ULB

PROBLEMATHS 11 novembre 2015

Problemath 7

Quels sont tous les couples (f, g) de fonctions dérivables f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g ne s'annulent jamais et que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ et $f'g' = fg$?

Problemath 8

Une boîte contient 1000 boules blanches. A l'extérieur de la boîte, on dispose d'un stock illimité de boules blanches, rouges et vertes. Toutes les 10 secondes, on choisit deux boules dans la boîte et on les remplace par une ou deux boules extérieures, en respectant toutefois les règles suivantes: on doit remplacer
- deux blanches par une verte
- deux rouges par une verte
- deux vertes par une blanche et une rouge
- une blanche et une verte par une rouge
- une rouge et une verte par une blanche
- une blanche et une rouge par une blanche et une rouge.

Est-il possible que la boîte ne contienne plus qu'une seule boule après un temps fini?

Problemath 9

Un tétraèdre régulier T est posé sur un plan horizontal. Soit F la face sur laquelle T repose. On fait pivoter T autour d'une des 3 arêtes de F, jusqu'à ce qu'il repose sur l'autre face F' contenant cette arête. On recommence la même opération avec une des 3 arêtes de F', et ainsi de suite. A chaque étape, on choisit au hasard une des 3 arêtes de la face sur laquelle T repose et on le fait pivoter autour de cette arête. Quelle est la probabilité p_n pour que, après n étapes, T repose sur la face F?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 4 décembre à 14h**: les solutions reçues après cette date limite ne seront plus acceptées!

<u>**Solution du Problemath 4**</u>: Soit$P(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3x + 3$ et soient a et b deux racines de $P(x)$ dont la somme est égale à 2. $P(x)$ est donc divisible par $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - 2x + p$, avec $p = ab$. En divisant $P(x)$ par $x^2 - 2x + p$, on obtient $P(x) = (x^3 - 3x^2 + (2-p)x + (p-2))(x^2 - 2x + p) + (p^2 - 1)x + (-p^2 + 2p + 3)$. Comme $P(x)$ est divisible par $(x^2 - 2x + p)$, le reste de cette division doit être le polynôme nul, donc $p^2 - 1 = 0$ et $-p^2 + 2p + 3 = 0$, d'où on déduit que $p = -1$. Par conséquent, a et b sont les racines de $x^2 - 2x - 1$, c'est-à-dire $1 \pm \sqrt{2}$. L'autre facteur de $P(x)$ est $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = (x-1)^3 - 2$. Les trois racines manquantes de $P(x)$ sont donc les solutions de l'équation $(x-1)^3 = 2$, c'est-à-dire $1 + \sqrt[3]{2}$, $1 + \omega\sqrt[3]{2}$ et $1 + \omega^2\sqrt[3]{2}$ avec $\omega = cos\dfrac{2\pi}{3} + i\ sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Les 5 racines de $P(x)$ sont donc $1 \pm \sqrt{2}$, $1 + \sqrt[3]{2}$ et $1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(-1 \pm i\ \sqrt{3})$.
<u>**Ont fourni une solution correcte**</u>: A. JORISSEN(élève de 5ème grec-maths), D. GALANT, L. LUONGO (élèves de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), L. NGUYEN (BA1 physique), S. BOUKHRIS, C. LANNOY

(BA1 polytech), Y. BEN ABDELKADER (BA2 maths), D. ROOSBEEK (BA2 maths à l'UCL), B. GERSEY, N. MEYNAERT (BA3 maths), E. GRUWÉ (BA3 polytech), X. MAUQUOY (MA1 maths), N. RADU (doctorant UCL), F. THILMANY (doctorant Univ.San Diego), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ, G. HAVELANGE (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 5: Considérons, dans le plan Oxy de $\mathbb{R}^3$, un pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon 1 centré à l'origine. Les 5 sommets de ce pentagone, l'origine $(0,0,0)$ et les 2 points $(0,0,\pm 1)$ forment un ensemble E de 8 points tel que, dans chaque sous-ensemble de 3 points de E, au moins deux des trois distances entre ces points sont égales. La vérification est très facile. Lady Belmath nous signale que son époux Fantomath avait dérobé, pour le lui offrir, un gros diamant de 550 carats qui était la fermeture converse de ces 8 points. Hallard Croft a démontré en 1962 qu'il n'existe pas d'ensemble de 9 points de $\mathbb{R}^3$ ayant cette propriété. On ignore toujours si, à une similitude près, l'exemple donné ci-dessus est le seul ayant 8 points.

Ont fourni une solution correcte: A. JORISSEN (élève de 5ème grec-maths), D. GALANT, L. LUONGO, A. TEREFENKO (élèves de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), J. CARLIER, M. DELHELLE, L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), C. LANNOY (BA1 polytech), X. MAUQUOY (MA1 maths), N. RADU (doctorant UCL), F. THILMANY (doctorant Univ.San Diego), A. GREEN, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), G. HAVELANGE (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 6: Le trésor est dans le coffre en bois. Voici un raisonnement (parmi d'autres) permettant de le prouver. Désignons par F (respectivement C, I, B) l'affirmation inscrite sur le coffre en fer (resp. en cuivre, en ivoire, en bois). Si F était fausse, le trésor serait dans le coffre en ivoire et B serait vraie. De ce fait, C serait fausse (tout comme F), donc le trésor ne serait pas dans le coffre en ivoire, contrairement à ce qu'on vient de voir. Par conséquent, F est vraie. Mais alors I est fausse (sinon il y aurait au moins deux affirmations vraies, à savoir F et I, une contradiction). Donc au moins une des deux affirmations C et B est vraie. Si B était fausse, alors C le serait aussi (puisqu'on sait déjà que F est vraie), une contradiction. Par conséquent, B est vraie et de ce fait C l'est aussi. Le trésor est donc dans le coffre en ivoire ou dans celui en bois. Mais s'il était dans celui en ivoire, alors l'affirmation vraie F impliquerait que B est fausse, une contradiction. Le trésor est donc bien dans le coffre en bois.

Ont fourni une solution correcte: A. JORISSEN (élève de 5ème grec-maths), D. GALANT, L. LUONGO (élèves de 6ème à l'Athénée de La Louvière), J. MARCOVELETTE (élève de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), C. BODART (BA1 maths), M. DELHELLE, L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), L. NGUYEN (BA1 physique), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), Y. BEN ABDELKADER (BA2 maths), D. ROOSBEEK (BA2 maths à l'UCL), E. GRUWÉ (BA3 polytech), N. MEYNAERT (BA3 maths), X. MAUQUOY (MA1 maths), N. RADU (doctorant UCL), F. THILMANY (doctorant Univ.San Diego), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, C. MAGIS, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), A. GRUWÉ, G. HAVELANGE (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et P. LECHASTEFOL.

LES PENSÉES DU JOUR

"Les mathématiques ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes".(René DESCARTES, mathématicien français, 1596-1650).

"A great discovery solves a great problem, but there is a grain of discovery in the solution of any problem. Your problem may be modest; but if it challenges your curiosity and brings into play your inventive faculties, and if you solve it by your own means, you may experience the tension and enjoy the triumph of discovery". (George POLYA, mathématicien américain d'origine hongroise, 1887-1985).