PROBLEMATHS 16 mars 2016

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths ainsi que le palmarès final de cette année.

Solution du Problemath 10: L'équation donnée peut s'écrire $3.7.13.2^{2008}+2^m = n^2$. Comme 2^m n'est pas divisible par 3, n ne l'est pas non plus, autrement dit $n \equiv \pm 1(mod 3)$, donc $n^2 \equiv 1(mod 3)$. On en déduit que $2^m \equiv 1(mod 3)$, donc m est pair puisque $2 \equiv -1(mod 3)$. Posons $m = 2k$ avec k entier > 0. L'équation devient alors $3.7.13.2^{2008} = (n-2^k)(n+2^k)$. De ce fait, $n - 2^k = a2^b(*)$ et $n + 2^k = c2^d(**)$ avec a, b, c, d entiers, $ac = 3.7.13$ et $b + d = 2008$. En soustrayant $(*)$ de $(**)$, on obtient $2^{k+1} = c2^d - a2^b$. Comme a et c sont impairs, on en déduit que $b = d$ (car si $b \neq d$, en mettant en évidence la plus haute puissance de 2 divisant $c2^d - a2^b$, on trouverait que 2^{k+1} admet un diviseur impair $>$1, une contradiction).
A ce stade, on a donc $n - 2^k = a2^{1004}$ et $n + 2^k = c2^{1004}$, où $ac = 3.7.13$ et $a - c$ est une puissance de 2. Un examen de cas élémentaire montre que les seules possibilités sont $(a, c) = (39, 7)$ ou $(21, 13)$, avec $39 - 7 = 2^5$ et $21 - 13 = 2^3$. En conclusion, $(m, n) = (2016, 23.2^{1004})$ ou $(2012, 17.2^{1004})$.

Ont fourni une solution correcte:
C. BODART (BA1 maths), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), N. RADU (doctorant UCL), A. GREEN, C. VAN HOOSTE (profs de maths).

Solution du Problemath 11: Pour tout $n = 1, 2, \ldots, 29, \sqrt{3} + tg\ n^\circ = \frac{sin 60^\circ}{cos 60^\circ} + \frac{sin\ n^\circ}{cos\ n^\circ} = \frac{sin(60^\circ+n^\circ)}{cos 60^\circ\ cos\ n^\circ} = 2\frac{sin(60^\circ+n^\circ)}{cos\ n^\circ} = 2\frac{cos(30^\circ-n^\circ)}{cos\ n^\circ}$. Donc $\prod_{n=1}^{29}(\sqrt{3} + tg\ n^\circ) = 2^{29}\frac{cos 29^\circ\ cos 28^\circ \ldots\ cos 1^\circ}{cos 1^\circ\ cos 2^\circ \ldots\ cos 29^\circ} = 2^{29}$.

Ont fourni une solution correcte: A. JORISSEN (élève de 5ème à l'Institut St Boniface-Parnasse), D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. AZZOUZI, N. EL BOUHARROUTI, R. KHAZOUM(élèves de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), C. BODART (BA1 maths), M. DELHELLE, L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), S. BOUKHRIS, C. LANNOY (BA1 polytech), E. GRUWÉ, N. ENGLEBERT, C. VANDERFELT (BA3 polytech), N. RADU (doctorant UCL), M. ABRAHAM, M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, A. GRUWÉ (ingénieurs), P. MASAI (Vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 12: Prouvons d'abord qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante possède un et un seul point fixe. En effet, la fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ est décroissante (car $x \leq y$ implique $f(x) \geq f(y)$, donc $g(x) = f(x) - x \geq f(y) - y = g(y)$). De plus, pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) = f(x) - x \leq f(0) - x$ et, pour tout $x \leq 0$, $g(x) = f(x) - x \geq f(0) - x$. Il en résulte que $g(x)$ tend vers $-\infty$ (resp. vers $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$). Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$. La fonction $f$ne peut pas avoir d'autre point fixe, car si x et x' sont deux points fixes avec $x < x'$, alors $x = f(x) \geq f(x') = x'$, une contradiction. Le triple (x_0, x_0, x_0), où x_0 est l'unique point fixe de f, est clairement une solution du système. D'autre part, toute solution (x, y, z) du système est telle que $x = f(y) = f(f(z)) = f(f(f(x)))$, et de même $y = f(f(f(y)))$ et $z = f(f(f(z)))$. Autrement dit, x, y et z sont nécessairement des points fixes de la fonction continue $f^3 = f \circ f \circ f$, qui est décroissante car $a \leq b$ implique successivement $f(a) \geq f(b)$, $f(f(a)) \leq f(f(b))$ et $f(f(f(a))) \geq f(f(f(b)))$. La fonction f^3 a donc un et un seul point fixe et, comme le point fixe x_0 de f est clairement un point fixe de f^3, on en conclut que le triple (x_0, x_0, x_0) est la seule solution du système.

