 2,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$ et $(1,2)(3,4)$,
- admet au moins une rotation d'un demi-tour, dont l'axe contient les milieux des côtés opposés,
- est appelé *QG isocèle*,

- est représenté par les dessins  ou ,

- est représenté par le symbole \mathbb{Z}_2^{+M} (le $+$ signifie qu'il s'agit d'un groupe de rotation et M que l'axe de rotation est une médiane du QG).

Nœud (3) Un QG de nœud (3)

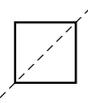
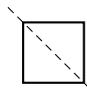
- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 2,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$ et $(1,3)(2,4)$,
- admet au moins une rotation d'un demi-tour, dont l'axe contient les milieux des diagonales,
- est appelé *Parallélogramme gauche* ou *QG parallélogramme*,

– est représenté par le dessin ,

– est représenté par le symbole \mathbb{Z}_2^{+D} (le + signifie qu'il s'agit d'un groupe de rotation et D que l'axe de rotation est la perpendiculaire commune aux diagonales du QG).

Nœud (4) Un QG de nœud (4)

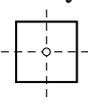
- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 2,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$ et $(1)(3)(2,4)$,
- admet au moins une symétrie bilatérale dont l'axe est le plan médiateur d'un segment diagonal et comprend l'autre diagonale,
- est appelé *QG bilatéral*,

– est représenté par les dessins  ou ,

– est représenté par le symbole \mathbb{Z}_2^- (le - signifie qu'il s'agit d'un groupe de symétrie bilatérale).

Nœud (5) Un QG de nœud (5)

- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 4 de type 2^2 ,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,2)(3,4)$ et $(1,4)(2,3)$,
- admet au moins trois rotations d'un demi-tour,
- est appelé *Rectangle gauche* ou *QG rectangle*,

– est représenté par le dessin ,

– est représenté par le symbole $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ ou  (Section 3.3.1).

Nœud (6) Un QG de nœud (6)

- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 4 de type 4,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,2,3,4)$ et $(1,4,3,2)$,
- admet au moins une rotation d'un demi-tour et deux antirotations d'ordre 4,
- est appelé *Carré gauche* ou *QG carré*,

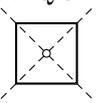
– est représenté par le dessin ,

– est représenté par le symbole \mathbb{Z}_4 .

Comme dans le cas des quadrilatères plans, tout quadrilatère de nœud (6) est automatiquement de nœud (8).

Nœud (7) Un QG de nœud (7)

- possède un groupe d'automorphismes dont l'ordre est au moins 4 de type 2^2 ,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1)(3)(2,4)$ et $(1,3)(2)(4)$,
- admet au moins une rotation d'un demi-tour et deux symétries bilatérales,
- est appelé *Losange gauche* ou *QG losange*,

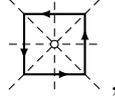
– est représenté par le dessin ,

– est représenté par le symbole $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ ou  (Section 3.3.2).

Nœud (8) Un QG de nœud (8)

- possède un groupe d'automorphismes d'ordre 8 de type D_8 ,
- est conservé au moins par les permutations : $(1)(2)(3)(4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,2)(3,4)$, $(1,4)(2,3)$, $(1)(3)(2,4)$ et $(1,3)(2)(4)$, $(1,4,3,2)$, $(1,2,3,4)$,

- admet trois rotations d'un demi-tour, deux symétries bilatérales, deux antirotations d'ordre 4 et l'identité,
- est appelé *Carré gauche* ou *QG carré*,



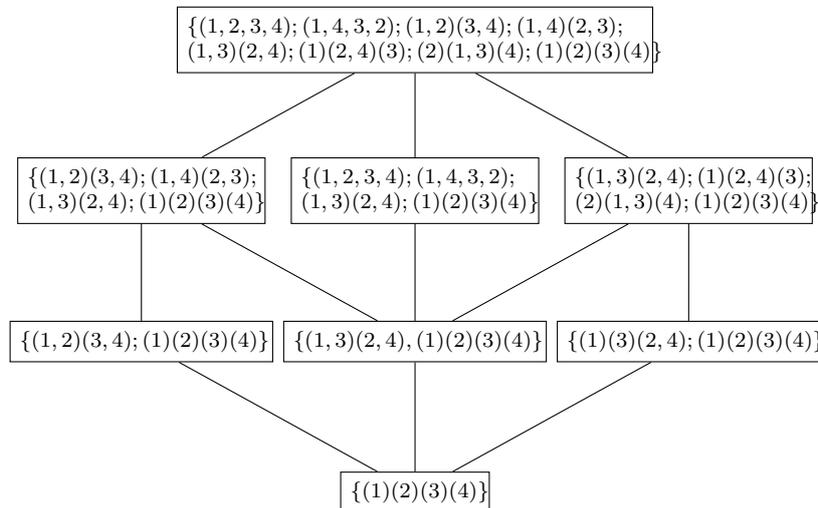
- est représenté par le dessin ,
- est représenté par le symbole D_8 .

