Traduction de Monique PARKER

ULB

centre de documentation pédagogique

Le cas de la géométrie

Extrait de *Mathematics as an Educational Task*
Hans Freudenthal

UREM

**Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques**

Les Cahiers du CeDoP

Translated by permission of Kluwer Academic Publishers
Freudenthal H., *Mathematics as an Educational Task*,
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973, 680 p.

Collection : Les Cahiers du CeDoP

Le texte qui suit est la traduction d'une partie du chapitre 16 de l'ouvrage
Mathematics as an Educational Task de Hans Freudenthal,
Reidel, Dordrecht, 1973, pp. 401-462.

Avant-propos

L'ouvrage de Freudenthal a été écrit au moment où la polémique autour d'un enseignement axiomatique de la géométrie faisait rage. S'il n'y a plus guère de polémique aujourd'hui, il reste beaucoup d'interrogations.

À une époque où le problème de l'enseignement de la géométrie est posé à divers niveaux et dans de nombreux pays, il ne nous semble pas inutile de publier cette traduction des 60 premières pages du chapitre 16, qui en compte au total 110.

Monique Parker

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

Chapitre XVI. LE CAS DE LA GEOMETRIE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Pendant longtemps les mathématiques ont été synonyme de géométrie. En fait, d'autres branches ont toujours existé, l'algèbre, la trigonométrie, le calcul différentiel et intégral, mais elles n'étaient que des collections de règles fortuites et mal fondées, alors que la géométrie était un système conceptuel parfait, dans lequel les choses se succédaient de façon rigoureuse et finalement découlaient toutes de définitions et d'axiomes. Alors que d'autres techniques étaient plus habiles, la géométrie était la vérité authentique. Mais la haute estime en laquelle était tenue la géométrie s'est évanouie. Par leurs systèmes axiomatiques, Pasch et Hilbert ont révélé de nombreuses failles dans la géométrie classique. D'autre part, les axiomatiques à la Pasch-Hilbert étaient si compliquées qu'on pouvait seulement les lire ou faire de la recherche à leur sujet, mais on ne pouvait pas faire de la géométrie à l'intérieur de ces axiomatiques, ni en aucun cas enseigner la géométrie avec elles.

Il fut un temps où la géométrie n'était pas seulement un monument de science déductive; c'était le plus ancien exemple de didactique. La première leçon dont on a gardé trace est la leçon expérimentale donnée par Socrate à l'esclave de Meno, en présence de ce dernier, bien que ce récit fait par Platon puisse être de la fiction. Ce n'est pas un hasard si le contenu de cette leçon de Socrate était de la géométrie. Même aujourd'hui, la géométrie serait un excellent thème pour la méthode socratique et la réinvention; à cet égard, elle est égalée seulement par les probabilités.

La structure déductive de la géométrie traditionnelle n'a pas été seulement un succès didactique. Les gens croient aujourd'hui qu'elle n'était pas assez déductive. A mon avis, la raison est plutôt que cette déductivité n'était pas enseignée comme de la réinvention, comme Socrate le faisait, mais était imposée à l'élève. Toujours est-il qu'aujourd'hui, certains prêchent l'abolition de la géométrie. Parmi ceux qui doivent initier les jeunes à leur héritage culturel, plus d'un jetterait avec plaisir la géométrie dans l'incinérateur culturel. Les jours de la géométrie traditionnelle sont comptés, si tant est qu'elle survit encore à certains endroits. Qu'est-ce qui lui succèdera ? Cette question urgente est contenue dans le titre de ce chapitre. Le cas de la géométrie - a-t-elle été condamnée à mort, et a-t-elle eu un procès équitable ? A-t-elle été condamnée avec raison ou sur de fausses preuves ? L'accusée a-t-elle été laissée sans conseil ? La procédure ne doit-elle pas être rouverte ?

S'il y a lieu aujourd'hui d'être inquiet pour l'avenir de l'enseignement de la géométrie et même de craindre que la géométrie ne puisse disparaître du curriculum, alors les premiers à blâmer sont ceux qui, activement ou passivement, ont résisté au changement dans l'enseignement mathématique. Les voix de ceux qui préconisaient un renouveau n'ont pas été entendues. Les plus dangereux étaient ceux qui croyaient qu'ils pouvaient sauver la vieille géométrie en renforçant sa structure déductive; ceci était réellement une tâche désespérée. La géométrie n'est pas que

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

déduction.

Qu'est-ce que la géométrie ?

De telles questions peuvent recevoir des réponses à des niveaux différents. Au niveau le plus élevé, il s'agit d'une partie des mathématiques organisée de façon axiomatique et appelée géométrie pour des raisons historiques. Soucieux des principes éducatifs que j'ai défendus, je demanderai plutôt ce qu'est la géométrie au niveau le plus bas ? Ma réponse ne fait alors aucun doute - la géométrie est l'appréhension de l'espace. Et puisqu'il s'agit de l'éducation des enfants, c'est l'appréhension de cet espace dans lequel l'enfant vit, respire et se déplace. L'espace que l'enfant doit apprendre à connaître, à explorer, à conquérir, afin de mieux y vivre, y respirer, s'y déplacer. Sommes-nous tellement habitués à cet espace que nous ne puissions imaginer combien il est important pour nous et pour ceux que nous éduquons ? Fort bien, qu'il soit important - répondront certains - mais il n'est pas important pour la géométrie. La géométrie, en fait, c'est de la mathématique, et comme telle, elle exige des fondements plus solides qu'un espace qui, du moins en tant qu'objet de recherche physique, est suspect à un mathématicien authentique.

La géométrie - science de l'espace, de l'espace physique. Cela ne semble-t-il pas démodé ? Vous ne pouvez sans doute croire qu'un mathématicien ose aujourd'hui prononcer une telle affirmation. Si l'espace physique est tellement important, laissons les physiciens s'en occuper. Ne sommes-nous pas des mathématiciens ? Ne sommes-nous pas les architectes des structures mathématiques, et si les physiciens ou d'autres peuvent les utiliser, qu'ils prennent ce qu'ils veulent. Les sables mouvants de la réalité ne sont pas une base sur laquelle on peut construire un système mathématique; les mathématiques doivent être protégées de toute contamination par des germes non déductifs. Le système mathématique est souverain, et si le système exige que la géométrie commence par le plan affin, alors l'espace physique avec ses solides et ses distances ne peut être qu'un obstacle sur la route des bonnes mathématiques.

Ceci est une philosophie, et à certains égards, ce peut être une bonne philosophie. Ceux qui sont occupés à construire des systèmes déductifs devraient être capables de fermer les yeux devant les déductions de la réalité, ils devraient être capables d'oublier à quoi ressemble un triangle dans la réalité et qu'on peut fabriquer un triangle en bois et le déplacer. Mais il est d'autres activités que de construire des systèmes déductifs. Il y a des étudiants qui jamais ne construiront leur propre système déductif ni même ne reconstruiront celui des autres, bien qu'ils soient obligés d'étudier des mathématiques. Nous ne pouvons leur imposer cette philosophie.

De façon arbitraire, j'ai noté certaines questions qui peuvent surgir quand on se met à étudier l'espace :
Pourquoi un morceau de papier se plie-t-il suivant une ligne droite ?
Pourquoi un morceau de papier roulé devient-il rigide ?

Comment les ombres prennent-elles naissance ?
Quelle est l'intersection d'un plan et d'une sphère, de deux sphères ?
Quelle sorte de courbe est la frontière de la lune ?
Pourquoi le rayon d'un cercle peut-il être transféré six fois le long de sa périphérie ?
Pourquoi la ligne droite est-elle la plus courte ?
Pourquoi des triangles congruents s'emboîtent-ils pour couvrir le plan et pourquoi des pentagones congruents n'y arrivent-ils en général pas ?
Comment les gens peuvent-ils mesurer de grandes distances sur la terre, le diamètre de la terre, et les distances des corps célestes ?
A quoi ressemble un cube quand on le regarde le long d'une diagonale spatiale ?
Qu'est-ce qui est plus grand, la superficie d'une calotte sphérique ou celle du cylindre qui l'entoure ?
Quel est le plus court chemin parcouru par un rayon lumineux, d'un point à autre, en touchant un miroir ?
Comment fonctionne un kaléidoscope ?
Quelle est la plus grande sphère dans un tétraèdre ?
Quelle sorte de courbes ont la même largeur dans toutes les directions ?
Comment le niveau de liquide varie-t-il dans un récipient donné quand on ajoute une certaine quantité de liquide ?
Quelle est la relation entre la grandeur réelle et apparente d'un corps ?
Si on débite un cube en six pyramides à base carrée ayant leur sommet au centre du cube et qu'on retourne ces pyramides vers l'extérieur sur les faces correspondantes, pourquoi obtient-on un rhombododécaèdre ?
Comment peut-on mesurer l'angle d'une droite et d'un plan ou de deux plans ?
Y a-t-il une droite horizontale (verticale) dans tout plan ?
Quels sont les automorphismes d'un réseau carré dans le plan ?
Combien de points un réseau plan peut-il avoir sur le cercle unité s'il a au maximum l'origine à l'intérieur de ce cercle ?
Quelle est la différence entre un pas de vis gauche et droit et pourquoi ne sont-ils pas équivalents sous l'action des déplacements ?
Qu'est un déplacement sur la sphère ?
Pouquoi un polyèdre convexe est-il rigide ?
Pourquoi une table à quatre pieds peut-elle branler et quelle est la différence avec une table à trois pieds ?
Pourquoi une porte a-t-elle besoin de deux gonds et comment pouvons-nous en ajouter un troisième ?
Et finalement la vieille question : pourquoi un miroir échange-t-il droite et gauche et pas haut et bas et qu'arrive-t-il si je suis non pas debout mais couché devant le miroir ?

Remarquez que je n'ai posé aucune question d'ordre pratique. Ma tâche aurait été plus facile si je l'avais fait. Remarquez aussi qu'il n'y avait aucune question déroutante dans la liste, mais seulement des questions d'importance principale, auxquelles on peut répondre sans grande ingéniosité. Elles visent à expliquer, à ceux qui ne le savent pas ou ne le

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

croient pas, ce que signifie appréhender l'espace par la géométrie. J'ai dit précédemment combien il est important de lier les mathématiques à la réalité quand il s'agit de les enseigner. Aucune autre approche ne peut en général garantir une influence durable des mathématiques sur l'élève. Nous autres mathématiciens, nous n'oublions pas nos mathématiques parce qu'il s'agit de notre activité principale. Ce qui n'est pas relié au monde dans lequel on vit s'efface de la mémoire. Pour la majorité, les mathématiques ne peuvent être un but; des fragments de mathématiques apprises, sans lien entre eux, sont oubliés et deviennent inopérants. Si la géométrie commence comme une approche de l'espace physique, elle est étroitement liée à une réalité qui, jour après jour, se présente à l'esprit. Comprise de cette façon, la géométrie peut être un excellent moyen d'enseigner des mathématiques pleines de relations.

Je ne prétends pas que l'interprétation de la géométrie défendue ici soit nouvelle. Au contraire, des mathématiciens et des didacticiens ont depuis longtemps défendu cette approche de la géométrie contre l'approche déductive. L'ouvrage magnifique de Clairhaut *Eléments de géométrie* de 1741 en témoigne. Aux Pays-Bas, à partir de 1920, Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, épouse et collaboratrice du célèbre physicien Paul Ehrenfest, a propagé cette approche de la géométrie dans des articles et des groupes de travail. Le *Übungensammlung zu einer geometrische Propädeuse* (La Haye 1931) n'a pas encore été épuisé comme source abondante d'exercices géométriques. L'influence de Tatiana Ehrenfest, bien qu'initialement restreinte à un petit cercle, a été durable. On peut imaginer les objections contemporaines contre sa géométrie "propédeutique" - d'un côté le cri *"ceci est de la physique expérimentale plutôt que de la mathématique"*, de l'autre *"comment un professeur peut-il maintenir la discipline dans une classe quand les enfants s'y déplacent, en comptant des pas, en mesurant des distances, en manipulant de la colle et des ciseaux ?"*. Son exigence de voir la géométrie commencer dans l'espace était à peine prise au sérieux, à cette époque; aujourd'hui dans mon pays, presque personne ne nie cela. *"Comment osez-vous parler de sphères à des enfants qui ne connaissent pas une définition décente d'une droite?"* était l'une des objections. Sa demande de ne pas prouver, au début de l'enseignement de la géométrie, des choses visibles à l'œil nu, est généralement acceptée aujourd'hui.

Tatiana Ehrenfest ne rejetait pas la déductivité. Elle connaissait l'axiomatique mathématique et la cultivait, mais, comme physicienne, elle était aussi bien au courant des fortes interférences entre la physique et les théories de l'espace. Le but de sa géométrie était un système déductif influencé par l'axiomatique de Helmholtz. De ce point de vue aussi, elle était plus moderne que la plupart de ses contemporains. En fait, une telle approche serait préférée aujourd'hui au "machin" de Pasch-Hilbert.

Pourquoi enseigner la géométrie ?

Le problème de l'utilité et du but dans l'enseignement de la géométrie n'est pas très différent de ce qu'il est en mathématique en général, bien que l'accent soit mis différemment sur certains points. D'une part, la géométrie a toujours été considérée comme une discipline de l'esprit, plus que toute autre partie des mathématiques, parce qu'elle pouvait revendiquer des liens plus étroits avec la logique. La déductivité authentique était le privilège de la géométrie alors que le travail de l'algèbre consistait à substituer dans des formules et à les transformer. D'autre part, le critère de l'utilité, pertinent dans d'autres parties des mathématiques, faisait totalement défaut en géométrie. Un programme pragmatique de géométrie pourrait se restreindre à un petit trésor de théorèmes tels Pythagore, quelques théorèmes évidents sur les figures congruentes et quelques formules pour les périmètres, les aires et les volumes. Une approche pragmatique ne demanderait pas un système logique comme prescrit par la tradition euclidienne. Toutefois, l'abolition de la géométrie comme sujet d'enseignement n'a pas été demandée sur base d'arguments pragmatiques. Quiconque aujourd'hui recommande l'abolition de la géométrie, enseignerait des choses beaucoup plus inutiles; plutôt que de blâmer la géométrie pour son système logique, celui-là lui reproche d'être un système trop faible.

Si la géométrie doit être imposée à l'étudiant comme un système logique, il vaudrait en fait mieux l'abolir. Il est des systèmes plus probants qu'aucun des systèmes de géométrie qui se puisse concevoir. La géométrie n'a de signification que si elle exploite sa relation à l'espace vécu. Si l'enseignant évite ce devoir, il rejette une chance unique. La géométrie est l'une des meilleures occasions d'apprendre à mathématiser la réalité. C'est une occasion de faire des découvertes, comme les exemples le montreront. Bien sûr, les nombres aussi sont un royaume ouvert à l'étude; on peut apprendre à penser en calculant, mais des découvertes faites avec ses propres yeux et ses propres mains sont plus convaincantes et surprenantes. Jusqu'à ce qu'on puisse plus ou moins s'en passer, les formes dans l'espace sont un guide indispensable pour l'étude et la découverte.

Mais il y a plus. En 1956, je l'exprimais comme suit : *la géométrie, comme système logique, est un moyen - peut-être même le moyen le plus puissant - de faire sentir aux enfants le pouvoir de l'esprit humain, c'est-à-dire de leur propre esprit.*
Je poursuivais : *si ceci est réellement notre but, enseigner la géométrie est un combat sans pareil entre l'idéal et la réalisation. Je ne sais si un enfant aux prises avec ses problèmes de mathématique est jamais arrivé à la conclusion que les mathématiques ont été l'œuvre d'extraordinaires génies humains, mais je suis de toute façon certain que les mathématiques sont avant tout un moyen de convaincre les enfants de leur propre infériorité mentale.*

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Du matériel concret

Je cite les van Hiele[1] :

"L'emploi de matériel concret au début de l'enseignement de la géométrie est souvent mal interprété. Ceux qui préconisent un début concret, aussi bien que d'autres qui s'y opposent, parlent souvent d'une "méthode expérimentale". Ceci signifie qu'ils considèrent l'emploi de matériel concret comme un pas de l'enseignement de la géométrie comme science théorique vers l'enseignement de la géométrie comme science expérimentale. Mais au stade introductif, la géométrie n'est pas une science. Si des élèves essaient de paver un sol avec des triangles congruents, ils ne tentent pas quelque chose qui puisse s'appeler une expérience au sens des techniques expérimentales. Ils ne vérifieront pas que chaque pièce s'adapte, ils s'arrêteront dès qu'ils auront compris la structure totale, et ils ne recommenceront pas avec d'autres triangles".

En fait, si la géométrie expérimentale signifie que l'étudiant fait des expériences, alors une grande partie de son activité mathématique devrait être expérimentale, comme l'est l'activité d'un mathématicien créatif. Si cela doit nous rappeler la physique expérimentale, alors c'est complètement erroné. Le terme "géométrie expérimentale" évoque peut-être des associations comme mettre une ficelle autour d'un cercle ou évaluer un cercle découpé pour déterminer son périmètre et son aire. Pendant un certain temps, ce passe-temps ennuyeux (qui ne conduit nulle part) a été cultivé sous le nom de "mensuration" - son sommet était un catalogue de formules. Toutefois, l'initiation à la géométrie considérée ici, est une activité de base pour préparer l'enfant à des niveaux plus élevés. L'attitude des enfants envers le matériel concret diffère totalement de ce qui serait attendu dans l'enseignement de la physique, et du réalisme du laboratoire de physique. L'exemple cité ci-dessus le montre. Tout aussi typique est l'exemple suivant. Lors de la première leçon de géométrie dans la classe de Dina van Hiele, les enfants (âgés de 12 ans) devaient dessiner des trottoirs pavés de pierres carrées. L'un des enfants dessina des pierres avec des fissures et des grains de sable dans les rainures entre les pierres. Un mot suffit pour expliquer à l'enfant que ceci n'appartenait pas au contexte de la géométrie.

Depuis Tatiana Ehrenfest, de nombreuses sortes de matériel concret ont été proposées pour l'enseignement introductif de la géométrie. J'ai regardé de plus près celles de van Hiele et de van Albada[2]. Aujourd'hui, le choix est bien plus vaste. Plier du papier, couper, coller, dessiner, peindre, mesurer, paver, ajuster sont organisés en activités géométriques.

