PROBLEMATHS 16 décembre 2015

Voici les solutions des Problemaths 7, 8 et 9. Les prochains énoncés paraîtront après les examens de janvier 2016.

<u>Solution du Problemath 7</u>: Notons d'abord que f' et g' ne s'annulent jamais, car f et g ne s'annulent jamais par hypothèse et $f'g' = fg$. Les deux égalités de l'énoncé peuvent donc s'écrire
$\frac{f'g-fg'}{g^2} = \frac{f'}{g'}$ et $f = \frac{f'g'}{g}$
En remplaçant f par $f'g'/g$ dans la première égalité, on obtient
$\frac{f'g^2-f'(g')^2}{g^3} = \frac{f'}{g'}$
puis, en multipliant les deux membres par $\frac{g'}{f'}$, on trouve $\frac{g'}{g} - (\frac{g'}{g})^3 = 1$. On en déduit que $\frac{g'}{g}$ est une constante réelle c telle que $c - c^3 = 1$, c'est -à-dire $c^3 - c + 1 = 0$. L'étude de la fonction polynomiale $x \to x^3 - x + 1$ montre que celle-ci a un seul zéro réel en $x = c = -1,3247.....$ En appliquant la formule dite "de Cardan" (due en fait à del Ferro et Tartaglia), on trouverait la valeur exacte de c, à savoir $-\frac{1}{\sqrt[3]{18}}(\sqrt[3]{9-\sqrt{69}}+\sqrt[3]{9+\sqrt{69}})$.
L'équation différentielle $\frac{g'}{g} = c$ a comme solution générale $g(x) = Ae^{cx}$, avec $A \neq 0$ puisque g ne s'annule jamais par hypothèse. D'autre part, la condition $f'g' = fg$ entraîne que $\frac{f'}{f} = \frac{g}{g'} = \frac{1}{c}$, donc $f(x) = Be^{x/c}$ avec $B \neq 0$. Les couples (f, g) cherchés sont donc formés de toutes les fonctions définies par $f(x) = Be^{x/c}$ et $g(x) = Ae^{cx}$, où A et B sont des constantes quelconques non nulles.
<u>Ont fourni une solution correcte</u>:
D. GALANT(élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), E. GRUWÉ (BA3 polytech), N. RADU (doctorant UCL), A. GREEN,Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ, G. HAVELANGE (ingénieurs)

<u>Solution du Problemath 8</u>: A toute situation S où la boîte contient b boules blanches, v boules vertes et r boules rouges, associons l'entier $f(S) = b + 2v + 3r$. Notons S_0 la situation initiale et S_t la situation après 10t secondes. On a donc $f(S_0) = 1000$ et on vérifie facilement que, quelle que soit l'opération choisie pour passer de S_t à S_{t+1}, on a $f(S_{t+1}) = f(S_t)$ ou $f(S_t) - 4$. Comme $f(S_0)$ est un multiple de 4, on en déduit que $f(S_t)$ est un multiple de 4 pour tout $t \in \mathbb{N}$. Une situation S_t dans laquelle il n'y aurait plus qu'une seule boule dans la boîte est donc impossible, puisqu'on aurait $f(S_t) = 1, 2$ ou 3 selon que la boule restante serait blanche, verte ou rouge
<u>Ont fourni une solution correcte</u>:
A. JORISSEN(élève de 5ème à l'Institut St Boniface-Parnasse), D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), M. DELHELLE, L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), N. RADU (doctorant UCL), Y. SUPRIN (prof de maths), G. HAVELANGE (ingénieur)

<u>Solution du Problemath 9</u>: Il est clair que $p_0 = 1$ et $p_1 = 0$. La seule chose qui empêcherait T de reposer sur la face F après n étapes serait qu'il repose déjà sur cette face après $n - 1$ étapes. La probabilité que cela se produise vaut p_{n-1}, autrement dit la probabilité que cela ne se produise pas vaut $1 - p_{n-1}$. Si on est dans cette situation, il y a 1 chance sur 3 que T

repose sur la face F à l'étape suivante. Par conséquent, $p_n = \frac{1}{3}(1 - p_{n-1})$, ce qu'on peut aussi écrire $p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}(p_{n-1} - \frac{1}{4})$. La suite des $p_n - \frac{1}{4}$ est donc une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $p_0 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Il en résulte que $p_n = \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n + \frac{1}{4}$ pour tout $n \geq 0$.
Ont fourni une solution correcte:
A. JORISSEN(élève de 5ème à l'Institut St Boniface-Parnasse)), D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), N. RADU (doctorant UCL), O. DECKERS, A. GREEN, Y. SUPRIN (profs de maths), P. MASAI (Vice-président de Toyota Motor Europe) W. DE DONDER, A. GRUWÉ (ingénieurs)

LA PENSÉE DU JOUR

"Perhaps I could best describe my experience of doing mathematics in terms of entering a dark mansion. You go into the first room, and it is dark, completely dark. You stumble around bumping into the furniture, and gradually you learn where each piece of furniture is, and finally, after six months or so, you find the light switch. You turn it on,and suddenly it is all illuminated. You can see exactly where you were. At the beginning of September, I was sitting here at this desk, when suddenly, totally unexpectedly, I had this incredible revelation. It was the most important moment of my working life". (Andrew WILES, mathématicien anglais né en 1953, devenu célèbre en septembre 1994 pour sa démonstration du "Grand Théorème" de FERMAT).

Toute l'équipe Problemaths vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année!

- **Adieu** **11111011111**
- **Bonjour** **1+2-3+4x567x8/9**