4.2 Remarque sur les quadrilatères de la sphère

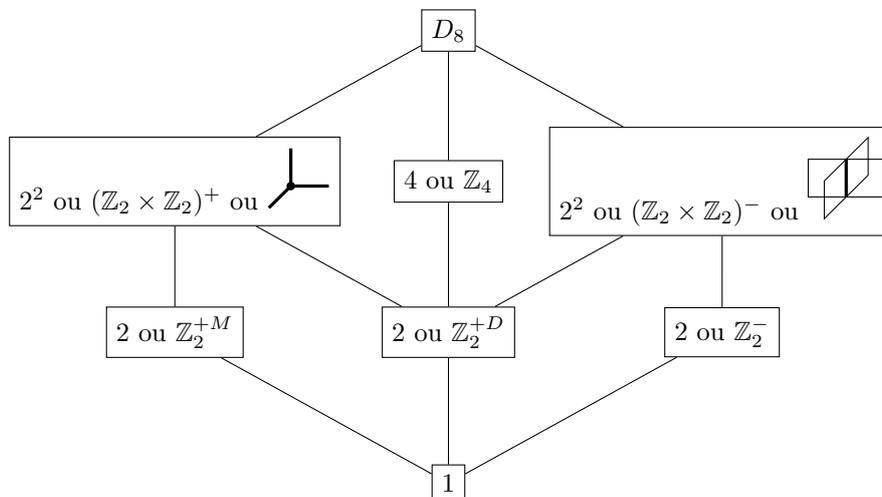
Remarquons aussi que tout quadrilatère gauche est inscriptible dans une et une seule sphère. Il y a donc un lien avec la géométrie elliptique, dans laquelle les côtés du quadrilatère sont des arcs de grands cercles. On en déduit facilement une classification des quadrilatères sphériques.

Comme lors de l'étude des quadrilatères plans ([3] et [2]), nous avons une représentation du groupe diédrique D_8 .

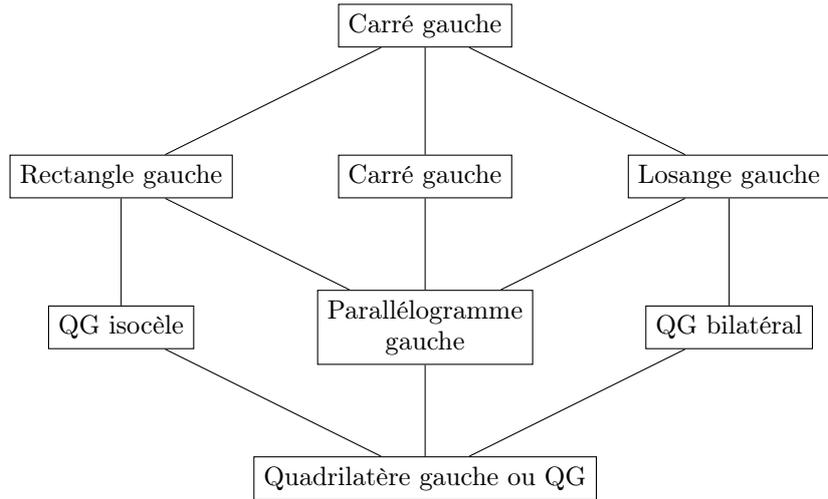
4.3 Représentation du groupe diédrique D_8 par des automorphismes



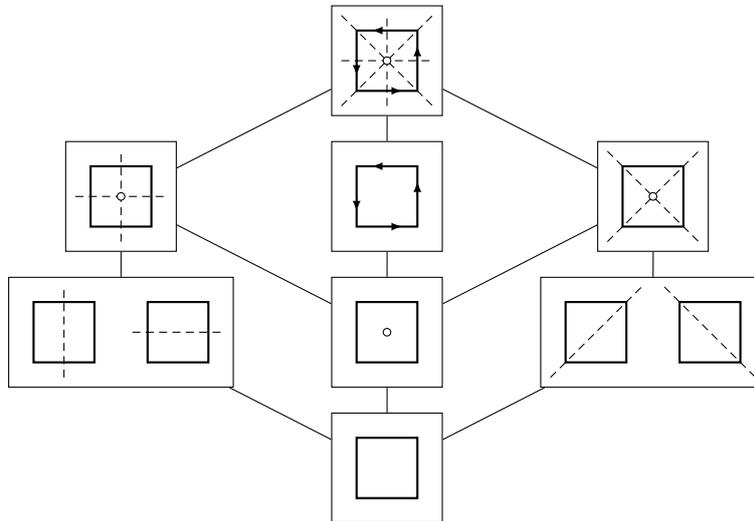
4.4 Représentation du groupe diédrique D_8 par des symboles



4.5 Représentation du groupe diédrique D_8 par des mots



4.6 Représentation du groupe diédrique D_8 par des dessins



Chapitre 5

Annexes

5.1 Annexe 1 : Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation

Ce théorème est dû à Euler et est enseigné en BA1 au moyen de matrices 3×3 et de valeurs propres.