Le plus important est comment le matériel est employé. En effet, ce ne doit pas être seulement un jeu. D'après la formulation de Dina van Hiele, le but du matériel concret est de faire penser l'enfant. La main

[1]Dans H. Freudenthal, *Report on Methods of Initiation into Geometry*, 1958, p.76
[2]voir le rapport cité précédemment

et le cerveau travaillent ensemble pour répondre à la question de savoir comment une chose particulière se fait. Si des définitions sont données à ce stade, elles seront souvent génériques, c'est-à-dire qu'elles diront comment la chose à définir est faite. Si cette définition est reformulée plus tard d'une façon plus formelle, la nouvelle définition devrait être connectée à l'ancienne. Le développement logique ultérieur devrait être ancré dans le matériel concret.

Il est tout à fait naturel que l'enseignement de la géométrie avec du matériel concret commence dans l'espace. J'ai déjà dit qu'à présent cette approche était généralement acceptée dans mon pays. Ce n'est pas dans la tradition classique - Euclide ne touche pas à la géométrie dans l'espace avant le 11^e livre (il faut noter que paradoxalement ceux qui combattent Euclide le plus ardemment sont ses plus obéissants imitateurs). L'enseignement traditionnel de la géométrie commençait par la géométrie plane en 7^e année pour atteindre l'espace en 10^e ou 11^e année. Il n'était pas rare que des élèves qui réussissaient bien en géométrie plane échouent dans l'espace. Leur imagination spatiale avait été tuée par trop d'exercices de géométrie plane.

Comment du matériel concret peut être employé est montré dans la leçon décrite dans la thèse de Dina van Hiele[3], bien que la partie centrale de cette thèse soit conçue comme un travail de recherche didactique.

Les expériences de Dina van Hiele

Les expériences ont été réalisées dans deux classes parallèles (la première année de l'école secondaire, 12 ans).

Le professeur a montré aux enfants des cubes faits en diverses matières. Avec un cube de meccano, les enfants ont appris les notions d'arête et de sommet. Ils ont compté les arêtes et les sommets. Ils ont dit que le cube est limité par six carrés. Ils ont remarqué comment ces carrés doivent être dessinés dans un schéma connexe. Ils ont fabriqué un tel cube. Ils se sont familiarisés avec les outils de la géométrie. Comment peut-on faire un angle droit ? Un double pliage produit un angle droit.

Dans un cube de meccano, des ficelles ont été attachées en diagonale. Il y en a de deux sortes, qui ont reçu des noms. Sur un cube de carton, les diagonales des faces ont été dessinées, comptées et mesurées. Comment peut-on mesurer les diagonales spatiales de façon précise ? Le dessus du cube de carton n'était pas attaché. Dans le cube du professeur, on a mis un plan diagonal. C'était un rectangle. Les élèves ont compris comment il pouvait être construit et comment par ce moyen la diagonale spatiale pouvait être mesurée. Le rectangle a été construit. Les enfants ont compté de combien de façons il pouvait être ajusté dans le cube.

Ils ont fabriqué un tétraèdre régulier; ce faisant ils ont appris comment obtenir un triangle équilatéral. Quelles sortes de triangles y a-t-il dans le cube ? Ils ont trouvé que ceux-ci n'étaient pas équilatéraux mais

[3] Dina van Hiele-Geldof, *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, 1957

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

rectangles.

Le professeur a donné aux élèves un réseau d'un octaèdre régulier avec un plan diagonal. Les élèves l'ont fabriqué.

Ensuite, on s'est occupé de symétries. La moitié droite d'un vase a été dessinée au tableau. Les enfants ont compris ce que cela signifiait. Ils ont complété l'autre moitié et ont vérifié le dessin à l'aide d'un miroir. A partir de l'analyse de ce procédé, les enfants ont poursuivi par des constructions systématiques de symétries dans le plan. Ensuite, de nombreux autres corps et figures symétriques ont été traités. Comment peut-on trouver le centre d'un cercle ?

Les périmètres de cercles ont été mesurés et comparés. La précision des mesures, les arrondis et les estimations ont été discutées. Un hexagone régulier a été inscrit dans le cercle. Le rapport du périmètre et du diamètre doit dépasser 3. Un carré circonscrit a montré que 4 était trop. Donc certaines des mesures devaient être fausses.

Avec quatre crayons d'égale longueur, ils ont construit un quadrilatère qui n'était pas un carré. Beaucoup d'exemples de losanges ont été trouvés. Des modèles pivotants ont été montrés. Des losanges de papier ont été pliés; ils ont deux axes de symétrie. D'autres propriétés du losange ont été énoncées.

Le losange a été le point de départ de constructions. Les enfants ont d'abord dessiné des losanges arbitraires dans leur cahier, ensuite la position a été imposée (un sommet donné, et les deux sommets adjacents sur une droite donnée; le dernier sommet est l'image miroir du premier par rapport à la droite).

La symétrie axiale de figures planes a alors été systématiquement appliquée. De magnifiques figures ont été dessinées et analysées. Des prismes réguliers hexagonaux et des pyramides régulières octogonales ont été construits. Des notions telles la hauteur et la médiane ont été acquises. La figure du cerf-volant a systématiquement été utilisée, en particulier dans des constructions sur un papier à dessiner restreint.

Quelques leçons ont été consacrées aux angles. Les angles ont été montrés par des mouvements des bras plutôt que de définir ce qu'est un angle. Une horloge a fourni des exemples. Le rapporteur a été introduit. Des notions dépendant des angles ont été discutées.

Ceci a terminé le premier trimestre. Suit alors la partie principale de la thèse de Dina van Hiele, un récit plutôt littéral du second trimestre. Plutôt que de reproduire les détails didactiques hautement éclairants, je me restreindrai à un schéma du contenu. Le second semestre était consacré aux "pavages".

La première leçon a commencé par une discussion de la congruence. Les premiers exemples du professeur ont été les chaises congruentes de la salle de cours. (La géométrie scolaire traditionnelle ne connaît que les triangles congruents). Après quelques explications fausses ("aires égales"), les élèves parviennent à la compréhension de la congruence - "des objets qui ne peuvent être distingués".

Un trottoir doit être pavé à l'aide de carreaux carrés congruents.

Tous les élèves ont immédiatement tracé de longues lignes droites. Des schémas différents ont été discutés. Dans les schémas, des parallèles furent découvertes. Elles ne doivent pas être horizontales ou verticales.

Dans la deuxième leçon, le professeur a montré au tableau comment tracer des parallèles. A partir de l'hexagone étoilé, elle a dessiné un motif de losanges, et les enfants l'ont copié. Un enfant a vu des cubes dans le dessin.

Troisième leçon : le professeur distribue des ensembles de polygones réguliers congruents en carton. On demande aux enfants de couvrir un plan avec de tels carreaux congruents. Est-ce possible avec des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, des octogones ? Si oui, ils doivent dessiner un tel pavage. (Pour dessiner le pentagone, ils pouvaient utiliser un rapporteur).

Quatrième leçon : ensembles de polygones irréguliers en carton.

Cinquième leçon : pourquoi n'est-ce pas possible avec des pentagones réguliers ?

Sixième leçon : le pavage avec les triangles peut être modifié de façon à ne contenir qu'un seul système de droites parallèles. Les enfants découvrent toutes sortes de structures dans le pavage triangulaire. Les angles égaux sont marqués de la même couleur. La somme des angles d'un triangle est découverte; en chaque sommet l'angle de 180^0 apparaît de trois façons. Une propriété analogue des quadrilatères. Etait-il possible de prévoir cette propriété du quadrilatère ? Pourquoi cela ne marche-t-il pas avec des pentagones réguliers ?

Septième leçon : le pavage triangulaire contient des parallélogrammes - ceux-ci sont discutés. Des parallélogrammes de grandeurs différentes sont découverts dans le pavage. Les agrandissements sont discutés, ainsi que les trapèzes. Paver avec des hexagones ? La somme des angles dépasse 360^0. Parfois cela marche - cela marcherait-il avec un type de pentagones ? Des quadrilatères non convexes sont considérés.

Dans la huitième leçon, les conclusions obtenues jusqu'à présent au sujet des sommes des angles et des pavages sont réunies dans des arbres logiques. (Le plan ne peut pas être pavé avec n'importe quel pentagone). Les structures dans les pavages sont reconsidérées. Des "échelles" et des "scies" sont découvertes dans les pavages.

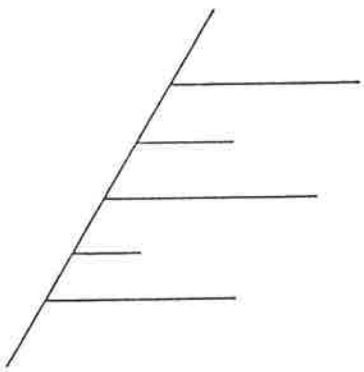

Fig. 43.

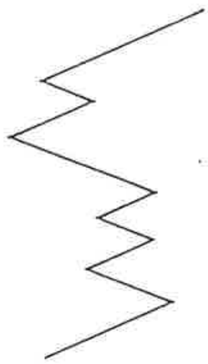

Fig. 44.

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

La neuvième leçon utilise les "échelles" et les "scies" comme outils permettant d'organiser les angles formés par des droites parallèles.

La dixième leçon s'occupe de l'organisation logique des relations entre parallélisme, "échelle", "scie", somme des angles d'un triangle.

De la onzième à la dix-septième leçon, sont inclus les agrandissements dans les pavages, les rotations, le comptage systématique des pavés, les aires, la similitude et des définitions systématiques.

Voilà pour le cours du deuxième trimestre. Au troisième trimestre, les enfants sont revenus au cube. Le plan diagonal divisait le cube en deux prismes et les élèves ont construit des modèles de tels prismes. Le professeur a montré une pyramide régulière ayant comme base l'une des faces du cube et comme hauteur la moitié de l'arête du cube. Combien de ces pyramides remplissent le cube ? Comment obtient-on ces pyramides ? Quelle est la longueur de leurs arêtes ? Les pyramides ont alors été construites par les enfants.

Quel est le volume de ces prismes et pyramides ? Une telle pyramide a été collée sur chaque face du cube. Quel solide obtient-on ? Quel est le volume du rhombododécaèdre ?

On a aussi considéré des solides réguliers et semi-réguliers.

Le cours de P.J.Van Albada

La première année (12 ans) était un cours introductif, qui sera décrit ci-dessous plus longuement. Elle était suivie d'un enseignement systématique de 3 ans de la géométrie; la géométrie plane était toujours connectée de façon étroite à la géométrie dans l'espace. Aucune proposition évidente n'était démontrée. En 5^e année, la théorie a été répétée dans un nouveau schéma d'organisation. Le nombre de propositions non démontrées a été fortement réduit. Le système de droites et de plans dans un faisceau a été étudié comme exemple de géométrie plane non-euclidienne, afin de voir quels théorèmes de géométrie euclidienne resteraient valables et comment ils pourraient être prouvés de façon générale.

Le cours introductif a commencé par reconnaître et construire des symétries. Des problèmes simples de géométrie descriptive ont alors suivi, avec des questions de perspective : de quelle hauteur a été prise une certaine photographie ? Quelle était la hauteur du soleil ? Poteaux télégraphiques. Construction de la troisième projection quand deux étaient données. Projections de solides réguliers. Constructions d'ombres. Polygones réguliers. Pavages. Construction de modèles. Plus court chemin sur des cylindres et des cônes. Coloriage de cartes. Parcours de graphes.

Ajustage

L'espace avec ses solides est plus concret que le plan avec ses figures. Dans le plan, le chemin vers l'analyse logique est plus court; l'espace est plus intuitif et favorise plus d'activités créatrices. Les figures planes sont dessinées, les solides sont construits.

Il y a une exception dans le plan - les pavages. L'idée psychologique sous-jacente est ici la même que dans l'espace et elle est réalisée au moins aussi concrètement. Cette idée est l'ajustage. C'est une sensation motrice. Les psychologues peuvent dire combien forte est la composante motrice chez les jeunes et combien importantes sont la perception motrice et la mémoire motrice.

Les arêtes d'un réseau s'ajustent. Des prismes et des pyramides emplissent le cube, le plan diagonal s'insère dans le cube, le tétraèdre formé par les diagonales des faces s'ajuste dans le cube; retournées vers l'extérieur, les six pyramides qui emplissent le cube forment un rhombododécaèdre. Comme les pièces d'un pavage de mosaïque s'ajustent merveilleusement bien ! Le pavage contient des droites et des angles droits, des étoiles et des motifs parallèles.

Les choses s'ajustent, mais les enfants demandent-ils pourquoi ? Non, à de rares exceptions près. Tous ces miracles de l'espace semblent ne laisser aucune impression. Cependant ils pénètrent, lentement mais sûrement. La plus grande vertu pédagogique est la patience. Un jour, l'enfant demandera pourquoi et il n'est pas utile de commencer la géométrie systématique plus tôt. Il peut même être néfaste de le tenter. La clé de la géométrie est le mot “pourquoi”. Seuls des rabat-joie le présenteront prématurément. Les miracles de l'ajustage sont une préparation pour la géométrie systématique, mais même si ce stade est atteint, ils ne peuvent être écartés. Ils demeurent le matériel brut de la pensée géométrique. L'élève devrait s'en souvenir et reconsidérer les vieux problèmes à chaque stade.

Si l'ajustage est l'idée principale, l'espace devrait être reconnu comme la maison des corps solides. Dans le plan affin, il n'y a pas de problème d'ajustage. Quand j'ai expliqué ceci à un professeur qui avait enseigné la géométrie pendant un certain temps en commençant par le point de vue affin, il fut surpris. Il avoua n'avoir jamais été conscient de ce fait. Il n'avait pas réalisé combien l'espace affin était sophistiqué, combien il était éloigné de l'espace des solides. Il avait été induit en erreur par l'auteur du manuel, bien que peut-être même celui-ci n'en fût pas conscient et n'y avait peut-être jamais réfléchi. Combien faut-il d'expériences déductives pour arriver à la géométrie affine ? La géométrie affine ne peut jamais être le début de l'enseignement de la géométrie.

Entre les cours introductifs de van Albada et de Dina van Hiele, il y a une grande différence, bien que les deux soient non classiques. Dans le cours de van Albada, il y a une grande variété de matériel qui invite l'enfant à penser en employant ses yeux et ses mains. La géométrie descriptive extensive au début est un fait caractéristique. Je crois que c'est une découverte importante de van Albada que la place de la géométrie descriptive, si elle est acceptée comme sujet d'enseignement, est en première et non en dernière ou avant-dernière année de l'enseignement de la géométrie. A ce jeune âge, les élèves pensent avec les mains et les yeux. Nos prédécesseurs, qui jugeaient que la géométrie dans l'espace doit être précédée par la géométrie plane, n'étaient pas conscients du fait

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

que la géométrie descriptive est plus élémentaire que la géométrie plane déductive.

A chaque étape, le cours de Dina van Hiele fait apparaître des tentatives pour détacher la déductivité de l'aventure visuelle-motrice. Dans le dessin des triangles, les enfants voient la somme des angles du triangle, dans le dessin des quadrilatères, ils voient celle des quadrilatères. La question est alors posée de savoir si, sur base de la somme des angles du triangle, on pouvait prédire celle du quadrilatère. La première fois que cette question est posée, c'est un échec. Les enfants ne comprennent pas ce que cela signifie de faire une inférence des triangles aux quadrilatères. Dans la mosaïque, ils peuvent découvrir des structures; des structures sont créées, mais il n'y pas de restructurations. Dix jours plus tard, la plupart ont compris. Pour prouver l'égalité des angles formés par des parallèles, ils introduisent la structure de l'échelle et de la scie (fig. 45).

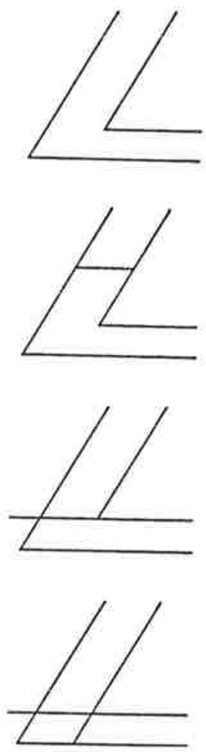

Fig. 45.

Compter les sommets et les arêtes d'un cube est une chose tout à fait différente. Le cube a 8 sommets, avec 3 arêtes issues de chaque sommet. Donc il y a 24 arêtes. Ils avaient compté les arêtes auparavant. Il y en avait 12. Donc 24 doit être faux. Cependant personne ne demande ce qui est faux. Ils n'ont pas encore compris que non seulement un résultat mais aussi un raisonnement pouvait être faux. (Des professeurs m'ont dit que cette idée peut encore faire défaut plus tard, si les élèves n'ont pas encore atteint le niveau auquel le raisonnement peut être le sujet du raisonnement). Que le professeur explique le phénomène du double comptage est sans effet; un exercice supplémentaire prouve qu'il n'y a absolument aucun transfert. La structure relationnelle entre les sommets et les arêtes du cube est d'une tout autre sorte que les ajustages; elle requiert une autre sorte d'abstraction. Ceci n'est pas une structuration avec des droites auxiliaires; pour être structurellement compris, le système relationnel des sommets et arêtes doit être considéré avec une intuition qui diffère grandement de l'attitude envers les solides dans l'espace.

Déduction

L'étude de l'espace par l'enfant peut être organisée de diverses façons. J'ai décrit l'approche de Dina van Hiele parce qu'elle a été analysée le plus en profondeur. La période couverte par son cours montre une croissance permanente bien que discontinue de l'habileté de l'enfant à organiser son activité par des moyens logiques. Au niveau le plus bas, l'enfant pense, si l'on veut, avec ses mains, ses yeux, son sens cinétique. L'observateur qui sait ce que les mathématiques signifient interprète l'activité de l'enfant comme étant des mathématiques. Dès que le professeur montre un plan diagonal du cube, les enfants réussissent à construire une diagonale spatiale et l'observateur peut attribuer ce succès au même cheminement de pensée qui l'a conduit lui-même à la construction de la diagonale spatiale. Cependant, c'est encore au niveau le plus bas. L'enfant peut rester un long moment à ce niveau en géométrie avant d'atteindre le point où il objectivera son activité au niveau de base. Pas mal réussissent brillamment à ce niveau de base et n'accèdent jamais à des niveaux plus élevés. Souvent la raison en est qu'ils furent poussés trop tôt à un niveau plus élevé et qu'ils furent aidés par des algorithmes à simuler ce niveau plus élevé.

