PROBLEMATHS 13 octobre 2015

ÉNONCÉS

Problemath 4

Quelles sont toutes les solutions $x \in \mathbb{C}$ de l'équation $x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = 0$, sachant que deux de ces solutions ont une somme égale à 2?

Problemath 5

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, existe-t-il un ensemble E de 8 points tel que, dans chaque sous-ensemble de 3 points de E, au moins deux des trois distances entre ces points soient égales?

Problemath 6

Devant vous se trouvent 4 coffres, respectivement en fer, en cuivre, en ivoire et en bois. On vous informe qu'un des coffres renferme un trésor constitué de pierres précieuses; les 3 autres contiennent une colonie de scorpions à la piqûre mortelle. Vous avez le droit de choisir un coffre, de soulever le couvercle et d'y plonger la main pour emporter ce qui s'y trouve. Sur chacun des 4 couvercles est inscrite une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais vous ignorez laquelle de ces possibilités est la bonne. Voici les 4 affirmations :
- Sur le coffre en fer: "Si le trésor est dans le coffre en ivoire, alors l'affirmation sur le coffre en bois est fausse".
- Sur le coffre en cuivre: "Le trésor est soit dans le coffre en ivoire, soit dans le coffre en bois".
- Sur le coffre en ivoire: "Une et une seule des 4 affirmations est vraie".
- Sur le coffre en bois: "Les affirmations inscrites sur les deux coffres en métal sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses".
Dans quel coffre devez-vous plonger la main pour emporter le trésor?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 6 novembre à 14h**

Solution du Problemath 1: Si la tour est sur une des 4 cases centrales, elle menace 14 cases et elle est menacée en diagonale par 13 cases, soit un total de 27 cases (sur les 63 non occupées par la tour) telles que l'évènement aléatoire de l'énoncé est réalisé si on place un fou sur l'une d'elles. Ce total se réduit à 25 si la tour est sur une des 12 cases entourant les 4 centrales, à 23 pour les 20 cases entourant les 12 précédentes, et à 21 pour les 28 cases au bord de l'échiquier. La probabilité cherchée vaut donc
$$\frac{4}{64}\frac{27}{63} + \frac{12}{64}\frac{25}{63} + \frac{20}{64}\frac{23}{63} + \frac{28}{64}\frac{21}{63} = \frac{13}{36} = 0,361111...$$
Lady Belmath (l'épouse de Fantomath) a généralisé le problème à un échiquier $n \times n$:la probabilité cherchée vaut alors $\frac{10n-2}{3n(n+1)}$ pour tout $n > 1$.

Ont fourni une solution correcte: A. JORISSEN(élève de 5ème grec-maths), D. GALANT, L. LUONGO (élèves de 6ème à l'Athénée de La Louvière), R. KHAZOUM (éléve de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), C. BODART, D. KONEN, R. REYNOUARD (BA1 maths), J. CARLIER, M. DELHELLE, L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), L. NGUYEN (BA1 physique), S. BOUKHRIS, C. LANNOY, A. ROTY, M. SOMERHAUSEN (BA1 polytech), P. KRYNSKI (BA2 physique), T. BILBA (BA2 polytech), M. BOURS, C. LABIOUSE (BA2 ing. indust. à Arlon), B. GERSEY (BA3 maths), E. GRUWÉ, T. MEESEN (BA3 polytech), N.