Nous reprenons la démonstration de Buekenhout, Meunier, *Vivre la mathématique 3*, p. 36. (Réf. [11])

Théorème 14. *Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation (possède une droite de points fixes).*

Démonstration. Soit d un déplacement de E^3 et o un point fixe de d . Considérons un point $p \neq o$ et ses transformés $d(p) = p'$, $d(d(p)) = d^2(p) = d(p') = p''$.

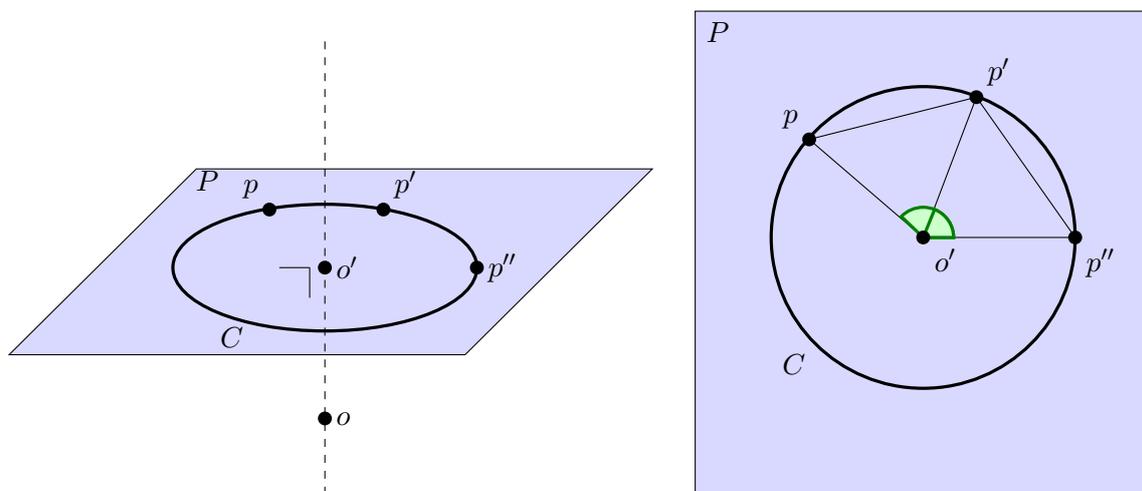


FIGURE 5.1 – Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation

Les points p, p', p'' sont équidistants de o , donc ils appartiennent à une sphère S de centre o .

- Si $p = p'$, le point p est un point fixe de d et nous savons que tous les points de la droite op sont fixes, donc d est une rotation.
- Si $p' = p''$, p' est un point fixe et d est une rotation.
- Si $p = p''$, alors le milieu de $[p, p']$ est fixe car $[p, p']$ est transformé en $[p', p]$. Donc d est encore une rotation.

Nous pouvons donc supposer que p, p', p'' sont trois points distincts sur S . De ce fait, ces points sont non alignés et ils déterminent un plan P qui coupe S suivant un cercle C . Par o passe une et une seule droite D perpendiculaire à P . Elle coupe P en un point o' .

Le point o' est équidistant de p, p', p'' car D est l'intersection des plans médiateurs de $[p, p']$ et $[p, p'']$. Donc les triangles $po'p$ et $p'o'p''$ sont superposables et de ce fait on a $\widehat{po'p} = \widehat{p'o'p''}$.

Soit r la rotation d'axe D qui transforme p en p' . On a $r(p') = p''$. Donc $r^{-1} \circ d$ est également un déplacement qui fixe o, p, p' . De ce fait $r^{-1} \circ d = 1_E$ et par un calcul déjà vu

$$\begin{aligned} r \circ (r^{-1} \circ d) &= r \circ 1_E = r \\ (r \circ r^{-1}) \circ d &= r \\ 1_E \circ d &= d = r \end{aligned}$$

Finalement $d = r$ et d est bien une rotation.

La démonstration est donc terminée. \square

Cette démonstration provient de Buekenhout, *Une étude axiomatique de l'espace affine et euclidien*, Réf.[5], ch. VII, sec. 1.20, p. 145-147.

Remarque : on peut trouver une autre démonstration dans Coxeter [14] p. 97-98, 7.14 et 7.15.

5.2 Annexe 2 : Classification des retournements de E^3

Le but de cette section est de démontrer que tout retournement de E^3 est une antirotation ou une symétrie glissée (Voir glossaire). Ceci exige des connaissances préalables dont nous faisons un inventaire dans le lemme 24.

Lemme 24.