J'ai affirmé plusieurs fois qu'à ce niveau, le didacticien socratique refuserait d'introduire les objets géométriques par des définitions, mais partout où l'inversion didactique prévaut, la déductivité commence par des définitions. (En géométrie traditionnelle, ils définissent même ce qu'est une définition - un niveau encore plus élevé dans le processus d'apprentissage). Le didacticien socratique rejette un tel procédé. Comment pouvez-vous définir une chose avant de savoir ce que vous devez définir ? Ceci est un principe général mais il est particulièrement important en mathématiques où "définition" a une signification spéciale. En mathématiques, une définition ne sert pas seulement à expliquer aux gens ce que signifie un certain mot. En mathématiques, les définitions sont des liens dans des chaînes déductives, mais comment pouvez-vous forger un tel lien sans savoir dans quelle chaîne il doit s'insérer ?

Si Dina van Hiele montre à ses élèves un cube, un losange, un parallélogramme ou leur donne des exemples de figures congruentes, les élèves comprennent aussi bien ce qu'elle veut dire qu'ils reconnaissent dans une chaise, une bouteille ou une poupée ces espèces, bien qu'ils n'aient jamais appris la définition de ces espèces et ne soient pas familiers avec tous leurs représentants. Bien sûr, il peut y avoir des in-

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

certitudes, par exemple de savoir si un carré appartient aux losanges, ou un losange aux parallélogrammes. Le professeur peut imposer des définitions pour décider de telles controverses, mais s'il le fait, il dégrade les mathématiques en quelque chose comme l'orthographe qui est régie par des règles arbitraires.

Si l'enfant sait ce qu'est un losange, ce qu'est un parallélogramme, il peut visuellement découvrir des propriétés de ces formes. Il y en a des tas; pendant la discussion en classe, les enfants les énumèrent. Dans le parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et égaux, les angles opposés sont égaux, la somme des angles adjacents vaut 180^0, les diagonales se coupent en leur milieu, le parallélogramme a un centre de symétrie, il peut être divisé en triangles congruents, et le plan peut être pavé avec des parallélogrammes congruents. Ceci est une collection de propriétés visuelles qui demandent à être organisées. J'ai déjà expliqué comment la déductivité commence à ce point; elle n'est pas imposée mais se déploie de ses germes locaux. Les propriétés du parallélogramme sont liées les unes aux autres; l'une d'entre elles peut devenir la source dont découlent les autres. Ainsi naît une définition, et maintenant il devient clair pourquoi un carré sera un losange et un losange sera un parallélogramme. Dans ce cours, l'élève apprend à définir et il expérimente le fait que définir est plus que décrire, que c'est un moyen dans l'organisation déductive des propriétés d'un objet.

Comme je l'ai souligné auparavant, cette stratégie ne rencontre pas les intentions de ceux qui croient en un système. Comment pouvez-vous raisonner de façon rigoureuse sur quelque chose qui n'a pas été défini auparavant, demandent-ils. Mais ceci est exactement la chose faite habituellement par le mathématicien créatif et qui devrait aussi être permise aux apprentis. En effet, le plus souvent les définitions ne sont pas préconçues, mais sont la touche finale de l'activité d'organisation. L'enfant ne devrait pas être privé de ce privilège. Trahir un secret qui pourrait être découvert par l'enfant lui-même est de la mauvaise pédagogie; c'est même un crime. Qui n'a pas encore observé des enfants de six ans en train de découvrir et d'inventer et qui ne sait pas comme ils peuvent être fâchés si le secret est dévoilé trop tôt ? Ceux de 12 ans sont différents, ils se sont habitués aux solutions imposées et demandent la solution sans essayer. Un bon enseignement de la géométrie peut signifier beaucoup - apprendre à organiser une matière et apprendre ce qu'est organiser, apprendre à conceptualiser et ce qu'est conceptualiser, apprendre à définir et ce qu'est une définition. Cela signifie amener les élèves à comprendre pourquoi une organisation, un concept, une définition sont meilleurs que d'autres. L'enseignement traditionnel est différent. Plutôt que de donner à l'enfant l'occasion d'organiser ses expériences spatiales, la matière est offerte comme une structure pré-organisée. Tous les concepts, définitions, et déductions sont préconçus par le professeur, qui connaît leur usage dans le moindre détail - ou plutôt par l'auteur du manuel qui a soigneusement incorporé tous ses secrets dans la structure.

La déductivité d'Euclide

Ce que Socrate a fait avec l'esclave de Ménon était une activité du niveau le plus bas, avec du matériel concret, mais néanmoins c'était une telle activité qui contenait le germe de la déductivité. Le cours de Dina van Hiele affichait même les premiers signes d'une organisation logique. Plus loin, j'illustrerai l'organisation locale par des exemples. Je crois qu'il existe encore beaucoup de bons didacticiens qui considèrent que l'activité d'organisation locale de l'élève est indispensable et qui la préfèrent. En fait, en géométrie elle a une longue tradition, que peu de professeurs doivent connaître par leur propre expérience comme élèves. Il n'est pas juste de mesurer l'axiomatique d'Euclide avec un mètre moderne. Comme ouvrage d'ensemble les *Eléments* d'Euclide est un phénomène unique dans les mathématiques de l'Antiquité, mais sa méthode, plutôt que d'être uniforme, est celle de ses composantes. Bien avant Euclide, l'habitude semble s'être installée d'introduire un traité de mathématiques par un nombre de principes, qu'ils soient appelés axiomes, postulats, hypothèses, définitions, suppositions ou autre chose. Dans chaque cas particulier, il s'agit d'un ensemble d'affirmations qui sont épinglées en fonction du traité dans lequel elles sont employées, et il est tout à fait normal que des faits connus d'ailleurs soient utilisés sans être reformulés. De telles collections de principes existaient avant Euclide, au moins depuis Hippocrate sinon depuis l'époque de Thalès, des propositions concernant le rapport de surfaces circulaires, à partir desquelles on calculait l'aire de lunules, des propositions simples sur les symétries, desquelles on déduisait les plus compliquées. A un stade ultérieur, nous trouvons une cinématique céleste ou des calculs sur les dimensions et les distances des corps célestes, ou un traité sur les longueurs des courbes ou sur les lois des leviers introduites par de tels principes particuliers.

Euclide introduit les parties des mathématiques qu'il insère dans ses *Eléments* par les listes de principes qu'il a trouvés dans la littérature. Par ce procédé, les *Eléments* sont devenus une somme de parties de mathématiques organisées de façon logique, plutôt qu'une organisation logique des mathématiques. La faisabilité d'une organisation logique a pu vivre en ce temps-là comme vague idée philosophique, mais bien que les contributions d'Aristote à ce problème ne puissent être sous-estimées, il faut reconnaître que cette idée ne fut jamais réalisée dans l'Antiquité. Même la théorie des grandeurs d'Eudoxe, dans les cinquième et sixième livres d'Euclide, qui approche l'axiomatique moderne plus que tout le reste des mathématiques antiques, est incomplète en tant que système axiomatique des nombres réels, puisqu'elle décrit les grandeurs plus qu'elle ne les crée de façon autonome.

Pour arriver à une organisation globale et à une axiomatique de style moderne, un compilateur plus indépendant qu'Euclide aurait été nécessaire. L'idée de complétude d'un système axiomatique de la géométrie était sans doute bien au-delà de l'horizon des mathématiques grecques. En fait, la réalité géométrique était décrite, plutôt que créée par les

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

définitions, postulats, etc. et à chaque instant, la description était limitée aux aspects considérés comme essentiels dans ce problème particulier; s'il apparaissait qu'un aspect manquait, le recours à la réalité permettait de savoir comment le compléter. Bien que ceci fut de la déductivité rigoureuse, sa base était adaptable plutôt que préconçue. D'un point de vue psychologique, cette situation changea avec les *Eléments* d'Euclide; dans l'Antiquité, un travail autoritaire tel celui-ci était immédiatement canonisé. Euclide devint le trésor de la vérité et l'organisation des Eléments devint l'organisation correcte et indiscutable. Il n'y eut pas de critique constructive des *Eléments*; toute l'activité à leur sujet se résumait à des commentaires. Les *Eléments* n'étaient-ils pas un modèle de déductions rigoureuses à partir de principes bien définis ? Ce qui fut ensuite enseigné dans les manuels scolaires comme étant d'Euclide n'était qu'une forme diluée de la déductivité d'Euclide. Mais s'il y avait quelque chose à blâmer dans la logique de ce système, ce n'était pas l'idée d'organisation locale mais plutôt la prétention qu'un tel système (et Euclide lui-même) réalisait plus qu'une organisation locale.

Vers l'algèbre linéaire

Entre-temps, on avait appris à fonder la géométrie algébriquement. De l'algèbre déguisée existait déjà dans la géométrie grecque, et même de la géométrie aussi apparemment authentique que l'étude des coniques, était d'origine algébrique. A partir de Descartes, l'algèbre fut admise en géométrie, bien que le titre honorifique de vraie géométrie fût encore réservé à la méthode euclidienne. Cependant, plus la géométrie s'avérait incapable de rivaliser avec la plus grande fertilité de l'algèbre et de l'analyse, plus elle était négligée, et plus ses faiblesses devenaient apparentes, plus on était enclin à faire confiance à la géométrie analytique. Les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert ne pouvaient pas inverser cette tendance. Au contraire, ils montraient même plus clairement ce qui manquait dans Euclide et combien il était difficile de combler les lacunes. De plus, le résultat final de l'approche de Hilbert n'était-il pas la coordonnisation et l'algébrisation de la géométrie ? A quoi servaient alors ses efforts et pourquoi ne pas introduire la géométrie dès l'abord comme "géométrie analytique" ? Ceci a aussi le grand avantage de transférer automatiquement la complète rigueur de l'algèbre à la géométrie.

Vers l'espace vectoriel de l'algèbre linéaire

En "géométrie analytique" depuis Descartes, on avait appris à employer des systèmes de coordonnées, à décrire un point de l'espace par un triple de nombres, un plan par une équation linéaire entre les coordonnées, une droite par une paire de telles équations, à exprimer les distances à l'aide du théorème de Pythagore et les angles via les rapports goniométriques comme fonctions des coordonnées - une technique qui s'était avérée superbement utile en analyse et en mécanique.

N'était-ce pas une simplification évidente et bienvenue de *définir* les points *a priori* par des triples de nombres - ou si on préfère l'approche n-dimensionnelle, par des n-uples de nombres - de donner les plans et les hyperplans, *par définition*, par des équations linéaires, de poser la distance de deux points $\lceil \xi_1, \ldots, \xi_n \rceil$ et $\lceil \eta_1, \ldots, \eta_n \rceil$ *par définition* égale à

$$\sqrt{\sum_i (\xi_i - \eta_i)^2},$$

et, en général, de définir les figures géométriques et les relations par des équations entre les coordonnées ?

Le procédé devint encore plus attrayant après la géométrisation de l'algèbre à l'aide du concept de vecteur. Ceci créa, à la différence de la géométrie euclidienne, un calcul algébrique adapté à la géométrie. Comme être géométrique, le vecteur était désigné par une seule lettre 'x', il recevait dans un système de coordonnées des coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et était alors identifié à la suite ordonnée de ces coordonnées. Un n-uple ordonné de nombres

$$x = \lceil \xi_1, \ldots, \xi_n \rceil,$$

était alors appelé un vecteur; les vecteurs étaient multipliés par les scalaires

$$\alpha x = \lceil \alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n \rceil,$$

additionnés entre eux

$$\lceil \xi_1, \ldots, \xi_n \rceil + \lceil \eta_1, \ldots, \eta_n \rceil = \lceil \xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n \rceil,$$

et multipliés par le produit scalaire

$$x \cdot y = \sum \xi_i \eta_i,$$

et toutes ces opérations étaient géométriquement crédibles.
Cependant, cette méthode présentait une faiblesse. A la différence des points ou des vecteurs, les n-uples de nombres qui les représentaient n'étaient pas des objets géométriques puisqu'ils dépendaient d'un système de coordonnées sans signification géométrique. Il fallait tenir compte de cela; il fallait spécifier comment les coordonnées se transforment lors du passage d'un ancien système de coordonnées à un nouveau. Ceci était le complément inévitable du calcul vectoriel et tensoriel. Pour le compléter, une technique sophistiquée dut être développée. Dans les années vingt et trente, ceci dégénéra en un festival d'indices supérieurs et inférieurs, de montée et descente d'indices, etc.; des reliques fossiles de cette période peuvent encore être trouvées en physique, qui est fière de son conservatisme.

Le calcul vectoriel était un grand progrès, comparé à l'ancienne "géométrie analytique"; pour la génération d'universitaires qui commencèrent leurs études dans les années vingt, ce fut une révélation. L'impulsion pour approcher les vecteurs d'encore une autre façon ne vint cette fois pas de la géométrie, ou si elle vint de la géométrie, ce fut d'une façon détournée.

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Elle vint plutôt de l'analyse géométrisée, qui pour sa part avait été influencée par l'algèbre abstraite. Depuis le début du siècle, l'analyse était pénétrée par la géométrie - cela commença quand certains ensembles de fonctions furent appelés espaces fonctionnels. C'étaient des espaces infinidimensionnels. Leurs éléments pouvaient être interprétés comme des vecteurs, mais les méthodes de coordonnées de la géométrie vectorielle s'avéraient insuffisantes dans ce cas. L'axiomatique des espaces vectoriels, pour cette raison, débute avec les espaces vectoriels d'origine analytique; elle n'est transférée à la géométrie qu'au milieu des années trente. Ceci fut la naissance d'une méthode appelée aujourd'hui algèbre linéaire.

Un espace vectoriel V sur les nombres réels ou complexes ou sur un corps quelconque K est défini comme étant un groupe noté additivement, sur lequel les éléments de K agissent comme homomorphismes, donc avec les axiomes :

$$\left.\begin{array}{lcl}(a+b)+c & = & a+(b+c)\\ a+b & = & b+a\\ a+0 & = & 0+a\\ a+(-a) & = & 0\end{array}\right\}\quad \text{pour } a,b\in V$$

$$\left.\begin{array}{lcl}\gamma(a+b) & = & \gamma a+\gamma b\\ (\alpha+\beta)c & = & \alpha c+\beta c\\ \alpha(\beta c) & = & (\alpha\beta)c\\ 1\cdot a & = & a\end{array}\right\}\quad \text{pour } a,b,c\in V,\quad \alpha,\beta,\gamma\in K$$

La dépendance linéaire de sous-ensembles de V est alors définie, les concepts de base, de dimension - peut-être l'exposé est-il restreint à des espaces de dimension 2 et 3 -, de parallélisme, de sous-variétés linéaires, de plans, de demi-espaces, etc., sont définis.

Cet espace vectoriel est la couche inférieure de ce qui est habituellement appelé la géométrie affine, dont les concepts fondamentaux sont l'incidence et le parallélisme. Il n'y a aucun concept de distance dans cette géométrie; le maximum disponible dans ce sens est le rapport de segments de droites *parallèles.* Toutefois, on peut déterminer dans l'espace vectoriel de dimension n le rapport de volumes n-dimensionnels, c'est-à-dire définir axiomatiquement une fonction volume sur les n-uples de vecteurs, déterminée à un facteur de gauge près. Nous reviendrons sur ce point.

Sans doute n'est-il pas difficile d'écrire des axiomes comme ceux d'un espace vectoriel et d'amener les étudiants à en déduire mécaniquement des conséquences. Nos physiciens se plaindront rapidement de cette pratique s'il s'avère que, dans les esprits des étudiants, les concepts introduits de cette façon ne sont reliés à aucune réalité géométrique. Il est incroyable qu'établir ces liens soit souvent fort négligé. Cela ne requiert pas beaucoup de géométrie directe, mais pour certains, il semble que même cela soit trop. Ils s'empressent d'offrir à l'étudiant le modèle *algébrique* de l'espace vectoriel de dimension n sur K, formé des n-uples $[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ d'éléments de K avec les opérations mentionnées ci-dessus, mais entretemps, ils oublient le modèle *réaliste* bien plus important :

V consiste en les flèches tirées à partir d'un point o dans l'espace ordinaire. La flèche γa est γ fois plus longue que a, plus précisément $|\gamma|$ fois plus longue dans la même direction si $\gamma \geq 0$ et dans la direction opposée si $\gamma < 0$. Et $a+b$ est la flèche obtenue en transportant la flèche b, son origine coïncidant avec l'extrémité de la flèche a

$$a + b = b + a$$

exprime maintenant, pour a et b indépendants, une propriété bien connue du parallélogramme, alors que pour a et b dépendants, c'est évident (Fig. 46).

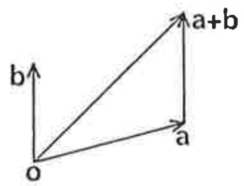

Fig. 46.

De la figure 47, on déduit que l'égalité

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

donne une indication sur le comportement d'un triangle transporté parallèlement :

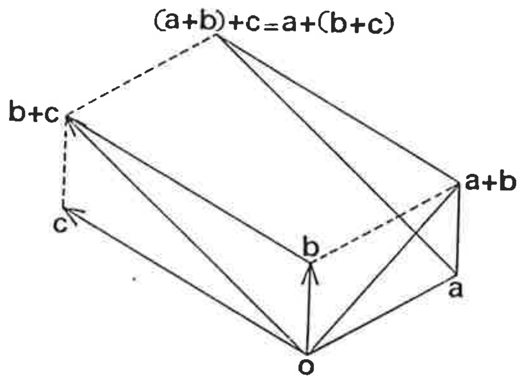

Fig. 47.

si deux côtés sont transportés par parallélisme d'un vecteur a, il en est de même du troisième. Les axiomes du second groupe, finalement, sont liés de façon évidente à des propriétés de similitude de la géométrie élémentaire.

La première conséquence non triviale des axiomes de l'espace vectoriel, qui est aussi la plus importante du point de vue géométrique, est le concept de volume. Dans un espace vectoriel de dimension n, une fonction de n vecteurs, appelée déterminant, est expliquée, dont la valeur

$$\det(a_1, \ldots, a_n)$$

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

pour les n vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ donne le volume "orienté" du parallélotope sous-tendu par $a_1, \ldots, a_n$ (après une certaine normalisation). Au moins depuis Kronecker, la relation entre déterminant et volume a été fondamentale dans l'enseignement des déterminants; cependant. pas mal de manuels modernes ne mentionnent même pas le mot volume. en traitant des déterminants, et presque tous introduisent les déterminants sans aucune motivation géométrique. Pour cette raison, je vais regarder de plus près la définition axiomatique du volume.

