PROBLEMATHS

11 novembre 2016

Problemath 7

Existe-t-il un polynôme $p(x)$ à coefficients entiers tel que $p(x) = 2000$ pour au moins une valeur entière de x et $p(x) = 2017$ pour 4 valeurs entières de x différentes deux à deux ?

Problemath 8

Soit S_n la somme des longueurs de tous les côtés et toutes les diagonales d'un polygone régulier convexe à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1. Que vaut la limite de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Problemath 9

On assemble n^3 petits cubes blancs $1 \times 1 \times 1$ pour construire un grand cube $n \times n \times n$, puis on peint en noir un certain nombre (non précisé) de faces de ce grand cube. Sachant qu'il y a alors exactement 218 petit cubes ayant au moins une face noire, que vaut n ?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 2 décembre à 14h. Les solutions reçues après cette date limite ne seront plus acceptées.

Solution du Problemath 4 : En dérivant l'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient $yf'(xy) = f'(x)$ et $xf'(xy) = f'(y)$ pour tout $x, y > 0$. Il en résulte que $xf'(x) = yf'(y)$ pour tout $x, y > 0$, autrement dit $xf'(x) = k$ (où k est une constante) d'où, en intégrant, $f(x) = k\ln(x) + C$. D'autre part, lorsque $x = y = 1$ dans (1), on a $f(1) = f(1) + f(1)$, c'est-à-dire $f(1) = 0$, et par conséquent $C = 0$. En conclusion, les seules solutions dérivables de (1) sont les fonctions $f(x) = k\ln(x)$ ($k \in \mathbb{R}$), c'est-à-dire la fonction nulle (pour $k = 0$) et les fonctions logarithmiques $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x)$ (pour $k \neq 0$). Signalons qu'on obtient exactement le même résultat sous l'hypothèse plus faible que f est continue, mais c'est un peu plus délicat à prouver.

Ont fourni une solution correcte : R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. KIERE, J. LECLIPTEUR (BA1 polytech), C. BODART, J. DAUWE (BA2 maths), C. LABIOUSE (BA3 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), N. RADU (doctorant UCL), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH (l'épouse de FANTOMATH).

Solution du Problemath 5 : Désignons par p_n la probabilité que l'entier n figure dans la suite $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$. Ainsi, $p_1 = \frac{1}{6}$. On va prouver que p_n est maximal si et seulement si $n = 6$. Pour tout $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et tout $n > x$, la probabilité que x soit le résultat du premier jet et que n figure dans la suite des S_k vaut $\frac{1}{6}p_{n-x}$. Si $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ figure dans la suite des S_k, le résultat du premier jet est nécessairement un des nombres $n, n-1, n-2, \ldots, 1$, donc $p_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \ldots + \frac{1}{6}p_{n-1}$. Il en résulte que $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ (en fait, la récurrence ci-dessus permet de montrer facilement que $p_n = \frac{1}{7}(\frac{7}{6})^n$ pour ces valeurs de n, de sorte que $p_6 = \frac{7^5}{6^6} = 0,36023\ldots$). Si $7 \leqslant n \leqslant 12$, le résultat du premier jet est un des nombres $6, 5, 4, 3, 2, 1$, donc $p_n = \frac{1}{6}p_{n-6} + \frac{1}{6}p_{n-5} + \ldots + \frac{1}{6}p_{n-1}$; autrement dit p_n est la moyenne arithmétique de $p_{n-6}, p_{n-5}, \ldots, p_{n-1}$. Comme un seul de ces nombres est égal à p_6 et que tous les autres sont plus petits, on a $p_n < p_6$ pour $n = 7, 8, \ldots, 12$. Si $n \geqslant 13$, procédons par induction. On a $p_{13} = \frac{1}{6}(p_7 + \ldots + p_{12}) < p_6$. Supposons que $p_{n-6}, p_{n-5}, \ldots, p_{n-1}$ soient tous $< p_6$. Alors $p_n = \frac{1}{6}(p_{n-6} + p_{n-5} + \ldots + p_{n-1})$ est aussi $< p_6$. En conclusion, $p_n < p_6$ pour tout $n \neq 6$.