1. La composée de deux retournements de E^3 est un déplacement de E^3 .
2. Tout déplacement de E^3 est un vissage (Voir glossaire) (ce qui inclut rotation, translation, identité).
3. Tout vissage de E^3 est la composée d'une rotation r et d'une translation t conservant l'axe de r . On a $rt = tr$.
4. Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation.
5. La composée d'une symétrie centrée et d'une translation est une symétrie centrée.
6. Toute symétrie centrée est un retournement.
7. Toute isométrie d'un plan se prolonge (*s'étend*) en deux isométries de l'espace, un déplacement et un retournement.

Théorème 15. *Tout retournement de E^3 est une antirotation ou une symétrie glissée.*

Démonstration.

1. Soit r un retournement de E^3 . Soit o un point et s la symétrie de centre o . Alors s est un retournement (Lemme 24.6) et $r \circ s := d$ est un déplacement¹ (Lemme 24.1).
2. Par (Lemme 24.2), d est un vissage. Si d est l'identité, $d = 1$, $r = s^{-1} = s$ qui est bien une antirotation.
Si d est une translation, $r = t \circ s^{-1} = t \circ s$ qui est une symétrie centrée par (Lemme 24.5) et de ce fait, une antirotation.
Il suffit dès lors de considérer le cas où $d = t \circ \rho = \rho \circ t$ où t est une translation (qui peut être 1) et ρ une rotation non identique. Soit A l'axe de ρ .
3. Nous avons $r = d \circ s = \rho \circ t \circ s = \rho \circ s'$ où s' est une symétrie centrée. par (Lemme 24.5). Soit o' le centre de symétrie de s' .
4. Par o' passe un et un seul plan P perpendiculaire à A . Ce plan est invariant par s' et par ρ , donc par r .
5. La restriction $s'(P)$ de s' au plan P est la symétrie centrée en o' qui est une rotation de P .
La restriction $\rho(P)$ de ρ au plan P est une rotation fixant le point $A \cap P$.
La restriction $r(P)$ de r au plan P est la composée $\rho(P) \circ s'(P)$, un produit de rotations, donc un déplacement dans P .

1. La notation $:=$ signifie « est défini par ».

6. Dans P , $r(P)$ est donc une rotation $\rho'(P)$ ou une translation $t'(P)$.
Appliquons (Lemme 24.7) à chacun de ces deux cas.
7. Si $r(P) = t'(P)$, cette translation plane s'étend en la translation t' et en la symétrie glissée $\sigma \circ t'$ où σ est la symétrie d'axe P .
Comme r est un retournement, $r \neq t'$ donc (Lemme 24.7) $r = \sigma \circ t'$ et r est une symétrie glissée.
8. Si $r(P) = \rho'(P)$, cette rotation plane s'étend en la rotation ρ' et en l'antirotation définie dans l'annexe 3, $\sigma \circ \rho'$ où σ est la symétrie d'axe P .
Comme r est un retournement, $r \neq \rho'$ donc (Lemme 24.7) $r = \sigma \circ \rho'$ et r est une antirotation.

□

5.3 Annexe 3 : Compléments sur les antirotations

Définition 8. Une antirotation est la composée d'une rotation ρ d'axe A et d'une symétrie centrée σ de centre o où $o \in A$.

La présente définition fut utilisée dans le théorème 15. La définition plus restreinte fut utilisée en section 2.3

Nous verrons une définition alternative dans la définition 9.

Le but de cette section est de démontrer le théorème 16. Nous débutons par la démonstration d'un lemme.

Lemme 25.

1. Si r est une rotation d'axe D et s une symétrie orthogonale dont l'axe est un plan P perpendiculaire à D alors $r \circ s = s \circ r$.
2. Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales dont les axes sont des plans sécants. En outre, l'intersection de ces deux plans est l'axe de la rotation.
3. La composée de trois symétries orthogonales est un retournement.
4. $\sigma \circ \rho = \mu \circ \rho'$ où μ est la symétrie par rapport au plan M perpendiculaire à A par o et ρ' est une rotation d'axe A et dont l'angle est celui de ρ augmenté d'un demi-tour.
5. $\rho' \circ \mu = \mu \circ \rho'$
6. $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$
7. Toute antirotation est la composée de 3 symétries bilatérales dont les axes sont des plans passant par o et dont deux sont sécants et perpendiculaires au troisième.
8. Toute antirotation est un retournement.

Démonstration.

1. Soit p un point quelconque.
Si p appartient à D , la propriété est évidente puisque p et $s(p)$ sont des points fixes de r .
Si p n'appartient pas à D , considérons le plan P' perpendiculaire à D par p et o le point de percée de D dans ce plan. La restriction de r à P' est une rotation de centre o d'où $|op| = |or(p)|$. La figure $(por(p))$ est contenue dans P' qui est parallèle à P . L'image de cette figure par s est la figure $(s(p)s(o)p')$ où $p' = s(r(p))$. Cette image est contenue dans un plan parallèle à P donc perpendiculaire à D . Les propriétés de l'isométrie s nous permettent d'écrire que $|op| = |or(p)|$ entraîne $|s(o)s(p)| = |s(o)s(p')|$ et que les amplitudes des angles $\widehat{por(p)}$ et $\widehat{s(p)s(o)p'}$ sont égales. Comme $s(o)$ est un point de D , nous pouvons écrire que $p' = r(s(p))$ et la propriété est démontrée.
2. Bien connu.
3. Bien connu.