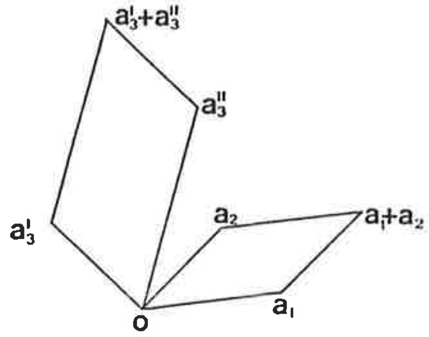

Fig. 48.

Une fonction F de n vecteurs devrait être définie de façon à satisfaire des postulats intuitifs raisonnables pour le volume; en fait, ce devrait être un volume "orienté" qui puisse aussi devenir négatif. Prenons un parallélotope sous-tendu par les vecteurs a_1, a_2, a_3 de l'espace de dimension 3; géométriquement, il est conseillé de calculer le volume comme étant le produit de l'aire du parallélogramme "de base" par la "hauteur"; les "hauteurs" devraient être comptées positivement d'un côté de la "base" et négativement de l'autre côté.

Bien sûr, la hauteur n'est pas une notion affine, mais cependant la hauteur est définie, si a_1 et a_2 sous-tendent le "plan de la base", alors la hauteur doit être une fonction linéaire de a_3 : si a_3 est remplacé par γa_3, alors la hauteur est multipliée par γ; si a_3 est remplacé par la somme $a'_3 + a''_3$, alors il doit en être de même pour les "hauteurs" correspondantes (voir Fig. 48). Ces arguments suggèrent de postuler :

(1) F est linéaire en chacune de ses variables.

Si deux des vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ coïncident, le parallélotope de ces vecteurs s'écroule. C'est pourquoi on postule :

(2) $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$ pour certains i, j avec $i \neq j$.

De ces deux postulats, on peut conclure :

Si

$$\begin{aligned} b_i &= a_i + a_j && \text{pour certains } i, j \text{ avec } i \neq j, \text{ et} \\ b_k &= a_k && \text{pour } k \neq i, \end{aligned}$$

alors.

$$\begin{aligned} F(b_1, \ldots, b_n) &= F(a_1, \ldots, a_n) + F(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \\ &= F(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Et de façon analogue, si

$$\begin{aligned} c_j &= b_j - b_i \\ c_k &= b_k \qquad\qquad \text{pour } k \neq j, \end{aligned}$$

alors

$$F(c_1, \ldots, c_n) = F(b_1, \ldots, b_n).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} c_i = -a_j, &\qquad c_j = a_i, \\ c_k = a_k &\qquad \text{pour } k \neq i, j. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$F(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = -F(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$$

d'où il découle facilement que :

(2') F est antisymétrique.

Les postulats (1, 2) ou (1, 2') sont complétés par une normalisation : après avoir choisi une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$, on pose :

(3) $F(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Il est alors prouvé par les méthodes usuelles qu'une fonction ayant les propriétés (1 à 3) existe et est déterminée de façon unique; c'est le déterminant det. En vertu de son introduction, elle peut être interprétée comme un volume orienté.

De l'unicité de la fonction det vérifiant (1 à 3), on peut déduire son comportement sous l'action de transformations linéaires de V :

A un facteur près dépendant de A, $\det(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ coïncide avec $\det(x_1, \ldots, x_n)$; ce facteur est appelé det A, donc

$$\det(Ax_1, \ldots, Ax_n) = \det A \cdot \det(x_1, \ldots, x_n),$$

où

$$\det A = \det(Ae_1, \ldots, Ae_n).$$

Les transformations linéaires de V de déterminant 1 laissent invariants les n-volumes. Dans un espace vectoriel réel V, les transformations linéaires de déterminant positif laissent invariant le signe du volume.

Cette dernière propriété est étroitement liée à ce qui est appelé l'orientation de l'espace de dimension n. Nous reviendrons sur ce point, mais nous anticipons la remarque que l'espace réel de dimension n est orienté en distinguant comme étant positif un certain n-uple ordonné $\lceil a_1, \ldots, a_n \rceil$ de vecteurs indépendants. Tout n-uple $\lceil b_1, \ldots, b_n \rceil$ est alors considéré comme étant positif (respectivement négatif) s'il existe une transformation linéaire de déterminant positif (respectivement négatif) qui envoie a_i sur b_i ($i = 1, \ldots, n$), après choix d'une base $e_1, \ldots, e_n$; en d'autres termes, les n-uples $\lceil b_1, \ldots, b_n \rceil$ sont dits positifs s'ils ont, en même temps que $\lceil a_1, \ldots, a_n \rceil$ un volume positif.

Ci-dessus nous avons identifié l'espace vectoriel de dimension n à l'espace de la géométrie affine. Ceci n'est pas entièrement justifié. Nous

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

attendons de l'espace de la géométrie affine qu'il soit homogène; l'espace vectoriel, toutefois, possède un point distingué o. Des méthodes assez compliquées ont été élaborées pour effacer cette tache de beauté; puisque la méthode simple pour faire ceci semble largement inconnue, nous allons l'expliquer.

Pour chaque espace vectoriel V de dimension n, il existe un espace affin E formé d'un ensemble E et d'un ensemble d'applications bijectives $P+$ de V sur E (c'est-à-dire une pour chaque $P \in E$) telles que

$$\begin{aligned} P+0 &= P \\ (P+x)+y &= P+(x+y) \text{ pour tous } x,y \in V. \end{aligned}$$

($P+$ peut être vu comme le fait d'attacher les vecteurs en P; l'extrémité du vecteur x attaché en P est $P+x$).

Par définition, pour $P,Q \in E$ donnés, il existe un $x \in V$ tel que $P+x=Q$; ce x est aussi désigné par $Q-P$.

Une application F de l'espace affin E dans l'espace affin E' est dite *affine*, si $FP-FP_0$ est linéaire en $P-P_0$ (pour P_0 fixé, mais alors c'est même vrai pour tout P_0).

Deux espaces affins E, E', associés au même espace vectoriel V, deviennent affinement équivalents si (après avoir choisi $P_0 \in E$, $P_0' \in E'$) on fait se correspondre P_0+x et $P_0'+x$.

Il faut noter que $Q-P$ a un sens pour $P,Q \in E$ bien que ce soit un élément de V plutôt que de E. Bien que $P+Q$ n'ait pas de sens pour $P,Q \in E$, on peut cependant donner un sens à certaines combinaisons linéaires d'éléments $P_0,\dots,P_k$ de E, à savoir :

$$\text{pour } \sum_0^k \alpha_i = 0: \qquad \sum_0^k \alpha_i P_i = \sum_0^k \alpha_i(P_i - Q) \in V;$$

$$\text{pour } \sum_0^k \alpha_i = 1: \qquad \sum_0^k \alpha_i P_i = Q + \sum_0^k \alpha_i(P_i - Q) \in E.$$

(On montre que ces expressions ne dépendent pas de Q; finalement, on peut poser $Q = P_0$).

En particulier, la seconde expression est géométriquement signifiante : avec $\sum \alpha_i = 1$, $\sum \alpha_i P_i$ est le centre de gravité des masses α_i en les points P_i.

Une telle définition ne devrait pas être donnée comme définition du centre de gravité sans avoir été raisonnablement motivée. Ceci peut se faire de la façon suivante :

Soit $\sum$ le système des

$$\lceil P_1,\dots,P_k;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k \rceil$$

avec $P_1,\dots,P_k \in E$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ réels et $\sum \alpha_i \neq 0$ ("α_i est une masse en P_i"). On définit

$$\lceil P_1,\dots,P_k;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k \rceil + \lceil Q_1,\dots,Q_l;\ \beta_1,\dots,\beta_l \rceil = \\ \lceil P_1,\dots,P_k;\ Q_1,\dots,Q_l;\ \alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_l \rceil$$

pour autant que $\sum \alpha_i + \sum \beta_j \neq 0$.
On postule l'existence dans $\sum$ d'une relation d'équivalence $\sim$ telle que

$$(\varphi \sim \varphi') \wedge (\psi \sim \psi') \rightarrow \varphi + \psi \sim \varphi' + \psi'$$

lorsque c'est défini. De plus :

$$\lceil P_0, P_1; \alpha_0, \alpha_1 \rceil \sim \lceil \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1} P_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1} P_1, \alpha_0 + \alpha_1 \rceil$$

ce qui est à nouveau intuitivement justifié.
On montre par induction qu'une telle relation d'équivalence, si elle existe, est unique et que

$$\lceil P_0, \ldots, P_k;\ \alpha_0, \ldots, \alpha_k \rceil \sim \lceil \frac{\alpha_0}{\alpha} P_0 + \ldots + \frac{\alpha_k}{\alpha} P_k;\ \alpha \rceil$$

avec $\alpha = \sum \alpha_i$.
Cette relation, en fait, engendre une équivalence.
A équivalence près, un système de masses de somme non nulle peut donc être remplacé par une masse unique en un seul point, le centre de gravité du sytème. Le cas général est ramené au remplacement de deux masses par une seule, qui est bien connu par la loi du levier et facilement motivé: le centre de gravité de deux masses divise le segment qui les joint dans le rapport inverse des masses.

La théorie du centre de gravité est étroitement liée à la théorie de la convexité. Les points

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 \quad \text{avec} \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

forment la *droite* P_0P_1; si de plus $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, c'est le *segment de droite* P_0P_1.
En général

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k \quad \text{avec} \quad \sum \alpha_i = 1$$

donne la *variété linéaire* engendrée par $P_0, P_1, \ldots, P_k$, alors que la restriction à des masses non négatives fournit *l'ensemble convexe* engendré par $P_0, P_1, \ldots, P_k$. Ici un ensemble est dit convexe, s'il contient le segment de droite joignant deux quelconques de ses points. Alors, en fait, de $\sum \alpha_i P_i (\alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1)$ et $\sum \beta_i P_i (\beta_i \geq 0, \sum \beta_i = 1)$, on obtient

$$\lambda_0 \sum \alpha_i P_i + \lambda_1 \sum \beta_i P_i,$$

qui pour tout $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ et $0 \leq \lambda_0,\ \lambda_1 \leq 1$ a la même forme

$$\sum \gamma_i P_i$$

avec $\gamma_i \geq 0$ et $\sum \gamma_i = 1$. De plus, on montre par induction que tout ensemble convexe contenant $P_0, P_1, \ldots, P_k$ contient aussi tous les

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k \quad \text{avec} \quad \sum \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0.$$

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Vers le produit scalaire

L'exposé ci-dessus avait pour but de montrer au lecteur combien de géométrie est contenue dans l'espace affin. Cependant des concepts essentiels de la géométrie élémentaire font encore défaut - le concept d'égalité et la comparaison de segments de droites et d'angles (ou plutôt la congruence de segments de droites et d'angles et la comparaison des longueurs de segments et de grandeur des angles). Si ces concepts doivent être appréhendés axiomatiquement, la structure d'espace vectoriel doit être complétée par une axiomatique, qui à nouveau vient de l'analyse, à savoir de l'espace de Hilbert.
Dans l'espace vectoriel réel V, on postule un produit scalaire défini positif à valeur réelle $(\ldots,\ldots)$, c'est-à-dire avec les propriétés :

$$\begin{aligned}(\alpha x, y) &= \alpha(x,y)\\ (x+y,z) &= (x,z)+(y,z)\\ (x,y) &= (y,x)\\ |x|^2 &= (x,x)>0 \quad \text{pour } x\neq 0.\end{aligned}$$

Ces postulats devraient à nouveau être motivés intuitivement. Ceci n'est pas si simple; cela requiert pas mal de connaissance géométrique.

On admet qu'intuitivement le produit scalaire (x,y) signifie : longueur de x multipliée par la projection (orientée) de y sur x. La symétrie du produit scalaire est alors facile à constater, si on se rappelle comment Euclide prouvait le théorème de Pythagore (Fig. 49).

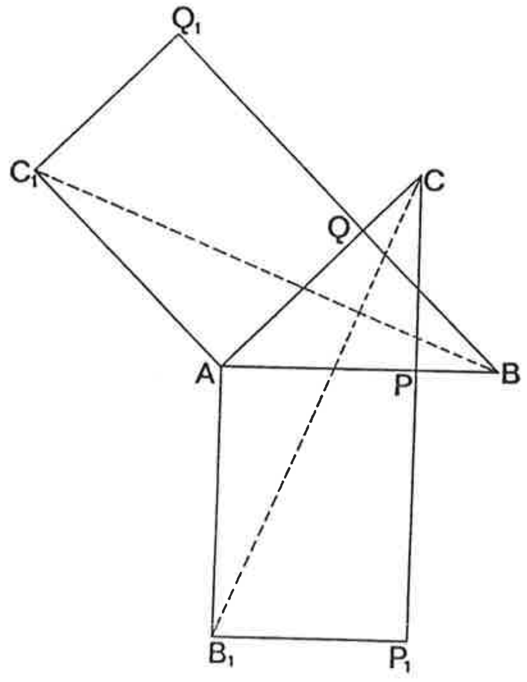

Fig. 49.

Les rectangles APP_1B_1 (avec $AB = AB_1$) et AQQ_1C_1 (avec $AC = AC_1$) sont d'aire égale à cause de la congruence des triangles ABC_1 et

AB_1C. Toutefois, on peut aussi le prouver par la similitude des triangles APC et AQB.

Le second axiome du produit scalaire requiert aussi une justification géométrique. Appelons $\pi(a)$ la projection du vecteur a sur une direction fixée z; alors

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$$

doit être prouvé, ou de façon équivalente

$$\pi(\frac{1}{2}(a+b)) = \frac{1}{2}(\pi(a)+\pi(b)),$$

c'est-à-dire, si des segments de droites sont projetés sur une droite, alors les milieux sont envoyés sur les milieux. Ou, plus généralement, si P se déplace de façon uniforme sur la droite $P'P"$, alors sa projection sur la droite $Q'Q"$ fait de même. Ou, de façon équivalente, des plans parallèles découpent sur deux droites $P'P"$ et $Q'Q"$ des segments proportionnels. A l'aide d'une droite auxiliaire qui coupe $P'P"$ et $Q'Q"$, on se ramène au cas particulier de droites sécantes (voir Fig. 50).

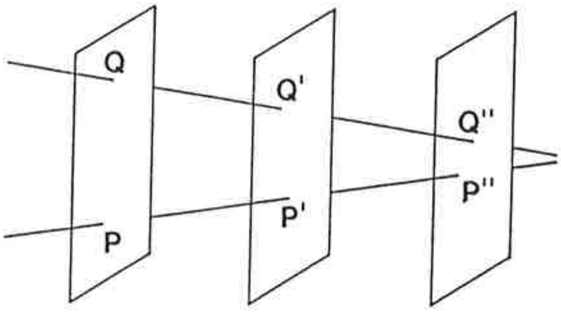

Fig. 50.

Contre l'espace vectoriel avec un produit scalaire comme couche de base de la géométrie euclidienne, on peut élever la même objection que dans le cas affin : le rôle exceptionnel injustifié de l'origine. On peut la supprimer aussi facilement que dans le cas affin : un espace affin est attaché à l'espace vectoriel et le résultat est appelé espace euclidien. Dans cet espace, la distance a un sens, à savoir $|P-Q|$ est par définition la distance de P et Q; on peut aussi mesurer les angles de droites, comme on l'expliquera plus tard.

Il y a cependant une objection plus sérieuse contre cet "espace euclidien" comme substrat de la géométrie euclidienne. La géométrie euclidienne, telle qu'elle était comprise depuis Euclide jusqu'à récemment, ne connaissait pas les notions comme la longueur des vecteurs et la distance; aucune proposition de géométrie euclidienne ne parle de points dont la distance est 3. Ce qui importe en géométrie euclidienne est l'égalité et la comparaison des distances. Jusqu'à il y a quelques décennies, personne n'aurait considéré comme étant de la géométrie, une proposition disant qu'un segment de droite avait une certaine longueur numérique, même si une unité de mesure avait été ajoutée. C'est devenu une habitude non controversée d'appeler un espace avec un produit scalaire et

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

une longueur un espace euclidien. Sans aucun doute le produit scalaire est un outil utile. Ce qui me dérange est une certaine absence de critique quant à savoir si cet outil est accepté comme moyen de décrire l'espace euclidien. Il faudrait reconnaître et les étudiants devraient comprendre que ce dispositif algébrique comprend un élément agéométrique; que ce dénommé espace euclidien peut être imposé comme modèle au monde physique seulement après qu'une unité de longueur a été choisie - dans l'ancien espace euclidien, ceci n'était pas nécessaire parce qu'il n'impliquait pas de longueurs absolues. De plus, il faudrait dire clairement que le choix de l'unité de longueur ne préjuge pas des effets du modèle - les propositions authentiquement géométriques se reflètent toujours de la même façon dans le monde physique, quelle que soit l'unité de longueur choisie. Ceci repose sur le fait que le "vrai" espace euclidien admet comme groupe d'automorphismes les similitudes (c'est-à-dire les tranformations qui conservent le rapport des distances), alors que dans le "nouvel" espace euclidien les autométrismes (c'est-à-dire les transformations qui conservent les distances) sont les seuls automorphismes. Je n'objecte pas vraiment contre le changement de terminologie; ce qui me dérange est que si peu de personnes ont été conscientes du changement.
Après cette digression, nous nous tournons vers les conséquences géométriques du système axiomatique. Les axiomes permettent la définition de la longueur d'un vecteur $|x| = \sqrt{(x,x)}$, donc de la distance, et aussi de l'orthogonalité, $(x, y) = 0$, de 2 vecteurs x et y. Deux ensembles, en particulier deux sous-espaces linéaires de V, sont dits orthogonaux s'ils sont orthogonaux élément à élément. Le complément orthogonal $W^\perp$ de W est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à W. Les faits suivants sont à présent tout à fait évidents :

A_m : Etant donné un sous-espace linéaire propre W de V, de dimension m (finie), alors $W^\perp$ n'est pas réduit à 0.