Ont fourni une solution correcte: D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), E. GRUWÉ (BA3 polytech), N. RADU (doctorant UCL), M. CORNEZ, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths).

<u>Solution du Problemath 13</u>: Désignons les 3 cercles par C, C', C'', leurs centres par o, o', o'' et leurs rayons par r, r', r''. Les tangentes intérieures communes à C et C' (resp. à C' et C'', à C'' et C) se coupent en un point p''(resp. p, p') situé par symétrie sur la droite joignant les 2 centres. Soient t et t' les points de contact d'une de ces tangentes avec C et C'. Les triangles rectangles otp'' et $o't'p''$ étant semblables, $|op''|/|o'p''| = r/r'$. Par un raisonnement analogue, $|o'p|/|o''p| = r'/r''$ et $|o''p'|/|op'| = r''/r$. De ce fait,

$$\frac{|op''|}{|o'p''|} \cdot \frac{|o'p|}{|o''p|} \cdot \frac{|o''p'|}{|op'|} = 1$$

et donc, par le théorème de Ceva appliqué au triangle $oo'o''$, les droites op, $o'p'$ et $o''p''$ ont un point commun. Notons que, si les centres des cercles sont alignés (cas dégénéré), ces 3 droites sont confondues, donc ont a fortiori un point commun.
<u>Ont fourni une solution correcte</u>:
D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (BA1 maths), M. DELHELLE, L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL), C. LANNOY (BA1 polytech), E. GRUWÉ (BA3 polytech), N. RADU (doctorant UCL), M. ABRAHAM, O. DECKERS, A. GREEN, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ (ingénieurs).

Pour terminer en beauté, voici le palmarès final de tous ceux qui ont résolu au moins deux Problemaths en 2015-2016. Tous ces Problematheurs et Problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le **<u>mercredi 27 avril à 12h30</u>** dans le local 2.O8.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus de la Plaine de l'ULB, boulevard du Triophe).

- <u>Ont résolu 13 Problemaths</u> : C. BODART (BA1 maths), N. RADU (doctorant UCL).
- <u>Ont résolu 12 Problemaths</u> : D. GALANT (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), C. LANNOY (BA1 polytech).
- <u>A résolu 11 Problemaths</u> : A. GREEN (prof de maths).
- <u>A résolu 10 Problemaths</u> : L. SCHELSTRAETE (BA1 maths à l'UCL).
- <u>Ont résolu 9 Problemaths</u> : S. BOUKHRIS (BA1 polytech), Y. SUPRIN (prof de maths).
- <u>Ont résolu 8 Problemaths</u> : A. JORISSEN (élève de 5ème à l'Institut St Boniface-Parnasse), E. GRUWÉ (BA3 polytech), A. GRUWÉ (ingénieur).
- <u>A résolu 7 Problemaths</u> : M. CORNEZ (prof de maths).
- <u>Ont résolu 6 Problemaths</u> : M. DELHELLE (BA1 maths à l'UCL), F. THILMANY (doctorant Univ. San Diego), O. DECKERS, S. MASSON (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).
- <u>Ont résolu 5 Problemaths</u> : L. LUONGO (élève de 6ème à l'Athénée de La Louvière), G. HAVELANGE (ingénieur).
- <u>Ont résolu 4 Problemaths</u> : L. NGUYEN (BA1 physique), B. GERSEY, N.MEYNAERT (BA3 maths), C. VAN HOOSTE (prof de maths), P. LECHASTEFOL.
- <u>Ont résolu 3 Problemaths</u> : X. MAUQUOY (MA1 maths), LADY BELMATH.
- <u>Ont résolu 2 Problemaths</u> : R. KHAZOUM (élève de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), D. KONEN (BA1 maths), J. CARLIER (BA1 maths à l'UCL), Y. BEN ABDELKADER (BA2 maths), D. ROOSBEEK (BA2 maths à l'UCL), C. LABIOUSE (BA2 ing. indust. à Arlon), C. DE GROOTE (doctorant Univ. Stanford), M. ABRAHAM (prof de maths).