4. Puisque A est perpendiculaire à M par o , nous pouvons décomposer la symétrie centrée comme suit :

$$\sigma = \rho_\pi \circ \mu = \mu \circ \rho_\pi$$

où ρ_π est la rotation d'un demi-tour autour de A et μ la symétrie orthogonale d'axe M . Les deux isométries peuvent être permutées, ceci découle de la connaissance préalable 1 ci-dessus.

Dès lors

$$\sigma \circ \rho = \mu \circ \rho_\pi \circ \rho = \mu \circ \rho'$$

car ρ_π et ρ ont le même axe A perpendiculaire à M .

5. Evident par la connaissance préalable ci-dessus car M est perpendiculaire à A .
6. On a $\sigma \circ \rho = \mu \circ \rho'$ (point 5 du lemme 25). D'autre part comme $\sigma = \rho_\pi \circ \mu$, il vient $\rho \circ \sigma = \rho \circ \rho_\pi \circ \mu = \rho' \circ \mu$. On a donc bien $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ par le point 5 du lemme 25 (**ref à vérifier).
7. Evident puisque ρ' est la composée de deux symétries orthogonales dont les axes sont des plans sécants en A et perpendiculaires à M .
8. Evident par la connaissance préalable 3.

□

Cas particuliers intéressants Il est fréquent d'exiger que ρ ne soit ni l'identité ni un demi-tour, comme nous l'avons fait dans la section 2.6.

1. $\rho = I$: l'antirotation est une symétrie centrée
2. ρ est un demi-tour : l'antirotation est une symétrie bilatérale.

Cette propriété fournit une deuxième définition de l'antirotation :

Définition 9. Une antirotation est la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale dont l'axe est un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation.

Théorème 16. Si $\rho \neq 1$ et $\rho \neq$ un demi-tour, l'antirotation fixe un et un seul point o . Elle conserve une et une seule droite A (comprenant o) en y induisant la symétrie de centre o . Elle conserve un et un seul plan (perpendiculaire à A par o) en y induisant une rotation de centre o .

Démonstration.

1. Il est évident que le point o est fixé par l'antirotation puisqu'il l'est à la fois par ρ et par σ .
Il reste à prouver que tout point fixe q de l'antirotation est confondu avec o . On a $\sigma(\rho(q)) = q = \mu(\rho'(q))$.
Comme $\sigma(\rho(q)) = q$, o est le milieu de $[q, \rho(q)]$. Si $o = q$, c'est terminé.
Si $o \neq q$, la droite $q\rho(q)$ est perpendiculaire à A et donc parallèle à l'axe M de μ . Par conséquent, on a $q\rho(q) \subset M$. La restriction de ρ à M est la symétrie de centre o qui dans le plan M est une rotation d'un demi-tour centrée en o . Il en résulte que ρ est une rotation d'un demi-tour, ce qui est contraire aux hypothèses.
En conclusion $q = o$.
2. Il est évident que la droite A est conservée par l'antirotation puisqu'elle l'est à la fois par ρ et par σ . Il reste à prouver que toute droite D conservée par l'antirotation est confondue avec A .
Comme $\sigma(\rho(D)) = D$, $o \in \rho(D)$ et $o \in D$ et comme $\mu(\rho'(D)) = D$ (prop 3), on a $\rho'(D)$ perpendiculaire à M donc $\rho'(D)$ est parallèle à A d'où D est parallèle à A par o .
Par conséquent, $D = A$.
3. Il est évident que le plan M est conservé par l'antirotation puisqu'il l'est à la fois par ρ' et par μ . Il reste à prouver que tout plan P conservé par l'antirotation est confondu avec M . Comme $\sigma(\rho(P)) = P$, $o \in \rho(P)$ et $o \in P$ et comme $\mu(\rho'(P)) = P$ (prop 3). Deux cas sont possibles : $\rho'(P) = M$ et $P = M$ ou $\rho'(P)$ perpendiculaire à M . Dans ce cas, $\rho'(P)$ est parallèle à A d'où P est parallèle à A par o . Dès lors $A \subset P$ et la rotation ne peut être que d'un demi-tour ou l'identité ce qui contredit les hypothèses.
Par conséquent, $P = M$.

