PROBLEMATHS
13 octobre 2014

ÉNONCÉS

Problemath 4

Dans le plan d'un triangle abc, on construit , extérieurement à abc, les triangles bcp, acq et abr tels que la mesure des angles $\widehat{pbc}$ et $\widehat{qac}$ soit 45°, celle de $\widehat{bcp}$ et $\widehat{acq}$ soit 30° et celle de $\widehat{abr}$ et $\widehat{bar}$ soit 15°. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{prq}$?

Problemath 5

Un entier $n > 0$ est dit *stupéfiant* si, lorsqu'on l'écrit (en système décimal) à la droite de n'importe quel entier positif, le nombre obtenu est divisible par n. Quels sont tous les entiers stupéfiants?

Problemath 6

Combat naval à une dimension. Un navire, qu'on peut assimiler à un point matériel, se déplace en mouvement rectiligne uniforme sur la droite réelle $\mathbb{R}$. A tout instant, on ignore sa position et sa vitesse. Les seules informations dont on dispose sont les suivantes:
(i) sa position à l'instant $t = 0$ est un entier $x \in \mathbb{Z}$.
(ii) sa vitesse(mesurée par minute) est un entier $v \in \mathbb{Z}$.
Toutes les minutes à partir de $t = 0$, on lâche une bombe sur un point d'abscisse entière. Si le navire s'y trouve, il coule et on a gagné.
Existe-t-il une stratégie permettant de couler à coup sûr le navire en un temps fini?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 31 octobre à 14h**.

Solution du Problemath 1. Appelons (*) l'équation donnée. Si $x \geq 2$, (*) s'écrit $(x+1)-x+3(x-1)-2(x-2) = x+2$, c'est-à-dire $0 = 0$. Tous les nombres réels $x \geq 2$ sont donc solutions de (*). Si $1 \leq x < 2$, (*) s'écrit $(x+1)-x+3(x-1)+2(x-2) = x+2$, c'est-à-dire $x = 2$, qui n'appartient pas à l'intervalle $[1, 2[$. Il n'y a donc aucune solution de (*) dans cet intervalle. Un raisonnement analogue dans les intervalles $[0, 1[$ et $[-1, 0[$ ne fournit aucune nouvelle solution de (*). Par contre, si $x < -1$, (*) s'écrit $-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2) = x+2$, c'est-à-dire $x = -2$, qui est < -1. En conclusion , les solutions de (*) sont -2 et tous les nombres réels ≥ 2.
Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), M. LACANTE (élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), H. TILQUIN (élève de 5ème à l'Athénée Catteau), C. BODART (élève de 6ème au Collège Ste Gertrude à Nivelles), V. COUPLET (élève de 6ème à l'Institut Bailly à Braine l'Alleud), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), T. BILBA, N. DARDENNE, J. DIANGANA, J. EL MALLAHI, S. HAJOUJI IDRISSI, K. LEPOINT, T. VANDENBUSSCHE (BA1 polytech), G. BALINT, N. MEYNAERT (BA2 maths), E. GRUWÉ, R. HANNAERT, M. MOGHADDAMFAR (BA2 polytech), J. REIS, C. SCHWEICHER (BA2 ing. indust. à Arlon), P. GILLET (BA2 régendat en math), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), C. DE GROOTE (prépa.doctorat Univ. Stanford), F.THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego),O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, A. GRUWÉ

(ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), A. GREEN (VUB?), LADY BELMATH et DARK VADOR.

Solution du Problemath 2. Puisque $p(2) \neq p(10)$, le polynôme $p(x)$ n'est pas constant et est donc de degré $d \geq 1$. Si $p(x)$ possède une racine entière a, alors $p(x) = (x - a)\, q(x)$, où $q(x)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $d - 1$. Comme $13 = p(2) = (2 - a)\, q(2)$ et $5 = p(10) = (10 - a)\, q(10)$ avec $q(2)$ et $q(10)$ entiers, on déduit que $2 - a | 13$ et $10 - a | 5$, autrement dit $2 - a \in \{\pm 1, \pm 13\}$ et $10 - a \in \{\pm 1, \pm 5\}$, ou encore $a \in \{1, 3, -11, 15\}$ et $a \in \{9, 11, 5, 15\}$. Il en résulte que $a = 15$ est la seule racine entière de $p(x)$.
Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (élève de 6ème au Collège Ste Gertrude à Nivelles), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), V. COUPLET (élève de 6ème à l'Institut Bailly à Braine l'Alleud), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), E. GRUWÉ, R. HANNAERT (BA2 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), L. GOSSELIN (MA2 polytech), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F.THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), A. GRUWÉ (ingénieur), P. BARBIER (software engineer à Seattle), A. GREEN (VUB?), LADY BELMATH et DARK VADOR.

Solution du Problemath 3. Supposons (pour rire) qu'on puisse assembler 250 briques $1 \times 1 \times 4$ pour construire un cube $10 \times 10 \times 10$. Découpons ce cube en 125 blocs cubiques $2 \times 2 \times 2$ et colorions les 8 petits cubes $1 \times 1 \times 1$ de chaque bloc en noir ou en blanc, de telle façon que deux blocs ayant en commun une face carrée 2×2 n'aient jamais la même couleur. Le cube $10 \times 10 \times 10$ ressemble alors à un échiquier tridimensionnel $5 \times 5 \times 5$. Dans chacune des briques $1 \times 1 \times 4$ de l'assemblage, il y a nécessairement 2 petits cubes noirs et 2 blancs. Par conséquent, dans le cube $10 \times 10 \times 10$, il y a autant de petits cubes noirs que de blancs. Mais ceci est impossible, puisqu'il y a en tout 125 blocs contenant chacun 8 petits cubes noirs ou 8 petits cubes blancs, et que 125 est un nombre impair! L'assemblage de départ est donc lui aussi impossible.
N.B. : Pablo BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau) a démontré plus généralement (mais sa preuve prend 6 pages) qu'on peut construire un parallélépipède rectangle $a \times b \times c$ en assemblant des briques $1 \times 1 \times n$ si et seulement si n divise l'un des trois entiers a, b, c.
Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (élève de 6ème au Collège Ste Gertrude à Nivelles), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), V. COUPLET (élève de 6ème à l'Institut Bailly à Braine l'Alleud), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), G. BALINT (BA2 maths), M. MOGHADDAMFAR (BA2 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), L. GOSSELIN (MA2 polytech), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F.THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), F. DOIGNIE, A. GRUWÉ (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle), A. GREEN (VUB?) et DARK VADOR.

La pensée du jour. *"L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. L'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même. Elle rapproche les phénomènes les plus divers et découvre les analogies secrètes qui les unissent. Elle semble être une faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens"* (Joseph FOURIER, mathématicien français, 1768-1830).