PROBLEMATHS
19 décembre 2014

Voici les solutions des Problémaths 7, 8 et 9. Les prochains énoncés paraîtront au début de 2015, après les examens de janvier.

Solution du Problémath 7. Supposons que $[a, b]$ reste fixe et que $[a', b']$ glisse sur la droite D' sans changer de longueur. Pendant ce mouvement, l'aire du triangle $aa'b'$ reste constante car sa base $[a', b']$ et sa hauteur issue de a ne changent pas de longueur (en effet, le plan contenant le triangle $aa'b'$ est le plan π contenant a et D', donc la hauteur issue de a est la distance du point a à la droite D'). De plus, la distance du point b au plan $aa'b'$, c'est-à-dire au plan π, est constante. Le volume du tétraèdre $aba'b'$ reste donc inchangé pendant ce mouvement. Il en est de même si $[a', b']$ reste fixe et $[a, b]$ glisse sur D. En combinant ces deux types de mouvements, on en conclut que le volume du tétraèdre reste constant lorsque les deux segments glissent sur D et D'.
Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), C. SIMON (élève de 5ème au Lycée Emile Jacqmain), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), E. GRUWÉ (BA2 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), O. DECKERS, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. GREEN (VUB ?) et DARK VADOR.

Solution du Problémath 8. Le mathématicien B est assuré de la victoire quels que soient les 2000 nombres choisis par A. En effet, considérons les 1500 couples $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $\ldots$, $(2k-1, 2k)$, $\ldots$, $(2999, 3000)$. Les 1000 entiers que A n'a pas choisis se trouvent dans au plus 1000 de ces couples. Il y a donc au moins 500 couples ne contenant aucun des nombres que A n'a pas choisis, c'est-à-dire au moins 500 couples dont les deux éléments sont des entiers choisis par A. En prenant exactement 500 de ces couples, le mathématicien B obtient 1000 entiers choisis par A et dont la parité alterne quand on les ordonne du plus petit au plus grand.
Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), C. SIMON (élève de 5ème au Lycée Emile Jacqmain), C. BODART (élève de 6ème au Collège Sainte Gertrude à Nivelles), M. MOGHADDAMFAR (BA2 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), Y. SUPRIN (prof de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ (ingénieurs), A. GREEN (VUB ?) et DARK VADOR.

Solution du Problémath 9. En utilisant l'égalité

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \sin\frac{2\alpha}{3^n}\sin\frac{\alpha}{3^n} &= \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3^n} - \cos\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3^k} - \cos\alpha\right)\end{aligned}$$

car en développant la somme qui précède, on constate que tous les termes se détruisent deux à deux, sauf $\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{3^k}$ et $-\frac{1}{2}\cos\alpha$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\alpha}{3^n}\sin\frac{\alpha}{3^n} &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3^k}-\cos\alpha\right)\\ &= \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\\ &= \sin^2\alpha\end{aligned}$$

Ont fourni une solution correcte : N. EL BOUHARROUM (élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), C. SIMON (élève de 5ème au Lycée Emile Jacqmain), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège Saint Quirin de Huy), E. GRUWÉ (BA2 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), O. DECKERS, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ (ingénieurs), LADY BELMATH et DARK VADOR.

La pensée du jour. *"C'est par la logique que nous démontrons, mais c'est par l'intuition que nous découvrons. Un mathématicien qui ne connaîtrait que les règles de logique serait comme un écrivain qui ne connaîtrait que les règles de grammaire."* (Artur AVILA, mathématicien franco-brésilien, Médaille Fields 2014)

Toute l'équipe Problemaths vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année !

Adieu	$123+45\times 6\times 7-8+9$
Bonjour	$1\times 2-3+4\times 567\times 8/9$