□

5.4 Annexe 4 : Analyse du cas où le centre de gravité c est confondu avec le centre o du QG

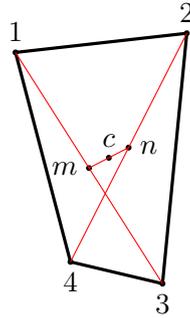


FIGURE 5.2 – Le point c est le centre de gravité du QG 1234

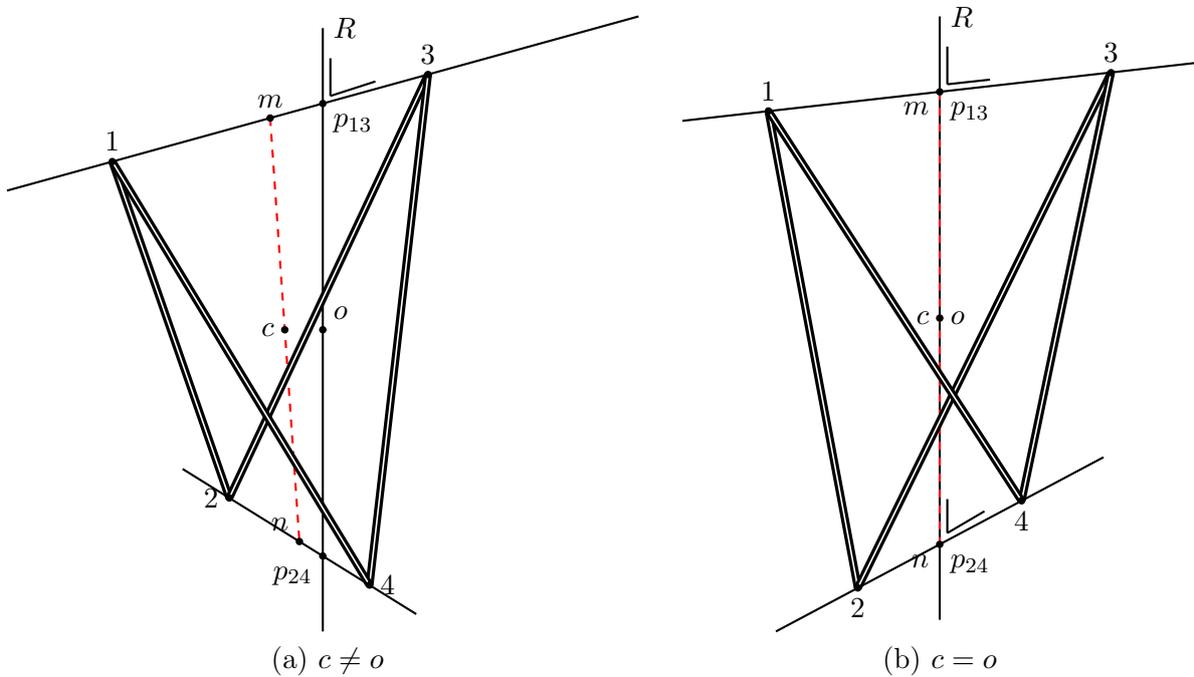


FIGURE 5.3 – Le squelette d'un quadrilatère gauche

Rappel des notations Soit un QG 1234. Les points m et n désignent les milieux des segments diagonaux et c est le milieu du segment $[m, n]$ (Voir Section 2.1).

Les points p_{13} et p_{24} désignent les pieds de la droite R perpendiculaire commune aux diagonales 13 et 24 du QG 1234. Le point o est le milieu du segment $[p_{13}, p_{24}]$ (Voir Section 2.2).

Lemme 26. Si $c = o$, alors $p_{13} = m$ et $p_{24} = n$.

Démonstration. Supposons $c = o$.

- Si $p_{13} \neq m$, alors les points m, o et p_{13} déterminent un plan dans lequel la droite $op_{13} = R$ coupe la diagonale 24 en p_{24} et la droite $mo = no$ coupe la diagonale 24 en n . Ceci implique que $p_{24} = n$, puisque les diagonales sont gauches.
- Si $p_{13} = m$, alors il est évident que $p_{24} = n$, puisque $R = om = op_{13}$.

Dans tous les cas, on a donc $p_{24} = n$.

Le même raisonnement prouve que si $p_{24} = n$, alors $p_{13} = m$. Il en résulte que si $c = o$, alors $p_{13} = m$ et $p_{24} = n$. \square

Lemme 27. *Si $c = o$, alors le QG 1234 est un parallélogramme gauche.*

Démonstration. Puisque $c = o$, nous savons par le lemme 26 que les p_{13} et p_{24} sont les milieux des segments diagonaux $[1, 3]$ et $[2, 4]$. Dès lors, le QG 1234 est conservé par le demi-tour d'axe R et vérifie la définition du parallélogramme gauche (Voir Glossaire ou Définition 2, Section 3.2.2). \square

Lemme 28. *Si le QG 1234 est un parallélogramme gauche, alors $c = o$.*

Démonstration. Si le QG 1234 est un parallélogramme gauche, alors il est conservé par le demi-tour d'axe R . Les points p_{13} et p_{24} sont les milieux m et n des segments diagonaux. Le milieu o du segment $[p_{13}, p_{24}]$ et le milieu c du segment $[m, n]$ sont confondus. \square

Conclusion : nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 17. *Le QG 1234 est un parallélogramme gauche si et seulement si les points c centre de gravité et o centre de bidroite sont confondus.*

Glossaire

Antirotation

Définition 10. Une antirotation est la composée d'une symétrie bilatérale μ et d'une rotation ρ d'axe perpendiculaire à l'axe de μ .