B_m : Un espace vectoriel de dimension m avec un produit scalaire possède une base orthonormée $e_1, \ldots, e_m$, c'est-à-dire une base telle que $(e_i, e_j) = 1$ si $i = j$ et $(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Aussi longtemps qu'on se restreint à la dimension 3, les démonstrations ne présentent aucune difficulté. Dans le cas général, elles requièrent des inductions, à savoir

$$B_m \to A_m \quad \text{et} \quad B_m \wedge A_m \to B_{m+1}$$

Pour prouver $B_m \to A_m$, on suppose que B_m est vérifié par rapport à W, ce qui fournit une base orthonormée $e_1, \ldots, e_m$ de W. A l'extérieur de W, il existe $a \in V$ avec lequel on forme

$$b = a - (a, e_1)e_1 - \ldots - (a, e_m)e_m$$

Puisque $(b, a_i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a $b \in W^\perp$, et d'autre part $b \neq 0$.

Pour prouver $B_m \wedge A_m \to B_{m+1}$ dans un certain V de dimension $m+1$, on considère un sous-espace W de dimension m, et dans W, une base orthonormée $e_1, \ldots, e_m$; de plus, d'après A_m, on trouve un $b \neq 0$ dans $W^\perp$; on le remplace par $e_{m+1} = (1/|b|)b$ et on l'ajoute à la base de W.

Si l'espace vectoriel de dimension n avec un produit scalaire est muni de coordonnées par rapport à une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$, le lien avec l'ancienne géométrie analytique est rétabli : pour les vecteurs $x = \sum \xi_i e_i$ et $y = \sum \eta_i e_i$ on a $(x, y) = \sum \xi_i \eta_i$ et $(x, x) = \sum \xi_i^2$.

Dans l'espace vectoriel, muni d'un produit scalaire, le volume absolu peut être normé de façon naturelle : choisissons une base orthonormée ordonnée $\lceil e_1, \ldots, e_n \rceil$ et posons son volume égal à 1. Pour justifier ceci, il faut montrer que le choix de la base ne joue pas un rôle essentiel. En effet, si une base orthonormée ordonnée est de volume 1, toute autre est de volume ± 1. Ceci n'est pas facile à démontrer. On peut le faire de la façon suivante.

Considérons d'abord les autométrismes de l'espace euclidien, c'est-à-dire les transformations qui conservent la distance. Il y a d'abord les translations T_a, définies par $T_a P = P + a$. A une translation près, tout autométrisme peut être remplacé par un autre qui conserve un certain point P_0. Le nouvel autométrisme peut alors être interprété comme agissant sur l'espace vectoriel V. Soit A cet autométrisme. Alors $|Ax - Ay| = |x - y|$ pour tous $x, y \in V$, d'où

$$(Ax - Ay, Ax - Ay) = (x - y, x - y),$$

et avec $x = 0$ ou $y = 0$, aussi

$$(Ax, Ax) = (x, x), \qquad (Ay, Ay) = (y, y).$$

De ceci, il résulte

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \text{pour tous} \quad x, y \in V,$$

d'où l'invariance du produit scalaire. A doit être linéaire. En effet, de

$$\begin{aligned} (A(x_1 + x_2), Ay) &= (x_1 + x_2, y) \\ (Ax_1, Ay) &= (x_1, y) \\ (Ax_2, Ay) &= (x_2, y) \end{aligned}$$

il résulte

$$(A(x_1 + x_2) - Ax_1 - Ax_2, Ay) = 0$$

pour tout y; comme Ay parcourt aussi tout V,

$$A(x_1 + x_2) - Ax_1 - Ax_2$$

est orthogonal à V, donc est nul.

Les transformations (linéaires) de V qui conservent le produit scalaire sont dites *orthogonales*. Elles envoient une base orthonormée sur une base orthonormée; réciproquement, si deux bases orthonormées sont données, il existe une transformation orthogonale qui applique l'une sur l'autre.

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

Les transformations orthogonales A sont caractérisées par $AA' = 1$, où A' est l'adjointe de A. Pour en déduire que le déterminant de A orthogonale est ± 1, il faut savoir que det A = det A' (et ceci n'est pas si simple pour n quelconque, bien que pour $n = 2, 3$, ce soit facile à vérifier). Néanmoins, toutes les bases orthonormées ont le volume ± 1. Pour fixer le volume dans V, on doit attribuer un volume positif à une base orthonormée particulière, en d'autres termes V, et par conséquent E, doit être orienté. Très souvent, l'espace euclidien orienté, plutôt que non orienté, est requis, en particulier en physique. Par exemple, le produit vectoriel de deux vecteurs peut être défini seulement dans l'espace euclidien orienté (de dimension 3). On peut le faire de la façon suivante :

On prouve d'abord :

Soit f une forme linéaire sur V (dim $V = n$); alors il existe un et seul $u \in V$ tel que

$$f(x) = (u, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in V.$$

La preuve se déroule comme suit : si $f(x) = 0$ pour tout $x \in V$, alors on prend $u = 0$. Sinon, on définit

$$W = \{x \in V \mid f(x) = 0\}.$$

Soit $v \in W^{\perp}$, $v \neq 0$; on pose

$$u = (f(v)/(v, v))v.$$

De plus, de $(u, x) = (u', x)$ pour tout x, il résulte que $(u - u', x) = 0$ d'où $u = u'$.

Ensuite, dans l'espace vectoriel orienté V de dimension 3 avec un produit scalaire, $\det(a, b, x)$ est linéaire en x. Donc il existe $u \in V$ tel que

$$\det(a, b, x) = (u, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in V.$$

Le vecteur u qui est univoquement déterminé par a, b est par définition le produit vectoriel de a et b,

$$[a, b]$$

Donc $\det(a, b, x) = ([a, b], x)$.

Les propriétés suivantes de $[a, b]$ sont immédiates :

(1) $[a, b]$ est linéaire en a et b

(2) $[a, b]$ est orthogonal à a et à b

(3) $[a, b] = 0$ ssi a, b sont linéairement dépendants

(4) $[a, b] + [b, a] = 0$

En remplaçant x par $[a, b]$ on obtient

$$\det(a, b, [a, b]) = |[ab]|^2$$

Si le premier membre est interprété comme étant le volume d'un prisme droit ayant comme base le parallélogramme engendré par a, b et comme hauteur la longueur $|[a, b]|$, alors il résulte clairement de cette formule et de la géométrie que l'aire du parallélogramme de base doit être $|[a,b]|$. Ainsi, dans le cadre de la théorie que nous développons, nous sommes amenés à *définir* l'aire du parallélogramme a, b, dans l'espace vectoriel orienté V avec un produit scalaire, par $|[a,b]|$.

Si a et b sont restreints à un plan de V, alors $[\ldots,\ldots]$ est un multiple scalaire γc d'un vecteur c fixé, et le facteur γ est en fait une fonction volume avec les propriétés postulées de façon axiomatique.

La dépendance du produit vectoriel de l'orientation de l'espace est évidente : si on change l'orientation, alors $\det(a,b,x)$ et donc $[a,b]$ est multiplié par -1.
En termes de coordonnées par rapport à une base orthonormée, si

$$\begin{aligned} a &= \lceil \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rceil \\ b &= \lceil \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rceil \\ ax &= \lceil \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rceil \end{aligned}$$

alors de

$$\det(a,b,x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \xi_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \xi_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

il résulte

$$[a,b] = \left\lceil \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \right\rceil .$$

Dans l'ancienne géométrie analytique, ceci était utilisé pour définir le produit vectoriel. Les avantages de l'approche moderne plus abstraite sont évidents. Ils sont cependant perdus si les aspects géométriques sont négligés.

Le concept d'angle dans l'espace vectoriel

Parmi les concepts essentiels de la géométrie élémentaire, nous avons épinglé ceux d'égalité de segments de droites et d'angles. Dans cet exposé d'algèbre linéaire, nous n'avons pas encore mentionné les angles. Nous abordons maintenant ce sujet. Nous avons placé le produit scalaire en géométrie élémentaire par la relation (x,y) = longueur de x multipliée par la projection orientée de y sur x. Dans le cadre de la géométrie élémentaire, nous pouvons à présent exprimer ceci de façon symétrique :
(x,y) = longueur de x fois longueur de y fois $\cos \measuredangle \lceil x,y \rceil$.

Ceci justifie la définition

$$\cos \measuredangle\, x,y = (x,y)/|x| \cdot |y|$$

ou si on se restreint à des vecteurs x, y unitaires :

$$\cos \measuredangle\, x,y = (x,y).$$

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

Ceci définit le cosinus de l'angle $\sphericalangle\, x, y$ plutôt que l'angle lui-même; pour obtenir l'angle, la connaissance de la fonction cosinus, par exemple de l'analyse, est requise. En l'inversant, on obtient

$$\sphericalangle\, x, y = \text{arc}\cos(x, y),$$

qui devrait être normée telle que

$$0 \leq \sphericalangle\, x, y \leq \pi.$$

Ceci est en fait le concept d'angle de la géométrie euclidienne classique (bien qu'Euclide n'admît pas les angles nuls ou plats). Le concept d'angle de la trigonométrie est plus raffiné (nous traiterons de l'angle en général plus tard).
Toutefois, ce concept d'angle raffiné n'est possible que dans un plan orienté. Là, on convient de calculer l'angle d'une paire ordonnée de vecteurs $\lceil x, y \rceil$ par

$$\begin{array}{l} \sphericalangle\, \lceil x, y \rceil = \text{arc}\cos(x, y) \\ -\pi < \sphericalangle\, \lceil x, y \rceil \leq \pi \\ \sphericalangle\, \lceil x, y \rceil > 0 \text{ or } < 0 \end{array}$$

selon que $\lceil x, y \rceil$ satisfait l'orientation positive ou négative du plan.
Plutôt qu'un nombre compris entre $-\pi$ et π, l'angle est aussi compris comme un nombre réel mod 2π. J'ai supposé que l'étudiant connaissait les fonctions goniométriques; ce sont de magnifiques exemples de graphiques faciles à construire, et la fonction sinus est utilisée en physique assez tôt. Peut-être l'étudiant n'a-t-il pas encore rencontré les théorèmes d'addition des fonctions goniométriques, mais dans ce cas, elles se démontrent à présent facilement comme suit :

considérons dans le plan une rotation d'angle ϕ autour de l'origine; les images des vecteurs de base fournissent la représentation matricielle :

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}$$

Si deux rotations d'angles ϕ_1 et ϕ_2 sont effectuées successivement, on obtient une rotation d'angles $\phi_1 + \phi_2$ donc

$$D_{\phi_1} D_{\phi_2} = D_{\phi_1+\phi_2}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix}.$$

Les rotations forment un groupe Δ; dans le produit matriciel, les théorèmes d'addition de sinus et cosinus apparaissent et d'autres sont facilement démontrés à partir de ceux-là.

Si l'étudiant connaît les nombres complexes, ceci peut être rendu plus évident (ou ce sujet est repris, quand arrivent les nombres complexes). Comme d'habitude, les nombres complexes sont représentés géométriquement dans le plan, avec le module comme distance à l'origine, d'après le théorème de Pythagore, et la conjugaison comme symétrie par rapport à l'axe des réels. De $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$ et $|\beta|^2 = \beta\overline{\beta}$, il résulte $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. Si le substrat géométrique des nombres complexes est interprété comme un espace linéaire réel de dimension 2 de base 1, i, alors la multiplication par $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ est une transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha' & -\alpha'' \\ \alpha'' & \alpha' \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $|\alpha|^2$. Si $|\alpha| = 1$, alors la multiplication conserve les distances et son déterminant est 1. De cette façon, les rotations autour de 0 peuvent être interprétées comme les multiplications par les nombres complexes de module 1. Le groupe multiplicatif de ces nombres, noté E précédemment, peut par conséquent être identifié au groupe des rotations Δ; plus précisément, la rotation D d'angle ϕ est identifiée à la multiplication par $\cos\phi + i\sin\phi$. L'axiome du rapporteur nous avait donné un isomorphisme ω du groupe multiplicatif E des nombres complexes de module 1 sur le groupe additif des nombres réels mod 2π; on peut maintenant identifier ω^{-1} avec[4] $\pitchfork_{\phi}(\cos\phi + i\sin\phi)$, donc

$$\cos\phi = \mathrm{Re}\,\omega^{-1}(\phi) \quad , \quad \sin\phi = \mathrm{J}\,\omega^{-1}(\phi)$$

La règle d'addition des sinus et cosinus peut maintenant être déduite de la propriété d'homomorphisme de ω^{-1}

$$\omega^{-1}(\phi_1 + \phi_2) = \omega^{-1}(\phi_1) \cdot \omega^{-1}(\phi_2)$$

en calculant

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1 + \phi_2) &= \mathrm{Re}\,\omega^{-1}(\phi_1 + \phi_2) = \mathrm{Re}\,(\omega^{-1}(\phi_1)\omega^{-1}(\phi_2)) \\ &= \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2. \end{aligned}$$

Révision du concept d'angle dans l'espace vectoriel

Pour cette incorporation du concept d'angle dans l'algèbre linéaire, une assez grande quantité de connaissance géométrique est requise, en particulier le concept trigonométrique d'angle et les fonctions goniométriques sont supposés connus. Mais la pilule est amère si, ayant entrepris de construire la géométrie comme algèbre linéaire, vous devez emprunter des chemins transcendants pour trouver les angles. La pilule peut cependant être adoucie et la transcendance peut être poussée dans un coin. Bien qu'on sache que les rotations planes autour de l'origine peuvent être représentées dans une base orthonormée par les matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

[4]Freudenthal note ainsi l'application $\phi \to \cos\phi + i\sin\phi$

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

on convient maintenant de l'oublier et de se comporter comme si les sinus et cosinus n'étaient jamais apparus. Ceci se fait comme suit. Le groupe Δ des rotations autour de O est défini *a priori*, c'est-à-dire comme le groupe des transformations qui préservent la distance, l'aire et l'origine. Il est facile de calculer que, dans une base orthonormée, ce sont les

$$\begin{pmatrix} \alpha' & -\alpha'' \\ \alpha'' & \alpha' \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

Le groupe Δ étant commutatif, on décide de l'écrire additivement, c'est-à-dire que Δ est envoyé par un isomorphisme sur un groupe additif W, défini de façon purement formelle. A chaque $\phi \in W$ est associée une et une seule rotation D_ϕ et ϕ est appelé l'angle de la rotation. Et par définition,

$$D_{\phi_1} D_{\phi_2} = D_{\phi_1+\phi_2}$$

Dans la représentation matricielle

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \alpha' & -\alpha'' \\ \alpha'' & \alpha' \end{pmatrix},$$

ϕ détermine les nombres α', α'', qui sont aussi désignés par $\cos\phi$ et $\sin\phi$.

Il résulte de la représentation matricielle de D_ϕ, que pour tout vecteur $\lceil \alpha', \alpha'' \rceil$ de longueur 1, il existe une rotation qui applique $\lceil 1, 0 \rceil$ sur $\lceil \alpha', \alpha'' \rceil$, à savoir

$$\begin{pmatrix} \alpha' & -\alpha'' \\ \alpha'' & \alpha' \end{pmatrix}.$$

Pour deux vecteurs quelconques a, b de longueur 1, il existe aussi une rotation D_ϕ appliquant a sur b, alors par définition ϕ est l'angle de a, b :

$$\phi = \sphericalangle \lceil a, b \rceil$$

si

$$b = D_\phi a.$$

De plus, avec trois vecteurs unitaires a, b, c et

$$\sphericalangle (a, b) = \phi \qquad \sphericalangle (b, c) = \psi$$

par définition,

$$D_\phi a = b, \qquad D_\psi b = c,$$

d'où

$$D_{\phi+\psi} a = D_\phi D_\psi a = c,$$

donc

$$\sphericalangle (a, c) = \phi + \psi,$$

c'est-à-dire l'additivité des angles.

Ou la même chose sur un mode plus concret : W n'est pas défini formellement comme un groupe additif isomorphe à Δ, mais au lieu de cela, l'ensemble des paires ordonnées de vecteurs unitaires est introduit *avec la relation d'équivalence*

$$\lceil a, b \rceil \sim \lceil a', b' \rceil$$

si et seulement s'il existe une rotation appliquant a sur a' et b sur b', et avec l'addition

$$\lceil a, b \rceil + \lceil b, c \rceil = \lceil a, c \rceil$$

Maintenant W est l'ensemble des classes d'équivalence avec l'addition induite. On montre que W et Δ sont isomorphes.

A partir d'ici, un chemin conduit aux nombres complexes. Les vecteurs unitaires, considérés comme nombres complexes de module 1, forment un groupe multiplicatif isomorphe à E. Aucun outil "transcendant" tel l'axiome du rapporteur n'est introduit pour justifier E et son isomorphisme avec W, aucune application spécifique de E sur le groupe additif des réels mod 2π n'est introduite. Au lieu de cela, un groupe additif W isomorphe au groupe multiplicatif E est défini de façon purement formelle et sans relation avec les nombres réels. La transcendance est vraiment poussée dans le coin. Les angles sont conçus algébriquement - les angles sont des rotations, qui dans les calculs sont écrits additivement au lieu de multiplicativement. Bien sûr, ceci n'est pas l'angle élémentaire qui est mesuré par les nombres réels; un angle n'est pas un nombre mais un élément d'un groupe commutatif vaguement connu. Si finalement, par exemple à l'aide de l'axiome du rapporteur, la mesure des angles par les réels est ajoutée à cette théorie, alors de toute façon, l'étape "transcendante" aura été retardée autant que possible.

Pour incorporer le concept d'angle dans l'algèbre linéaire, j'ai commencé mon schéma en supposant une familiarité avec le concept d'angle et les fonctions goniométriques; les rotations ont été traitées comme une conséquence et les nombres complexes ont peut-être été utilisés comme outil. Ensuite, j'ai expliqué comment ceci serait réorganisé par un mathématicien n'aimant pas le goût amer de la transcendance. Ceci est en fait une réorganisation élégante du sujet, qui ouvre de vastes perspectives. Si l'élève peut être persuadé de tenter cette réorganisation, c'est un sujet d'étude légitime (pour autant qu'il ne soit pas enseigné au détriment de sujets plus importants). Bien sûr, l'élève doit être motivé pour réorganiser. C'est lui qui doit sentir le goût amer des arguments transcendants (et avant lui, le professeur qui enseigne ce sujet devrait aussi l'avoir senti). Lui-même devrait avoir éprouvé le besoin de pousser la transcendance dans un coin et pour ce faire, il devrait avoir compris la transcendance. Les logarithmes, sinus et cosinus sont pour lui très concrets, du moins s'il a bénéficié d'une bonne instruction, et bien que moi-même, je sache que "concret" et "transcendant" ne sont pas opposés, je ne puis être sûr que l'élève le sache. Une réorganisation est seulement possible et ne doit être préconisée que si l'élève dispose des moyens de réorganiser et une certaine organisation doit évidemment précéder une réorganisation.