Ont fourni une solution correcte : R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. KIERE (BA1 polytech), C. BODART (BA2 maths), C. LABIOUSE (BA3 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), N. RADU (doctorant UCL), T.HAMEL, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 6 : Dans le triangle abc, considérons les points $b' \in [a,b]$ et $c' \in [a,c]$ tels que la droite $b'c'$ soit parallèle au côté $[b,c]$ et tangente au cercle inscrit. Désignons par r (resp. r') le rayon du cercle inscrit au triangle abc (resp. $ab'c'$) et par h (resp. h') la mesure de la hauteur issue du sommet a dans le triangle abc (resp. $ab'c'$). On a donc $h = h' + 2r$. Les triangles $ab'c'$ et abc étant semblables (et même homothétiques),

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} = \frac{h-2r}{h} = 1 - \frac{2r}{h}. \tag{2}$$

L'aire de abc vaut $\frac{1}{2}h|bc|$, mais aussi $\frac{1}{2}r(|ab| + |bc| + |ca|)$ car on peut décomposer abc en 3 triangles de hauteur r ayant pour bases les 3 côtés de abc. Par conséquent, $h|bc| = rp$ (où p est le périmètre de abc), c'est-à-dire $\frac{r}{h} = \frac{|bc|}{p}$. En remplaçant dans (2), on obtient $\frac{r'}{r} = 1 - \frac{2|bc|}{p}$. Le même raisonnement s'applique aux deux autres petits triangles à l'intérieur de abc. Si r'' et r''' sont les rayons de leurs cercles inscrits, on en déduit que

$$\frac{r'}{r} + \frac{r''}{r} + \frac{r'''}{r} = \left(1 - \frac{2|bc|}{p}\right) + \left(1 - \frac{2|ac|}{p}\right) + \left(1 - \frac{2|ab|}{p}\right) = 3 - \frac{2p}{p} = 1.$$

En conclusion, $r' + r'' + r''' = r$.

La démonstration se généralise aisément aux hypertétraèdres (appelés aussi simplexes) de $\mathbb{R}^d$: la somme des rayons des hypersphères inscrites dans les $d+1$ petits simplexes est égale à $(d-1)r$, où r est le rayon de l'hypersphère inscrite dans le simplexe intitial.

Ont fourni une solution correcte : R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. KIERE (BA1 polytech), C. BODART, J. DAUWE (BA2 maths), C. LABIOUSE (BA3 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), N. RADU (doctorant UCL), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, T. HAMEL, S. MASSON (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. WAJNBERG (journaliste scientifique), Piet HAGOR et LADY BELMATH.

Addenda :

— Le problemath 2 avait également été résolu par Alfred GREEN (prof à la VUB). En fait, dans toute coloration de $\mathbb{R}^n$ avec n couleurs, au moins une des couleurs réalise toutes les distances (la preuve donnée pour $n = 3$ se généralise aisément). Par contre, si on colorie les points de $\mathbb{R}^n$ avec $n+1$ couleurs, la propriété est fausse pour $n = 1$ (il suffit de partitionner la droite réelle en segments semi-ouverts de longueur 1 coloriés alternativement en rouge et bleu : aucune des 2 couleurs ne réalisera la distance 1), mais on ignore si elle est vraie pour $n = 2$ et pour les dimensions supérieures !

— Damien GALANT, Alfred GREEN et Guy VALETTE ont généralisé le Problemath 3 : étant donné un triangle de $\mathbb{R}^2$ dont les longueurs des côtés sont a, b, c avec $a \leqslant b \leqslant c$, un segment bissecteur minimum est nécessairement perpendiculaire à la bissectrice d'un angle opposé à un petit côté, et sa longueur vaut $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 - (c-b)^2)}$.

LES PENSÉES DU JOUR :

"*To use mathematics successfully, one must have a certain attitude of mind : to know that there are many ways to look at any problem and at any subject*". (Richard FEYNMAN, physicien américain, 1918-1988, Prix Nobel de physique en 1965).

"*En mathématique, c'est comme dans un roman policier ou un épisode de Columbo : le raisonnement par lequel le détective confond l'assassin est au moins aussi important que la solution du mystère*". (Cédric VILLANI, mathématicien français, Médaille Fields en 2010).