Définition 11. Une antirotation est la composée d'une symétrie centrée σ et d'une rotation ρ' d'axe passant par le centre de σ .

Ces deux définitions sont équivalentes.

Cette notion intervient à la section 2.6 et dans les annexes 2 et 3.

Automorphisme combinatoire d'un QG Un *automorphisme combinatoire* d'un QG 1234 est une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ des sommets de Q.

Cette notion intervient à la section 1.2.

Automorphisme d'un QG Un *automorphisme* d'un QG est une isométrie de E^3 qui laisse ce QG invariant.

Cette notion intervient à la section 1.2.

Axe de symétrie Soit α une isométrie non identique de E^3 . Un *axe de symétrie* de α noté Axe α est l'ensemble des points fixes de α . L'ensemble Axe α peut être un point, une droite ou un plan.

Cette notion intervient à la section 1.3.

Bidroite Une bidroite est l'ensemble formé par deux droites gauches. (Réf. [1]).

Centre d'un QG Le *centre* o d'un QG est le centre de la bidroite de ses diagonales. Il se situe au milieu du segment $[p_{13}, p_{24}]$ joignant les pieds de la perpendiculaire commune aux deux diagonales du QG.

Cette notion intervient à la section 2.2 et dans l'annexe 4.

Centre de gravité d'un tétraèdre Le centre de gravité du tétraèdre 1234 dont les points 1, 2, 3 et 4 sont supposés de masses identiques est le point c obtenu par la construction suivante : Les masses en 1 et en 3 se remplacent par une masse double en m , milieu de $[1, 3]$. Les masses en 2 et en 4 se remplacent par une masse double en n , milieu de $[2, 4]$. Les doubles masses en m et n se remplacent par une masse quadruple en c , milieu de $[m, n]$.

Cette notion intervient à la section 2.1 et dans l'annexe 4.

Médiane d'un QG Une *médiane* d'un quadrilatère est le segment joignant les milieux de deux côtés opposés de ce quadrilatère.

Cette notion intervient à la section 2.1.

Orbite d'un point p d'un espace E sous l'action d'un groupe G de transformations de E L'*orbite* de p sous l'action de G est l'ensemble des transformés $g(p)$ où g parcourt G . Il se dit aussi que $\{g(p) \in E \text{ tel que } g \in G\}$ est une *orbite* de G .

Cette notion est définie à la section 3.3.1, définition 4.

QG bilatéral Un *quadrilatère gauche bilatéral* est un QG conservé par un automorphisme combinatoire $(1)(3)(2, 4)$ ou $(2)(4)(1, 3)$.

Un QG bilatéral est un QG conservé par une symétrie bilatérale dont l'axe est un plan défini par la droite R et une des diagonales du QG.

Cette notion est définie à la section 3.2.3 définition 3.

QG carré ou carré gauche Un *carré gauche* est un QG conservé par chacun des automorphismes combinatoires de Z_4 : $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 4, 3, 2)$, $(1, 3)(2, 4)$ et $(1)(2)(3)(4)$.

Un *carré gauche* est un quadrilatère gauche possédant les symétries de Z_4 (deux antirotations, un demi-tour et l'identité).

Cette notion est définie à la section 3.3.3, définition 7.

QG isocèle Un *QG isocèle* est un quadrilatère gauche conservé par un automorphisme combinatoire $(1, 2)(3, 4)$.

Un *quadrilatère gauche isocèle* est un QG conservé par un demi-tour dont l'axe passe par les milieux de deux côtés opposés.

Cette notion est définie à la section 3.2.1, définition 1.

QG losange ou losange gauche Un *losange gauche* est un QG conservé par chacun des automorphismes combinatoires $(1)(3)(2, 4)$, $(1, 3)(2)(4)$ et $(1, 3)(2, 4)$.

Un *losange gauche* est un QG conservé par deux symétries bilatérales dont les axes sont deux plans perpendiculaires.

Cette notion est définie à la section 3.3.2, définition 6.

QG parallélogramme ou parallélogramme gauche Un *parallélogramme gauche* est un QG conservé par l'automorphisme combinatoire $(1, 3)(2, 4)$.

Un *parallélogramme gauche* est un QG conservé par un demi-tour dont l'axe est la perpendiculaire commune à ses diagonales.

Cette notion est définie à la section 3.2.2, définition 2.

QG ou QG quelconque Nous invoquons souvent un *QG quelconque* pour indiquer tout QG ou bien pour nous restreindre au QG dont le sous-groupe est l'identité.