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Alors, pour être capable de les redéfinir, l'élève doit oublier ce que sont les angles et les fonctions goniométriques. Si l'élève a déjà une certaine expérience d'organisation globale, il peut être capable de comprendre ceci. Sinon, il ressentira ceci comme une castration. Evidemment, ceci est une vue erronée. Peut-être "schizophrénie" convient-il mieux; comme mathématiciens, nous avons l'habitude de diviser notre personnalité, et peut-être aimons-nous cela, interdire à la main gauche de savoir ce que fait la main droite. Malheureusement, nous supposons que cette attitude est familière à quiconque va étudier les mathématiques, ou du moins, que quiconque à qui ce truc est montré va l'apprendre et l'aimer. Il y a vraiment pas mal d'auteurs de manuels qui supposent ceci. Dans mon expérience, cette hypothèse est au plus vérifiée au sujet de mathématiciens typiques (mais pas au sujet de tous); beaucoup d'étudiants en physique qui étudient la mathématique pour l'employer ne peuvent apprécier cette attitude.

J'ai affirmé que, du point de vue didactique, il n'est pas important qu'un concept d'angle transcendant en algèbre linéaire soit ou non une pilule amère pour l'auteur du manuel, ce qui est plus important est comment l'utilisateur du manuel le ressent. J'approuverais la réorganisation si l'élève était capable de l'effectuer. Bien sûr, ceci n'est pas le point de vue des mathématiciens universitaires, qui exigent que de telles choses soient enseignées par le professeur. Un professeur dans sa classe peut, en fait, obliger ses élèves à ressentir un concept d'angle transcendant en algèbre linéaire comme une pilule amère ou comme un signe de mauvais goût, à tout oublier à propos des angles et des fonctions goniométriques, à écrire le groupe multiplicatif des rotations de façon additive et à appeler angles le résultat, à former des sinus et cosinus de ces angles qu'ils ne peuvent absolument pas confondre avec les sinus et cosinus qu'ils connaissent déjà. Un élève obéissant sera récompensé généreusement. Après ce jeu de colin-maillard dans lequel il a été conduit aveuglément autour de tant de coins et lorsque le bandeau est retiré, il est alors autorisé à être ébloui par le grand miracle de l'incorporation du concept d'angle dans l'algèbre linéaire.

Ceci est cependant une mathématique que, personnellement, je trouve sans valeur, et il ne faut pas s'étonner de ce que les jeunes étudiants en viennent à haïr ce genre de mathématique.

Il y a même pire avec ce genre de méthode. Pour satisfaire un caprice, le concept d'angle est détaché de son origine et de ses applications, en particulier si le pas "transcendant" vers la mesure réelle de l'angle n'est pas franchi. La mesure réelle de l'angle, comme indiquée sur un rapporteur et sur un cadran, appartient aux concepts fondamentaux de la géométrie intuitive et aux outils indispensables de la géométrie appliquée, depuis les dessins sur papier jusqu'à la surveillance de l'univers et l'usage d'une table de fonctions goniométriques. Les auteurs de manuels modernes essaient de l'éviter. Ceci est dit le plus clairement par Dieudonné [5]. Le groupe des rotations est noté additivement, non parce que les angles usuels sont additifs, mais seulement par commodité, dit-il (p. 111). Et après avoir expliqué les règles d'addition et les formules connexes de trigonométrie, il déclare (p. 114): "Et ceci est tout ce qu'on peut légitimement connaître de ce qui était auparavant appelé la trigonométrie". Bien sûr, Dieudonné sait mieux que quiconque que ceci n'est pas vrai. Le groupe des rotations est noté additivement parce que les angles ont été et, pour de bonnes raisons, sont encore mesurés additivement, et considérer les sinus et cosinus comme des fonctions réelles contribue plus à comprendre et à appliquer les mathématiques que toutes les sornettes qu'un mathématicien peut mettre dans les oreilles de quelqu'un. Bien sûr Dieudonné sait que les fonctions trigonométriques sont rencontrées à chaque pas en analyse, en science et en technique (p. 161), mais néanmoins, il prétend que ceci ne concerne que les astronomes, les géomètres experts et les auteurs de manuels de trigonométrie.

Néanmoins, Dieudonné peut même justifier son affirmation comme quoi "ceci est tout ce qu'on peut légitimement connaître de ce qui était auparavant appelé la trigonométrie" parce qu'il a basé sa propre géométrie sur des axiomes qui "ne permettent pas de démontrer l'existence de cette mesure" (la mesure additive des angles) (p. 19). Croirez-vous qu'avec de tels abus l'axiomatique puisse être popularisée ?

L'algèbre linéaire en tant que géométrie

J'ai montré comment, pour se débarrasser de la géométrie, les gens ont de plus en plus pris l'habitude d'approcher la géométrie "de façon analytique", et comment ceci a conduit au calcul vectoriel et finalement, via la géométrisation de l'analyse et de l'algèbre, à l'algèbre linéaire. Aujourd'hui, c'est une idée familière que la géométrie est tombée en désuétude à cause de l'algèbre linéaire ou que la géométrie est identique à l'algèbre linéaire [6]. Devinez ce que ceci signifie ! C'est de l'algèbre linéaire, mais - ô combien démodé - sur le champ des réels et des complexes. Clairement, l'auteur était honteux de ceci et pour le camoufler, il inventa le terme géométrie topologique; en effet, les champs mentionnés sont des champs topologiques. Ceci est une interprétation ridicule comme il est clairement prouvé par tous les manuels sur le sujet. J'ai montré avec beaucoup de détails combien de géométrie est mêlée à l'algèbre linéaire et comment l'employer pour motiver l'enseignement de l'algèbre linéaire. Bien que je n'aie pas exposé combien l'algèbre linéaire est importante, je voudrais mentionner des sujets auxquels elle devrait au moins être reliée, à savoir les équations différentielles linéaires et les processus stochastiques. Beaucoup d'auteurs de manuels, jusqu'au niveau universitaire, semblent non familiers avec ces connexions. Ils ne savent pas comment l'algèbre linéaire s'applique, et pour néanmoins appliquer l'algèbre

[5] J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Paris, Hermann, 1964.

[6] L'algèbre linéaire est souvent appelée géométrie aujourd'hui. Un exemple extrême est un livre intitulé *Géométrie topologique*

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

linéaire, ils condamnent la géométrie à être la victime. La seule tâche qui conviendrait à la géométrie dans ce contexte, à savoir comme moyen de motivation, est rejetée comme étant une obligation trop vague.

Il y a quelques temps, j'ai participé à une conférence sur l'enseignement de la géométrie. Si j'analyse les résultats, je suis frappé par le fait que fort peu fut dit sur l'enseignement de la géométrie et beaucoup fut dit sur l'enseignement des fondements de la géométrie, c'est-à-dire sur l'organisation axiomatique globale, et bien sûr des préfabriqués. Seule une petite minorité défendait l'idée que cela vaut la peine d'enseigner la géométrie et qu'un enseignement des fondements de la géométrie devrait être précédé d'un enseignement de la géométrie elle-même. Il n'était sans doute jamais apparu à la majorité des personnes présentes que la géométrie pourrait et devrait être enseignée d'une façon moins sophistiquée - donc elles ne se souciaient simplement pas de telles approches.

Il ne fait pas de doute que l'algèbre linéaire est une méthode appropriée pour fournir un système de géométrie, quelque restreint ce système soit-il. Ceci est alors habituellement la forme sous laquelle l'algèbre linéaire est offerte comme géométrie. C'est un pieux mensonge. Dans la mesure où l'algèbre linéaire est offerte comme géométrie, elle est imposée à l'élève et, dans la mesure où l'élève peut être actif en algèbre linéaire (c'est-à-dire dans les problèmes), c'est un bouillon sans saveur dans lequel flottent des morceaux coagulés qui sont loin de la géométrie. La géométrie est autorisée jusqu'où s'étend la méthode de l'algèbre linéaire et ce petit peu est moulu et dilué indéfiniment. Les vieilles constructions de triangles étaient sûrement bêtes; les soi-disant problèmes de géométrie de l'algèbre linéaire ne le sont pas moins; de plus, ils sont écœurants.

L'erreur fondamentale est que la géométrie est subordonnée à un système des mathématiques. Le seul endroit où elle peut être placée est dans l'algèbre linéaire et là, elle est bien accueillie seulement parce que ceci est un moyen de faire croire que l'algèbre linéaire qui est enseignée a quelque utilité. Combien de géométrie est enseignée et de quelle façon dépend seulement de comment elle s'intègre dans le système. Ceci signifie qu'on commence par la géométrie affine et que l'aspect le plus frappant de l'espace, je veux dire l'ajustage, est négligé. Encore plus grave, avec une telle approche rigide, aucune possibilité n'est laissée aux enfants d'explorer l'espace et ses solides, d'organiser la matière ou d'inventer des définitions et des déductions. De la liste de problèmes que j'ai tenté de dresser, aucun ne peut s'intégrer de façon sensée dans un tel système. Peut-être pouvez-vous calculer l'intersection d'une sphère et d'un plan ou de deux sphères par l'algèbre linéaire, mais pour découvrir si l'intersection est un cercle vous devez savoir ce qu'est une vraie sphère dans l'espace réel. Bien sûr vous pouvez démontrer par une preuve analytique que le rayon d'un cercle égale le côté de l'hexagone inscrit si vous préférez les preuves qui obscurcissent l'essentiel. L'algèbre linéaire est tout à fait inadéquate pour *découvrir* que des triangles congruents peuvent couvrir le plan ou qu'en général, des pentagones ne le peuvent pas, et en même temps, elle n'est même pas adéquate pour *prouver* de tels faits. Je pourrais continuer de la sorte avec un exemple après l'autre de ma liste, pour montrer combien impotente l'algèbre linéaire est dans ce domaine. La géométrie permise par l'algèbre linéaire est un produit morne. Ses "sommets" consistent à prouver que deux droites distinctes peuvent avoir 0 ou 1 point commun et que pour des cercles, ces nombres sont 0, 1, 2. Peut-être que l'algèbre vectorielle pourrait même fournir une preuve insipide que les trois médiatrices d'un triangle passent par un même point. Les seuls sujets géométriques qui pourraient de façon adéquate être traités par l'espace vectoriel, je veux dire le barycentre et les corps convexes, sont généralement négligés parce qu'ils ne s'insèrent pas dans le système des mathématiques.

Les *fondements* de la géométrie sont plus aptes à être abordés par l'algèbre linéaire, mais alors, ce devrait être des fondements developpés par un élève qui connaît la géométrie. Le lecteur aura remarqué qu'avec l'algèbre linéaire, on obtient des fondements assez artificiels parce que les angles sont absents des notions de base et qu'il faut un gros effort pour les reconstruire. Le concept d'angle est l'un des cadeaux précieux de la géométrie, un cadeau qui ne devrait pas être refusé, un outil "transcendant" par lequel des résultats extraordinaires sont obtenus facilement, beaucoup plus facilement que par des méthodes algébro-analytiques. Il est vrai que toute démonstration peut être traduite en analyse, mais avant cela, il faut avoir une démonstration et pour trouver une démonstration la géométrie est nécessaire.

C'est même pire en ce qui concerne le concept d'angle. Avec l'algèbre linéaire, il est impossible de prouver que la somme des angles opposés d'un rectangle est π. Cela demande un gros travail pour obtenir le résultat "congruent à π mod 2π" parce que l'algèbre linéaire ne fournit rien de plus que des angles mod 2π. Pour certains, ceci a été une raison pour interdire les angles autres que ceux mod 2π. Pour Euclide, la somme des angles d'un heptagone est égale à 10 angles droits; avec le concept d'angle de la trigonométrie, c'est π mod 2π. Ceci ne signifie pas que l'un ait raison et l'autre tort, mais plutôt qu'il y a plusieurs concepts d'angle, comme ce sera expliqué plus complètement plus tard.

Il serait injuste de prétendre que tous ceux qui essaient d'incorporer la géométrie à l'algèbre le font parce qu'ils haïssent la géométrie. Au contraire, souvent, ils entreprennent de "sauver la géométrie". Ils ont eux-mêmes appris la géométrie selon un système qu'ils savent à présent avoir été faux. "Sauver la géométrie" signifiait qu'il fallait l'incorporer dans un système raisonnable des mathématiques; ils n'y peuvent rien si tout ce qui ne s'adapte pas au système doit être abandonné. Si la géométrie doit garder une place dans l'enseignement mathématique, elle doit être rigoureuse. Les constructeurs de systèmes ne connaissent qu'un niveau de rigueur, celui du système; ils considèrent tout ce qui est inférieur à ce niveau comme truqué et tout ce qui est supérieur comme respectable. D'après eux, la géométrie doit être adaptée à ce niveau.

En fait, comme nous l'avons exposé dans ce qui précède, les prétentions des constructeurs de systèmes sont à peine justifiées. Un tel système de

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

mathématiques n'est en général pas moins délabré que la vieille géométrie, mais les auteurs modernes ont appris comment cacher ces déficiences avec plus de succès. Ceci n'est cependant pas la raison pour laquelle je les blâme. C'est plutôt parce qu'ils raisonnent en descendant à partir du système, sans réaliser que pour pouvoir raisonner *à partir* du système, il faut d'abord avoir raisonné *vers* le système. Pour pouvoir interpréter la géométrie comme algèbre linéaire, l'élève - et pas seulement l'auteur du manuel - devrait d'abord être familier avec la géométrie.

"Sauver la géométrie" par l'axiomatique

Il est encore d'autres personnes soucieuses de sauver la géométrie. Il en est qui craignent que la géométrie ne soit dénaturée par l'algèbre linéaire, mais plutôt que de défendre l'enseignement de la géométrie, ils veulent rivaliser avec la rigueur de l'algèbre. Comme antidote, ils recommandent des fondements de la géométrie, c'est-à-dire un système de géométrie dans le style Pasch-Hilbert, peut-être modernisé d'après Artin, ou autrement - car aucun autre sujet que la géométrie ne peut se voir imposer autant de systèmes axiomatiques différents, mais tant que leurs auteurs ne dévoilent pas leur façon de penser, il est difficile de dire pourquoi l'un serait meilleur ou moins bon comme sujet d'enseignement.

En fait, l'algèbre linéaire présente déjà un système axiomatique de la géométrie. Pourquoi ne sont-ils pas satisfaits de ce système ? Ce n'est pas clair ce qui a conduit le "sauveteur" axiomatique de la géométrie à s'opposer à l'algèbre linéaire. Ce ne peut être parce que cela commence par l'aspect affin, ni parce qu'il n'est pas fait justice au concept d'angle, ni parce que l'algèbre linéaire n'est pas appropriée à la découverte de la vérité géométrique, ni même parce que les preuves de la vérité géométrique par l'algèbre linéaire sont insipides.

Aucun de ces points n'a pu être décisif parce que dans le système axiomatique qu'ils recommandent, c'est plus ou moins la même chose. Ceux qui croient en l'algèbre linéaire comme succédané de la géométrie ont raison quand ils objectent aux axiomaticiens que l'algèbre linéaire réalise la même chose en géométrie et est de plus un outil universel, un outil qui n'est pas fabriqué seulement pour la géométrie et n'est pas seulement le caprice de son auteur particulier. Que veulent vraiment dire les "sauveteurs" de la géométrie ?

Si je ne me trompe, c'est le fait que l'algèbre linéaire présuppose les nombres réels, qui serait une tare en géométrie. Je ne serais pas un mathématicien si je ne pouvais comprendre de tels scrupules. Mais les élèves qui sont sensés avoir les mêmes scrupules ne sont pas des mathématiciens, et la plupart d'entre eux ne deviendront jamais des mathématiciens. Bien sûr, la géométrie peut se faire sans les nombres - les Grecs le faisaient et pour cette raison nous disons encore "carré" plutôt que "seconde puissance". Bien sûr, la géométrie peut être *fondée* sans les nombres, depuis que Staudt, Pasch et Hilbert on montré comment déduire les axiomes des champs d'axiomes géométriques. Mais que

quelque chose *puisse* se faire n'implique pas que cela *doive* se faire.
Les axiomaticiens de la géométrie tendent aussi vers l'algèbre linéaire considérée comme un but. Une fois les axiomes formulés, leur but n'est pas un trésor de faits géométriques, mais l'algébrisation de la géométrie, c'est-à-dire la preuve qu'une telle géométrie axiomatique peut être décrite par l'algèbre linéaire sur un corps fixé par la géométrie (peut-être celui des réels). Ce corps est construit à l'intérieur de la géométrie. Le chemin qui conduit des axiomes géométriques vers l'algèbre linéaire est alors la seule chose ajoutée. On commence plus tôt, le champ n'est pas supposé donné a priori, mais construit à partir des axiomes géométriques - les axiomes affins fournissent une addition vectorielle pour des vecteurs indépendants (figure 51) et indirectement pour des vecteurs dépendants (figure 52);

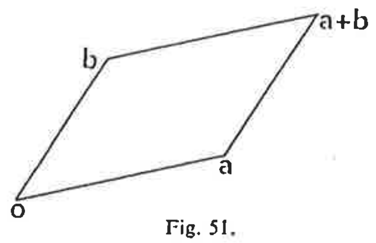

Fig. 51.

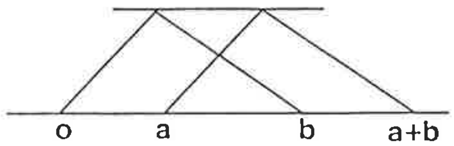

Fig. 52.

les vecteurs forment un groupe : l'endomorphisme qui applique 1 sur a (figure 53) est interprété comme la multiplication à gauche par a; grâce à cette définition, la droite 01 devient un corps si on accepte un axiome tel celui de Desargues.

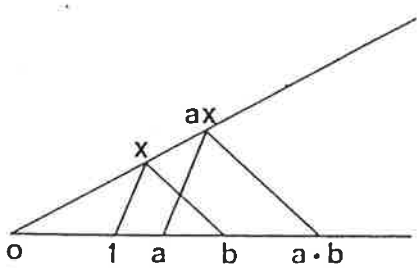

Fig. 53.