RADU (doctorant UCL), C. DE GROOTE (doctorant Univ. Stanford), F. THILMANY (doctorant Univ.San Diego), M. CORNEZ, A. GREEN, S. MASSON (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), Alice V., P. LECHASTEFOL et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 2 Malgré son aspect inoffensif, ce problème cachait un piège dans lequel beaucoup sont tombés. Le tétraèdre régulier T peut être inscrit dans un cube C de telle façon que les 4 sommets de T soient des sommets de C et que les 6 arêtes de T soient des diagonales des 6 faces de C. Désignons par E l'ensemble des 4 sommets de T et par E' l'ensemble des 4 sommets de C qui ne sont pas dans E. On va prouver que E' n'est pas dans $\Delta(\Delta(E))$ et donc $\Delta(\Delta(E)) \neq \mathbb{R}^3$. En effet, $\Delta(E)$ est la réunion des 6 droites contenant les arêtes de T. Soient A et B deux de ces droites. Si A et B sont sécantes, alors toute droite joignant deux points de $A \cup B$ est dans le plan engendré par A et B, c'est-à-dire dans un plan contenant une face de T, donc cette droite ne contient aucun point de E'. Si A et B sont gauches , désignons par α et β les arêtes de T contenues dans A et B, et par F_α et F_β les faces du cube qui contiennent α et β. Toute droite joignant deux points de $A \cup B$ ne peut avoir en commun avec $F_\alpha \cup F_\beta$ que des points de $\alpha \cup \beta$, donc cette droite ne contient aucun point de E'. En conclusion, E' n'est pas dans $\Delta(\Delta(E))$. En fait, on peut prouver que $\Delta(\Delta(E)) = \mathbb{R}^3 \setminus E'$.
Ont fourni une solution correcte: A. JORISSEN (élève de 5ème grec-maths), D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), B. GERSEY, N. MEYNAERT (BA3 maths), N. RADU (doctorant UCL), F. THILMANY (doctorant Univ.San Diego), M. CORNEZ, A. GREEN, S. MASSON (profs de maths), et P. LECHASTEFOL.

Solution du Problemath 3 Les billes sont de rayon $\rho_n = \frac{1}{2}(r_n - 1)$,
donc $\dfrac{A_n}{B_n} = \dfrac{n\pi\rho_n^2}{\pi r_n^2 - \pi} = \dfrac{n\rho_n^2}{r_n^2 - 1} = \dfrac{n(r_n-1)^2}{4(r_n^2-1)} = \dfrac{n(r_n-1)}{4(r_n+1)}$
Si o est le centre des deux disques, t le point de tangence de deux billes adjacentes, c le centre de l'une d'elles et α l'angle $\widehat{cot}$, alors $sin\alpha = \frac{\rho_n}{1+\rho_n}$ avec $\alpha = \pi/n$, d'où on tire $sin\frac{\pi}{n} = \frac{r_n-1}{r_n+1}$. Il en résulte que $\dfrac{A_n}{B_n} = \dfrac{n}{4} sin\dfrac{\pi}{n}$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sinx}{x} = 1$.
Ont fourni une solution correcte: D. GALANT, L. LUONGO (élèves de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART, D. KONEN, C.PIRONNET (BA1 maths), L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), L. NGUYEN (BA1 physique), C. ANUTA, C. LANNOY, A. ROTY (BA1 polytech), D. NEILERS (BA2 polytech), C. LABIOUSE (BA2 ing. indust. à Arlon), B. GERSEY, N. MEYNAERT (BA3 maths), E. GRUWÉ (BA3 polytech), N. RADU (doctorant UCL), C. DE GROOTE (doctorant Univ. Stanford), F. THILMANY (doctorant Univ.San Diego), M. CORNEZ, O. DECKERS, P. GILLET, A. GREEN, C. LARIVIERE, S. MASSON (profs de maths), A. GRUWÉ (ingénieur) et P. LECHASTEFOL.

LES PENSÉES DU JOUR

"Les autres sciences cherchent à trouver les lois que Dieu a choisies. Les mathématiques cherchent à trouver les lois auxquelles Dieu a dû obéir". (Jean-Pierre SERRE, , mathématicien français né en 1926, Médaille Fields en 1954, Prix Abel en 2003).

"The scientist finds his reward in what Henri Poincaré calls the joy of comprehension, and not in the possibilities of application to which any discovery of his may lead". (Albert EINSTEIN, physicien allemand, 1879-1955, Prix Nobel en 1921).