Un quadrilatère gauche quelconque est un quadrilatère gauche dont le groupe d'automorphismes contient le sous-groupe I d'ordre 1. Tout QG est un QG quelconque.

Quadrilatères de l'espace euclidien possédant quatre sommets qui engendrent l'espace.

Un *quadrilatère gauche* est un quadrilatère dont les 4 sommets ne sont pas contenus dans un même plan. Il suffit pour cela qu'il existe deux côtés opposés qui ne soient pas dans un même plan.

Cette notion intervient à la section 3.1.

QG rectangle ou rectangle gauche Un *rectangle gauche* est un QG conservé par chacun des automorphismes combinatoires $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 4)(2, 3)$ et $(1, 3)(2, 4)$

Un rectangle gauche est un QG conservé par trois rotations d'un demi-tour dont les axes sont deux à deux perpendiculaires en un même point.

Cette notion est définie à la section 3.3.1, définition 5.

Rotation spatiale Une rotation spatiale est un déplacement de E^3 admettant une droite de points fixes appelée axe de rotation. Rappelons le théorème *Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation* (Théorème 14, Section 5.1, Annexe 1).

Squelette d'un QG Tout QG possède un *squelette* :

1. le centre de gravité c ,
2. l'axe-droite mn , où m et n sont les milieux des segments diagonaux
3. l'axe-plan π , plan perpendiculaire à mn par le point c ,
4. la bidroite des diagonales 13 et 24, leur perpendiculaire commune R et le centre o de la bidroite que nous appelons centre du quadrilatère gauche,
5. les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux deux diagonales du quadrilatère gauche.

Cette notion intervient à la section 2.2, définition 5.

Symétrie bilatérale ou orthogonale de E^3 Une *symétrie bilatérale* orthogonale de E^3 est une isométrie de E^3 déterminée par un axe-plan Π et comprenant l'ensemble des couples (x, x') de points de E^3 tels que Π est le plan médiateur du segment $[x, x']$.

Symétrie centrée de E^3 Une *symétrie centrée* de E^3 est une isométrie de E^3 déterminée par un axe-point c appelé centre et comprenant l'ensemble des couples (x, x') de points de E^3 tels que c est le milieu du segment $[x, x']$.

Symétrie glissée Une *symétrie glissée* est la composée d'une symétrie bilatérale et d'une translation parallèle à l'axe de symétrie.

Cette notion intervient à la section 5.2 (Annexe 2).

Vissage Un *vissage* est la composée d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe de rotation.

Cette notion intervient au lemme 24, section 5.2 (Annexe 2).

Bibliographie

- [1] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Bidroites. *Math-UREM*, 4 juin 2007.
- [2] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Classification objective des quadrilatères. *Mathématiques et Pédagogie*, (163), novembre-décembre 2007. p. 3–33.
- [3] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Classification objective des quadrilatères. *CeDoP ULB*, janvier 2007.
- [4] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude Culus Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Bidroites. *Mathématique et Pédagogie*, (165), 2007.
- [5] Francis BUEKENHOUT : *Une étude axiomatique de l'espace affín et de l'espace euclidien*. Université du Congo à Elisabethville, 1966. 166 pages.
- [6] Francis BUEKENHOUT : La gauche et la droite en géométrie élémentaire : orientation de figures-chiralité. UREM, ULB, 2005.
- [7] Francis BUEKENHOUT et Edmond DONY : Les polyèdres de Grünbaum. *Université Libre de Bruxelles*, 1996. Cours de licence, 25 pages.
- [8] Francis BUEKENHOUT et Jean DOYEN : *Espaces euclidiens*. Presses universitaires de Bruxelles, ULB, 1975.
- [9] Francis BUEKENHOUT et Jean DOYEN : *Ensembles structurés et groupes de symétries*. ULB, 1982.
- [10] Francis BUEKENHOUT et Monique FRÉDERICKX : Orientation. UREM, ULB, 2005.
- [11] Francis BUEKENHOUT et Huguette MEUNIER : *Vivre la mathématique 3*. Didier Hatier, 1982.
- [12] Michel CHASLES : *Traité de géométrie supérieure*. Bachelier, 1852.
- [13] H. M. S. COXETER : *Regular Polytopes*. Methuen, London, 1948.
- [14] H. M. S. COXETER : *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, 1961.
- [15] Annie GOOVAERTS : Enseignement primaire. Classement des quadrilatères (plans) en fonction des symétries axiales orthogonales. *CeDoP, ULB*, 2006.
- [16] Eugène ROUCHE et Charles DE COMBEROUSSE : *Traité de géométrie*. Gauthier-Villars, 1900.
- [17] N. VILENKINE, G. CHILOV, V. OUSPENSKI, J. LIOUBITCH et L. CHOR : *Quelques applications des mathématiques*. Editions de Moscou, 1975.