Un autre axiome géométrique, celui de Pappus-Pascal, fait du corps un champ, et si des axiomes géométriques d'ordre sont ajoutés, on obtient un champ ordonné. Un dernier pas, un axiome topologique, conduit au champ des réels.

N'est-ce pas merveilleux ? J'aime tellement ceci qu'au cours des 35

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

dernières années, j'y suis revenu souvent dans mes cours; mais peut-être que je ne l'aime pas assez, du moins pas au point d'en devenir fou. Car je m'oppose à appeler ceci de la géométrie et à l'offrir à des élèves de 11-12 ans. Je l'enseigne à des étudiants qui savent ce qu'est la géométrie, dans un cours qui offre à mes auditeurs une bonne dose de géométrie substantielle, nouvelle pour eux, et dans lequel, cela ne forme qu'une petite partie. Mais que peut signifier cette parcelle de fondements de la géométrie dans les mathématiques scolaires ? Quel rôle cela peut-il avoir à cet endroit ? A l'université, les étudiants ont une connaissance opérationnelle du champ des réels, peut-être avec la droite réelle en arrière-plan. S'ils peuvent éprouver le besoin de reconstruire le champ des réels, ce souhait doit être satisfait de façon claire et précise. Ils devraient être dirigés de façon honnête et directe vers les axiomes du champ ordonné (champ ordonné archimédien), plutôt que vers les fourrés, où, comme dans la forêt tropicale, les axiomes géométriques foisonnent, au nombre de 10 ou 20, et où finalement, à la fin de l'excursion à la lisière des fourrés, les axiomes du champ émergent tels un fata morgana.

Les axiomes de Hilbert sont classiques. Ceux qui ne connaissent pas grand-chose à la géométrie semblent croire que ses axiomes sont en quelque sorte obligatoires, qu'ils ne laissent aucune latitude. Hilbert, disent-ils, a prouvé que la géométrie peut être munie de coordonnées et algébrisée à l'aide du champ des réels. Ceci est une caractérisation trompeuse; Hilbert a choisi les axiomes pour obtenir ce résultat, mais on pourrait atteindre le même but par un choix totalement différent.

Le trait le plus marquant de l'axiomatique de Hilbert, et de beaucoup d'axiomatiques plus récentes, est certainement leur caractère très compliqué. Elles comprennent un grand nombre d'axiomes, certains si triviaux, qu'on les oublie facilement dans une énumération, d'autres tellement compliqués (en particulier les axiomes d'ordre) qu'il est difficile de les mémoriser. Le tout est si impénétrable que personne n'essaierait de travailler à l'intérieur du système axiomatique; aucune découverte ne peut être faite à l'intérieur du système axiomatique et prouver des propositions est une chose difficile. Par amour de la déduction rigoureuse, on s'est installé dans le système axiomatique, mais la structure déductive reste fort schématique. On répète sans cesse "il est aisé de prouver que..." et "nous omettons la démonstration qui, bien que longue, n'ouvrirait aucune nouvelle perspective". Ce sont là des aveux honnêtes, et même exacts, car raisonner dans un tel système axiomatique est une triste affaire.

Ceci n'est pas à reprocher à Hilbert ou aux autres qui ont fait des efforts similaires. De tels systèmes axiomatiques n'ont pas été créés pour qu'on évolue en leur sein. Il existe des systèmes axiomatiques qui permettent cela, simples et clairs, tels ceux de groupe, de champ, du plan projectif. Ceux de la géométrie euclidienne, toutefois, servaient d'autres desseins. La géométrie euclidienne est faite de façon non axiomatique par tous les gens raisonnables. Si on considère les systèmes axiomatiques de la géométrie euclidienne, ce qui importe est de raisonner *à pro-*

pos des axiomes, d'explorer leurs relations mutuelles, leur dépendance et indépendance, leur complétude. Les systèmes axiomatiques de la géométrie ne sont pas créés pour les exercices de géométrie euclidienne, mais pour des explorations métagéométriques, pour la recherche sur les fondements de la géométrie. Bien sûr, tout mathématicien adulte sait cela. S'il impose à l'étudiant une axiomatique afin de le laisser s'exercer à la géométrie *à l'intérieur* du cadre axiomatique, il professe une morale à double face comme celle de Jupiter et des bœufs. Comme mathématicien établi, je suis autorisé à pratiquer la géométrie de façon non axiomatique parce que ceci est le stade préliminaire indispensable à l'organisation axiomatique de la matière. Quand ceci est atteint, vient le tour de l'élève. Il est autorisé à tirer des conclusions plus ou moins mécaniques à l'intérieur du système - une activité que le mathématicien adulte a honnêtement classée comme sans intérêt par des phrases telles 'il est aisément prouvé que...", "la démonstration est omise car...". Il y a certainement d'autres axiomaticiens qui n'exigent pas de tels exercices abêtissants, qui sont satisfaits si l'élève sait répéter les phrases "il est facile de prouver que..." etc - mais, bien sûr, il doit les placer à l'endroit qui convient.

La fonction essentielle d'une telle axiomatique est réservée à son auteur : organiser la matière afin d'arriver au système axiomatique, détacher celui-ci de la matière à organiser pour arriver à une axiomatique logiquement indépendante et finalement, rétablir les liens s'il faut montrer que le système axiomatique décrit complètement la matière à organiser. Si l'axiomatique géométrique doit être un sujet d'enseignement ayant un sens, il faut que l'étudiant puisse la pratiquer comme une activité bien à lui. Mais ceci n'est pas l'intention de l'auteur. Soit l'auteur d'une axiomatique à usage scolaire est convaincu qu'axiomatiser est la tâche de Jupiter et non des bœufs, soit il s'est persuadé que ce serait une tâche trop difficile pour l'élève. Un élève qui n'a jamais tenté d'organiser une matière localement sera sans doute incapable de le faire globalement. Des systèmes axiomatiques préfabriqués ont une valeur en soi. Ils peuvent être un sujet d'étude utile à ceux qui ont l'expérience de l'axiomatisation. Si un élève a appris à axiomatiser de la matière simple, il reconnaîtra des aspects familiers dans des systèmes axiomatiques plus compliqués, il sera capable de débrouiller et de comprendre le système comme s'il l'avait construit lui-même. Pour quelqu'un qui n'a jamais appris à axiomatiser, un système axiomatique de la géométrie ne peut être qu'un bloc de mathématique indigeste ajouté à tant d'autres.

L'axiomatique de la géométrie dans l'enseignement

Je parlerai plus tard de l'axiomatique en général, mais certains points peuvent être anticipés dès à présent. L'axiomatique peut avoir une valeur pratique et formative. Dans le cas de la géométrie, les valeurs pratiques peuvent être exclues. A travers un système axiomatique, l'élève peut être initié à la *rigueur dans l'expression* et à la *déduction sans lacunes.*

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Néanmoins, en ce qui concerne l'expression linguistique, l'axiomatique moderne de la géométrie est à peine plus développée que celle d'Euclide; son langage est encore mal formalisé; dans toutes les présentations que je connais, ce langage est entièrement déterminé par la langue et la syntaxe du pays. Je ne souligne pas ce fait pour le désapprouver; au niveau axiomatique, ceci est une rigueur admissible. De plus, il y a loin de ces systèmes à la déduction sans lacunes; au lieu de cela, on y trouve à nouveau des phrases telles "il est facile de montrer que...".

Une autre chose peut être apprise, non dans l'axiomatique, mais en axiomatisant, en l'occurrence couper les liens ontologiques, ce qui est exprimé de façon classique par Hilbert quand il dit " nous imaginons..." Les objets du système axiomatique deviennent des objets de pensée indéfinis qui, restreints par des relations indéfinies, sont définis de façon implicite. Dans ce contexte, la relativité de la géométrie peut être comprise, c'est-à-dire le fait qu'au lieu de la géométrie euclidienne, on pourrait proposer des géométries fort différentes - une idée de grande valeur formelle. Mais je le répète encore, l'élève ne devrait pas apprendre de tels faits verbalement, mais en développant lui-même une telle géométrie déviante.
L'axiomatique doit aussi enseigner comment un système axiomatique tel celui de la géométrie euclidienne est traduit en algèbre et ce qu'est un modèle d'un système axiomatique.
Je vais à présent examiner d'un autre point de vue si l'axiomatique de la géométrie peut conduire à de tels résultats, qui seraient les bienvenus, de façon à répondre à la question de savoir si l'axiomatique peut et doit être enseignée et comment.

Ce doit être clair que pour cela je ne puis me limiter à l'axiomatique de la *géométrie* et que je ne considère pas l'axiomatique comme une couronne devant décorer l'instruction mathématique sous sa forme classique. D'autre part, comme mathématiciens, nous connaissons la valeur de la méthode axiomatique, nous savons combien elle a contribué au développement des mathématiques au cours de ce siècle et comment elle a pénétré les mathématiques. L'axiomatique doit-elle être enseignée dans les écoles ? Si elle est enseignée sous la forme où elle l'a été dans la plupart des projets au cours des quelques dernières années, je réponds "non". L'axiomatique préfabriquée n'est pas plus matière à enseigner à l'école que ne le sont les mathématiques préfabriquées en général. Mais ce qui est considéré comme essentiel par le mathématicien adulte, j'entends l'*axiomatisation*, peut être une matière à enseigner. Après l'organisation locale, l'élève devrait aussi apprendre à organiser globalement et finalement à couper les liens ontologiques. Mais pour ce faire, il doit être familier avec le domaine à organiser et les liens à couper doivent exister et être vigoureux. Ceci est une exigence précise. L'élève qui n'a jamais été autonome dans l'organisation négligera les connexions seulement si le nombre de liaisons est petit, et les liens avec la réalité sont généralement peu cultivés et faibles. Bien sûr, toutes ces exigences peuvent être abandonnées si l'élève est confronté à un système axiomatique tout fait, duquel il peut tirer quelques conclusions avec obéissance. Il peut être entraîné à cet art, mais ceci peut difficilement contribuer à comprendre l'axiomatique. Le seul résultat serait d'agrandir à nouveau l'assortiment de mathématiques scolaires dénaturées.

Tous les exemples disponibles d'axiomatique géométrique dans les mathématiques scolaires sont extrêmement compliqués. Sans approfondir davantage les mérites didactiques d'une telle axiomatique géométrique, on peut invoquer ceci comme argument contre le postulat qu'il faut apprendre la géométrie de façon axiomatique. Mais cet argument ne suffit pas pour condamner ces efforts. Peut-être un jour quelqu'un construira-t-il un système axiomatique simple pour enseigner la géométrie à l'école. Ce n'est pas du tout impossible. Jusqu'à présent, la tradition a été un joug pesant. Je peux personnellement imaginer une solution dans l'esprit du problème de l'espace de Helmholtz-Lie, mais ceci n'importe pas ici.

Un système axiomatique d'un tel degré de complication, comme ceux d'usage en géométrie, ne peut être correctement compris par un élève qui ne connaît pas déjà les connexions internes. Il ne peut saisir le but des axiomes isolés, leur interdépendance et leurs relations aux conséquences qui doivent en être tirées. Après de telles expériences en axiomatique, l'élève quittera l'école avec l'idée que l'axiomatique sert à compliquer les choses simples. Il me semble qu'en tant que mathématiciens, nous ne pouvons ajouter de l'huile sur les idées populaires fausses.

Jusqu'à présent, je n'ai même pas considéré les projets usuels d'axiomatique géométrique sous l'angle didactique. Bien que non responsable de la présentation dogmatique et de l'absence de motivation didactique, je ne puis rejeter ces projets sur ces bases. Je ne puis reconnaître ce que l'auteur appelle une expérience réussie avec ce projet, mais ceci ne me dispense pas d'essayer de déterminer comment on pourrait construire un tel système axiomatique. Après un bref examen, il apparaît cependant que construire un tel système axiomatique requiert une perception profonde des connections géométriques, qu'on ne peut espérer rencontrer à l'école même chez les élèves les plus doués. A certains endroits, ceci est admis de façon explicite dans les projets, en particulier aux endroits où l'auteur a introduit un savoir ésotérique étranger à l'élève. De tels faits sont honnêtement admis par l'auteur parce que l'idée maîtresse d'un tel projet n'est pas de conduire l'élève, par l'axiomatisation, à un système axiomatique, mais bien de le confronter à un système tout fait, un système qui contient des surprises devant fonctionner comme des gadgets à auto-allumage. (Il est dommage qu'en l'absence de garantie, cette offre n'ait pas l'attrait caractérisant la plupart des appareils industriels).

Le vrai but de l'axiomatique géométrique, j'entends la suppression des liens ontologiquues, peut être oublié, puisque cette sorte d'axiomatique présuppose que ce but est atteint. On demande à l'élève d'oublier à propos des points et des droites, tout ce qui se voit ou qui a été démontré dans le passé. Il doit se limiter aux assertions énoncées dans les axiomes et les employer comme base. Pourquoi ? Dans l'histoire des mathématiques, de tels changements de politique étaient toujours parfaitement justifiés.

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

L'axiomatique géométrique moderne est née après le succès de la géométrie non-euclidienne, après qu'on ait osé douter de la géométrie euclidienne; l'axiomatique des nombres réels est née des paradoxes du concept de limite - sans mentionner d'autres exemples. Quels doutes faut-il susciter chez l'élève pour le convertir à une nouvelle attitude ? On peut lui dire que l'ancienne approche présentait des défauts, mais peut-on l'amener à expérimenter ceci ? Peut-être la réponse est-elle positive. Obtenir cette réponse serait plus décisif que présenter un système tout fait d'axiomatique de la géométrie.

Une solution fréquente consiste à dire à l'élève qu'on joue un jeu dont les règles sont les axiomes. Un enfant d'âge scolaire sait ce qu'est un jeu et ce que sont des règles. Il aime les jeux et accepte qu'il soit sportif de se plier à des règles. Il est dommage que la géométrie soit le plus mauvais exemple auquel appliquer cet argument. Pourquoi jouer un jeu tellement compliqué s'il en existe de plus simples ? Mais il a plus. Cet argument est un aveu de faillite éducative - un conte de fées au lieu de la vérité qui serait trop difficile pour l'intelligence des élèves. L'enfant peut croire que l'école est un jeu sans signification qui est récompensé par de bons points et finalement par un diplôme s'il est bien joué. Cependant, peut-être a-t-il fait une exception pour les mathématiques qui, sous l'enveloppe mal comprise d'une implacable rigueur, peuvent cacher des vérités plus profondes que les ablatifs et les dates de rois et de batailles. Devons-nous le priver de cette dernière croyance ? Bien sûr, sous certains aspects, les mathématiques *sont* un jeu. Mais ceci résonne différemment et a un tout autre effet si c'est dit par quelqu'un qui l'a expérimenté au lieu de l'entendre répéter par d'autres qui ne savent pas réellement ce que de telles métaphores signifient.

Ce qui est dit ici des systèmes axiomatiques complets de la géométrie subsiste en partie si on ne considère que des systèmes partiels, par exemple de la géométrie affine. D'autres arguments tombent. Les systèmes d'axiomes affins sont généralement plus simples. Mais on ne peut en aucun cas éviter que l'élève ne connaisse la géométrie affine avant de passer à l'axiomatique affine. Il n'est pas possible d'organiser un domaine inconnu. La connaissance de la géométrie affine ne résulte cependant pas de celle de la géométrie euclidienne. Il n'est pas suffisant d'avertir les élèves que "maintenant nous n'utilisons plus le compas". L'étudiant doit l'avoir fait lui-même sans compas pour savoir ce que cela signifie. De fait, il n'est pas facile de lui faire accepter cette restriction. Il est presqu'impossible d'expliquer aux élèves ce que signifie "la règle et le compas" - en tout cas je n'ai trouvé aucun livre où ceci soit tenté. Peut-être est-il plus facile de lui vendre l'instrument, interdit en dehors de cela, qui trace les parallèles. Ce qu'est vraiment la géométrie affine ne peut être appris par une explication verbale mais plutôt par l'usage d'un tel instrument, et je répète que ceci est mieux appris dans l'espace que dans le plan.

L'étape qui consiste à couper les liens ontologiques n'est pas plus facile en géométrie affine qu'en version euclidienne. Conduire l'élève dans cette direction requiert une orientation différente.

Mais pourquoi insister sur l'axiomatique *géométrique* ? Personne ne doute de la possibilité de l'axiomatique dans les mathématiques scolaires - l'axiomatique de groupe de la mesure, de l'ordre linéaire, de l'ordre cyclique, du concept d'angle, mais en tout cas l'axiomatique comme activité d'axiomatiser. Depuis la première leçon de mathématiques, l'élève peut rencontrer des groupes, des mesures, des ensembles ordonnés, des opérations sur les angles. Il n'est pas plus difficile de découvrir l'élément commun dans les nombreux modèles d'un tel système axiomatique que de découvrir l'induction dans les exemples d'induction. Et même, c'est sans doute plus facile que d'isoler une définition formelle d'un parallélogramme au milieu de la variété troublante des propriétés du parallélogramme. Un élève qui découvre et formule les éléments communs dans de tels modèles et qui choisit dans cette variété quelques traits desquels il déduit les autres est engagé dans une activité résolument mathématique aux effets durables et largement transférables. Il apprend à organiser globalement, c'est-à-dire à ne pas organiser un système de façon interne, mais à organiser une catégorie de systèmes regardés de l'extérieur - il apprend à axiomatiser. Couper le lien ontologique n'est alors plus un nouveau problème. Axiomatiser par abstraction fait s'estomper les liens qui doivent disparaître (comme en arithmétique, les billes ou les chaises ou les fleurs soumises à des opérations arithmétiques s'estompent). Ensuite l'élève peut être rendu conscient de ce processus, mais au moins le processus a eu lieu; alors qu'en enseignant l'axiomatique géométrique, il n'y a aucune garantie que l'étudiant ait coupé le lien ontologique.

Il est dommage que dans les nombreuses publications sur l'axiomatique à l'école la valeur formelle de l'axiomatisation ne soit même pas mentionnée. Je pense que ceci est dû à un manque de confiance dans les mathématiques et dans la structure de la personnalité de l'adolescent. Les mathématiques en tant qu'activité devraient être réservées au mathématicien adulte, à l'homme qui possède les outils et sait comment s'en servir. Axiomatiser est le privilège des maîtres. Les élèves doivent apprendre l'axiomatique, le maître sait ce qui est bon pour eux.

Il y a beaucoup de domaines dans lesquels on peut apprendre l'axiomatique; la géométrie n'est simplement pas l'un d'entre eux. Mais à partir du moment où l'élève est familiarisé avec l'axiomatique, ne serait-il pas possible de le conduire vers l'axiomatique géométrique ? Avant de répondre à cette question, il faudrait se demander quel est le but poursuivi. Je rejette la réponse comme quoi sans axiomatique il n'y a pas de rigueur en géométrie. Ce qu'on entend par rigueur dépend du contexte et quiconque veut justifier l'axiomatique géométrique par un besoin de rigueur devrait indiquer un contexte qui ne puisse être couvert de façon adéquate par l'organisation locale. De tels contextes existent mais les programmes axiomatiques usuels ne s'y adaptent pas. Il n'est pas vrai que l'élève "doive" apprendre quelque chose (disons la rigueur de la géométrie axiomatique) à moins que le "doit" ne soit causé par le besoin de l'élève plutôt que du professeur. Il faudrait montrer par

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

une expérience de pensée comment un tel besoin peut naître; le dernier maillon dans cette expérience serait de mettre en doute la fiabilité de la géométrie comme elle était pratiquée précédemment. Je ne puis dire où de tels doutes sont entretenus, dans l'enseignement d'aujourd'hui.

Un argument en faveur de l'axiomatique géométrique est le fait que couper le lien ontologique ne peut être appris complètement dans l'axiomatique par abstraction, car là c'est trop facile, comme nous l'avons vu. C'est beaucoup plus difficle en axiomatique géométrique, qui est reliée à la réalité par des intuitions très fortes. C'est pourquoi cela a un sens de recommencer la pratique de l'axiomatique en géométrie.

Ceci serait un argument, mais non contraignant. A mon avis, l'axiomatique géométrique n'est pas un besoin impératif au niveau scolaire dans la mesure où l'axiomatique elle-même n'est qu'une curiosité. Néanmoins, je vais expliquer ce que je considère actuellement comme un exemple d'axiomatique géométrique au niveau scolaire, les expériences hollandaises de P.J. van Albada.

Dans le cadre de la géométrie euclidienne spatiale, on se tourne vers la géométrie sur la sphère, qui peut même être tranformée en le plan elliptique en identifiant les points diamétralement opposés. On essaie de démontrer, en géométrie elliptique, des théorèmes biens connus du plan euclidien. On dresse la liste de ceux pour lesquels ceci est possible et la liste de ceux pour lesquels c'est un échec. On essaie de déduire les théorèmes de géométrie elliptique les uns des autres afin de se familiariser avec la géométrie elliptique et on essaie de trouver des démonstrations communes pour les théorèmes valables dans les deux géométries, sans se référer explicitement à l'une d'elles. Ceci conduit au problème que l'élève peut connaître de l'axiomatique par abstraction - trouver des bases communes aux géométries euclidienne et elliptique. Je n'ai pas examiné en détail comment cette tâche peut être maîtrisée au niveau scolaire; comme je l'ai déjà mentionné, je préfèrerais être guidé par le problème de l'espace de Helmholtz-Lie.

(Dans ce programme, la géométrie elliptique ne pourrait pas être remplacée par la géométrie hyperbolique. Le modèle usuel de géométrie hyperbolique est artificiel et difficilement accessible d'une façon synthétique, et faire sans un modèle, comme le firent Bolyai et Lobačevski, serait un effort trop grand pour l'instruction scolaire).

J'ai examiné cette méthode parce qu'elle fournit l'axiomatisation de la géométrie comme un problème naturel, le même qui provoqua les efforts axiomatiques au 19^e siècle. Il est heureux que nous puissions corriger l'histoire, en faisant référence, par des recherches comparatives, à la géométrie elliptique, longtemps négligée pour des raisons historiques.

Mais je voudrais redire que je ne prétends pas que l'axiomatique géométrique soit une obligation à l'école. D'autre part, cela ne signifie pas que je raye complètement la géométrie de l'enseignement primaire et secondaire. Au contraire, la géométrie pénétrée de bas en haut par la théorie des groupes *est* un sujet scolaire et je suis convaincu que plus de géométrie, et de la meilleure géométrie, peut être enseignée par un professeur qui, pour la rigueur mathématique, suit sa propre conscience, plutôt que d'avoir des scrupules dictés par un axiomaticien renfrogné.

L'axiomatique et la déductivité traditionnelle

Les axiomaticiens ont l'habitude d'objecter que la géométrie déductive traditionnelle est aussi de l'axiomatique, mais la mauvaise axiomatique du prestidigitateur qui cache ses axiomes dans son chapeau et ses manches. A quoi sert ce bric-à-brac ? L'honnêteté n'est-elle pas la meilleure politique ?

L'affirmation selon laquelle la déductivité traditionnelle et l'axiomatique ne sont pas essentiellement différentes est paradoxalement à la fois vraie et fausse. Elle est vraie dans la mesure où il y a peu qui justifie la prétention de l'axiomaticien à l'honnêteté complète; il n'est pas vrai qu'il ne cache rien et méprise les tours de passe-passe. L'axiomatique depuis Pasch et Hilbert présuppose la syntaxe et la sémantique du langage courant; sans plus de justification, on définit "des droites sont parallèles" et on continue à parler de droites parallèles, projection parallèle, parallélisme, etc; on définit droites sécantes et on continue avec "des droites qui se rencontrent". Bien sûr, ceci est parfaitement légitime à ce niveau. Mais il y a d'autres niveaux. Il y en a un où l'on s'offusque de l'imprécision alarmante du langage courant et les axiomes et autres propositions sont formalisés. La formalisation aussi connaît plus d'un niveau; à un niveau suprême, même les déductions peuvent être formalisées. Axiomatiser n'est pas le sommet de l'honnêteté et de la rigueur; il y a des niveaux au-dessus aussi bien qu'en-dessous. L'axiomatique n'a pas le monopole de l'honnêteté. A chaque niveau d'apprentissage correspond un niveau d'honnêteté et de rigueur. L'honnêteté et la rigueur qui appartiennent à un certain niveau ne peuvent être imposées si l'élève n'est pas à ce niveau, bien que ceci soit tenté de façon répétée et bien sûr, sans réel succès. L'axiomatique géométrique est particulièrement dangereuse. Il est si facile d'y introduire des astuces de niveau plus élevé; grâce à l'automatisme de l'axiomatique, elles sont supposées fonctionner de façon automatique, c'est-à-dire même si l'élève n'a aucune compréhension. Je reconnais que ceci est de bon ton dans notre système éducatif, mais des éducateurs consciencieux n'ont jamais aimé cela. L'axiomatique peut nous emmener plus loin dans ce marécage.

D'un point de vue didactique, il y a une grande différence entre l'axiomatique et la déductivité traditionnelle. Je l'ai caractérisée précédemment par les termes "organisation locale et globale". Tout le monde sait qu'il faut un certain temps pour que des élèves moyens soient capables de visualiser une démonstration comme un tout. Regarder au delà d'un théorème particulier pour voir les connexions avec d'autres propositions prend encore plus de temps. Même si l'élève a à peine atteint ce niveau, il est poussé vers le suivant, l'organisation globale - ceci *est* une pression si on n'est pas certain que l'élève a atteint ce point et si le système

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

axiomatique lui est imposé.

La déductivité traditionnelle diffère encore de l'axiomatique d'un autre point de vue : le statut des définitions. Au cours de son expérience mathématique, l'étudiant s'est familiarisé avec deux sortes de définitions, la définition descriptive qui ébauche un objet comme en épinglant quelques propriétés caractéristiques et la définition créative et algorithmiquement constructive qui modèle de nouveaux objets à partir de familiers. Toutefois, la définition implicite par des axiomes, qui joue un rôle important en mathématique moderne, est à la fois descriptive et créative, bien qu'elle ne le soit pas algorithmiquement. Dans cet aspect objectivement et didactiquement nouveau, la méthode axiomatique se distingue bien de la déductivité traditionnelle. La déductivité traditionnelle signifie l'organisation locale, jusqu'à un horizon vague et incertain. En axiomatique, cet horizon est fixe ou plutôt, les gens prétendent qu'ils peuvent fixer, et même, qu'ils fixent cet horizon. J'ai expliqué pourquoi cette prétention est non fondée.

L'organisation locale - les médiatrices

Comment pouvons-nous sauver la géométrie si ni l'algèbre linéaire ni l'axiomatique ne peuvent le faire ? Ceci est une étrange question. Personne n'oserait demander comment sauver la physique ou la zoologie qui n'ont cependant jamais été axiomatisées. Ou plutôt si quelqu'un posait cette question, il voudrait probablement dire comment la physique ou la zoologie peuvent-elles être sauvées des griffes des mathématiques.

Les enfants apprennent à calculer le prix de trois livres de sucre étant donné le prix d'une livre, ou l'aire d'un rectangle connaissant les côtés, bien que la plupart de ces notions n'aient jamais été insérées dans un système axiomatique. Quand les mathématiques sont appliquées, l'utilisateur ne se déplace jamais dans un système axiomatique. Les mathématiques appliquées devraient aussi être sauvées des mathématiques pures. Il n'y a pas que ces domaines qui doivent être protégés du dogmatisme axiomatique, ceux qui étudient sont également en danger. Les didacticiens qui distillent à leurs élèves un système axiomatique formalisé bien aiguisé sont généralement fiers de leur expérience selon laquelle ces élèves aiment par-dessus tout opérer dans les limites bien définies d'un système. Ceci est de la mathématique de serre, qui ne rencontre pas les contraintes de la réalité. Les probabilités sont un exemple frappant de mathématiques vivantes pouvant être tuées par l'axiomatique. La géométrie ne peut être sauvée que si l'élève peut l'expérimenter comme une activité; si elle est préfabriquée, elle mourra par suffocation.

J'ai expliqué précédemment comment, aux débuts de la géométrie, l'étudiant peut être amené à apprendre à organiser les formes et les phénomènes de l'espace à l'aide de concepts géométriques et de leurs propriétés. A un niveau plus élevé, il devrait organiser ces concepts et leurs propriétés à l'aide de relations logiques. Au-dessus de ce niveau, ce système relationnel peut devenir un sujet d'étude.

Considérons un exemple. Une expérience cruciale dans l'enfance de plusieurs mathématiciens ayant écrit une autobiographie a été le théorème qui affirme que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Ceci est un théorème magnifique. Les enfants peuvent facilement le découvrir, pour autant qu'il soit formulé de façon moins symétrique : "Dessine les médiatrices de AB et BC, qui se coupent en M; regarde par où passe la médiatrice de AC". Analysons la démonstration comme devrait le faire l'élève après qu'il l'a trouvée.

La démonstration est basée sur la propriété de la médiatrice d'être l'ensemble des points équidistants de X et Y, qui peut avoir été établie par des arguments de symétrie. M est sur la médiatrice de AB, d'où

$$MA = MB;$$

M est sur la médiatrice de BC, d'où

$$MB = MC$$

De ces 2 égalités, il résulte

$$MA = MC,$$

donc M est sur la médiatrice de AC.

La preuve est une combinaison de quelques surprises. On trouve les deux premières égalités en appliquant la définition de la médiatrice dans un sens, la troisième s'obtient en l'appliquant dans l'autre sens. Premièrement et deuxièmement, M est sur la médiatrice, dont M est équidistant, troisièmement M est équidistant, donc M est sur la médiatrice. Je crois que ceci est la première apparition qui soit psychologiquement convaincante de la structure logique caractérisée par des concepts tels l'inversion, nécessaire et suffisant, si et seulement si.
La surprise suivante est la transitivité de l'égalité des segments. La propriété apparemment triviale de la transitivité devrait être explicitée pour comprendre la démonstration. A nouveau, je crois que ceci est la première approche possible de la transitivité et le premier exemple de sa productivité.
La troixième surprise est qu'une proposition aussi symétrique que celle concernant les trois médiatrices doive être abordée de façon asymétrique pour être prouvée. Apprendre que "trois droites passent par un même point" signifie la même chose que "une droite passe par le point d'intersection des deux autres" est un pas important. C'est le premier exemple d'un paradigme méthodologique qui est utile jusqu'aux niveaux les plus élevés des mathématiques.

La quatrième surprise, peut-être la plus grande, est qu'un théorème d'incidence (trois droites passant par un point) soit prouvé par des arguments métriques. Il faut une analyse, qui n'est pas si facile, pour comprendre la raison profonde de ce fait.

Finalement, on peut mentionner que le théorème conduit à la construction fascinante du cercle circonscrit.

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 16
LE CAS
DE LA GÉOMÉTRIE

Traduction : M. Parker

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

La démonstration du théorème des trois médiatrices n'est pas seulement un merveilleux morceau de géométrie et une abondante source d'idées didactiques, c'est aussi un bon exemple en géométrie de ce que j'ai appelé l'organisation locale. Il peut être traité dès que les enfants ont compris la médiatrice comme lieu d'équidistance. Ils ne doivent pas être capables de démontrer cette propriété cruciale de la médiatrice. Une démonstration de la propriété de lieu de la médiatrice ne peut aucunement contribuer à la compréhension du théorème du cercle circonscrit. Je doute même qu'une démonstration d'un fait aussi évident que la propriété de lieu de la médiatrice puisse être recommandée à un premier stade. A un stade plus avancé, cela aurait plus de sens de demander pourquoi la médiatrice de XY est le lieu des points équidistants de X et Y; alors, on pourrait même demander pourquoi l'égalité est transitive, ce qui revient à comprendre ce que signifie l'égalité. On peut demander pourquoi les médiatrices des différents côtés d'un triangle se coupent et pourquoi les droites ont au maximum un point commun. Evidemment, un tel arrangement contredit la philosophie des mathématiques comme système préfabriqué. C'est la voie de l'exploration, en mathématiques comme dans n'importe quelle autre science, qui est *la* voie pour comprendre et expliquer les phénomènes. La question de savoir pourquoi les médiatrices sont concourantes est fort semblable à pourquoi une sonnerie électrique sonne ou ne sonne pas, pourquoi l'estomac digère la nourriture et ne se digère pas lui-même; pourquoi les comètes ont une queue, et qui a commis le meurtre, deux questions "pourquoi" demandant une raison ou une cause. Et toutes ont en commun le fait qu'aucune réponse n'est définitive. Vous pouvez continuer à demander : "Mais pourquoi la médiatrice est-elle un lieu d'équidistance ?", "Pourquoi l'égalité est-elle transitive ?". "Pourquoi le courant active-t-il l'aimant ?". La réponse à toute question contient le germe de nouvelles questions. C'est une chaîne apparemment infinie, bien que d'après Aristote on pourrait l'arrêter aux principes comme raison première et à Dieu comme cause première. Mais cela importe-t-il vraiment de savoir si la chaîne est infinie ou non, si au moins je peux éviter les cercles vicieux ? La pratique de la vie quotidienne aussi bien que de la science est d'arrêter, à un certain moment, de demander pourquoi. Pour réparer la sonnerie, je n'ai pas besoin de la théorie de Maxwell et si j'étudie la théorie de Maxwell, je peux négliger la quantification des champs.

J'admets qu'à partir d'ici les mathématiques sont un peu différentes. Les mathématiciens ont inventé le truc axiomatique, c'est-à-dire accepter le vice des cercles vicieux comme une vertu. Vous cessez de demander ce que sont des points et des droites; au lieu d'une définition explicite, vous dites ce que vous pouvez en faire. En réalité, toute science se comporte de cette façon, toute science est basée sur des définitions implicites, mais les mathématiques sont la seule science dans laquelle ceci est cultivé comme le sommet de la déductivité, et même plus : après qu'un système a été axiomatisé, ses liens avec la réalité peuvent être coupés; par anontologisation, il devient un domaine complet par lui-même.

Nous sommes revenus à l'axiomatique, mais je crois que maintenant nous pouvons distinguer plus clairement ce que l'axiomatique signifie. Un texte mathématique peut commencer par des axiomes parce que ce sont des mathématiques toutes faites. Les mathématiques en tant qu'activité ne le font jamais. En général, ce que nous faisons en créant ou en appliquant des mathématiques est une activité d'organisation locale. Les débutants en mathématiques ne peuvent faire plus que cela. Tout enseignant sait que la plupart des élèves peuvent seulement produire et comprendre des chaînes déductives courtes. Ils ne peuvent pas saisir de longues démonstrations comme un tout, et encore moins voir une partie importante des mathématiques comme un système déductif. Nous sommes heureux s'ils peuvent apprendre à organiser localement un domaine mathématisable de la réalité ou un morceau des mathématiques elles-mêmes, parce que ceci est exactement ce dont ils auront besoin dans la vie de tous les jours et dans leur profession.

Organiser localement n'est pas activité déficiente ou illicite ou malhonnête en mathématiques. C'est une attitude généralement acceptée de la part du mathématicien adulte en mathématiques pures et appliquées, quoique jamais, il ne publierait de tels exercices. Aucun des différents systèmes d'axiomes de la géométrie n'a jamais été utilisé pour trouver ou pour prouver des propositions géométriques nécessaires en analyse ou en algèbre. Ceci est beaucoup trop compliqué et la route des axiomes aux théorèmes importants est beaucoup trop longue. La preuve est remplacée par la ferme conviction que cela peut être fait mais que cela n'en vaut pas vraiment la peine. On se contente d'une organisation locale jusqu'à un horizon variable de preuve. Même un mathématicien comme Hilbert, le père de l'axiomatique moderne, cultivait l'art de l'organisation locale dans ses cours de géométrie.[7] L'ouvrage *Introduction to Geometry*[8] de Coxeter est une magnifique démonstration de cette attitude. L'auteur sait en tout cas exactement où se situe cet horizon et quelle sorte de rigueur est adaptée au sujet; par exemple, aucun recours aux axiomes n'est nécessaire pour le théorème de Morley sur les trisectrices, alors qu'un théorème comme celui de Sylvester sur les points collinéaires, qui dépend de façon essentielle des propriétés d'ordre, requiert un contexte axiomatique.

[7]D. Hilbert et Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Berlin-Leipzig 1932
[8]New-York 1961, 1969

Avant-propos

L'ouvrage de Freudenthal a été écrit au moment où la polémique autour d'un enseignement axiomatique de la géométrie faisait rage. S'il n'y a plus guère de polémique aujourd'hui, il reste beaucoup d'interrogations.

À une époque où le problème de l'enseignement de la géométrie est posé à divers niveaux et dans de nombreux pays, il ne nous semble pas inutile de publier cette traduction des 60 premières pages du chapitre 16, qui en compte au total 110.

Monique Parker

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Prix de vente : 120 FB