ULB

Francis BUEKENHOUT

Une définition de polyèdre

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

centre de documentation pédagogique

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-67-9

UNE DEFINITION DE POLYEDRE

FRANCIS BUEKENHOUT

TABLE DES MATIERES

Introduction

Les définitions données ici s'inspirent de l'œuvre de Jacques Tits entre 1954 et 1962 consacrée aux géométries d'incidence, aux immeubles et à leurs relations avec les groupes, mais ces notions et relations ne sont pas supposées connues et ne sont pas nécessaires pour comprendre ce qui suit.

La présentation s'efforce de demeurer aussi élémentaire que possible.

Les motivations sont à trouver dans diverses « causeries polyédriques » faites par Raymond Dony et moi-même.

A mon sens, il n'est pas possible actuellement de donner une définition plus simple des polygones et polyèdres sans s'exposer à des erreurs fondamentales.

Il va de soi que cet exposé n'est pas adapté à l'enseignement pour de jeunes élèves.

L'évolution historique des définitions chez Euclide, Euler, Legendre et d'autres est un complément passionnant que je traiterai dans un autre texte.

Définition d'un polygone

Cette définition comporte trois notions primitives (ou premières) qui sont celles de sommet, celle d'arête et celle de relation d'incidence. Ces notions sont soumises à des conditions ou axiomes.

(P) Un polygone est constitué par la donnée de deux ensembles non vides disjoints S et A et d'une relation I qui est un sous-ensemble du produit S x A.

Les éléments de S sont appelés **sommets**.

Les éléments de A sont appelés **arêtes**.

On dit que I est la **relation d'incidence** et ses éléments sont appelés **chambres**.

Si (s, a) est un élément de I, on dit que « s est incident à a », que « a est incident à s » et que « s et a sont incidents ».

Ces données sont soumises aux conditions suivantes :

(A1) Tout sommet est incident à deux arêtes.
(A2) Toute arête est incidente à deux sommets.
(A3) Connexité : pour tout sommet s et toute arête a, il existe une suite finie

$$s = x_1, x_2, \ldots, x_n = a$$

dans laquelle tout couple d'éléments consécutifs sont incidents.

Commentaires

1. Les noms « sommet » et « arête » importent peu. Nous en avons besoin dans l'expression des énoncés ci-dessus. On pourrait les remplacer par « chaise » et « table » sans affecter la structure du polygone. En d'autres termes, nous ne nous intéressons pas à la nature des sommets et des arêtes.

2. Si on affaiblit (A1) et (A2) en exigeant que tout sommet et toute arête sont incidents à deux éléments au plus, on ouvre la porte à des pré-polygones qui englobent les polygones et les « chemins polygonaux » de la géométrie élémentaire.

3. Sommets et arêtes jouent le même rôle. Il y a un principe de dualité. Tout polygone (S, A, I) possède un dual (A, S, I*) dans lequel (a, s) est un élément de I* si et seulement si (s, a) est un élément de I.

Définition

Soient (S, A, I) et (S', A', I') deux polygones. Un **isomorphisme** du premier sur le second est une paire de bijections de S sur S' et de A sur A' qui transforme toute chambre de I en une chambre de I'. La propriété réciproque, à savoir que toute chambre de I' est image d'une chambre de I, est automatique. Comme toujours, un isomorphisme de (S, A, I) sur lui-même est appelé un **automorphisme**.

Théorèmes

1. Pour tout naturel $n \geq 2$ et pour n infini dénombrable, il existe un polygone ayant n sommets.

2. Deux polygones sont isomorphes si et seulement s'ils ont le même nombre de sommets et ce nombre n est infini dénombrable ou un naturel $n \geq 2$.

3. Si (S, A, I) est un polygone dont (s, a) et (s', a') sont deux chambres, il existe un et un seul automorphisme de (S, A, I) transformant (s, a) en (s', a'). Tout polygone est **régulier**.

4. Le groupe des automorphismes d'un polygone de n sommets est le groupe diédrique d'ordre 2n.

Commentaires

1. Les démonstrations ne sont ni triviales, ni très difficiles. Nous les réservons à l'exposé oral.

2. Nous voyons apparaître deux polygones peu classiques. D'une part, le digone ou polygone à deux sommets, que nous pouvons cependant observer sur toute arête de tout polyèdre. d'autre part, le polygone infini qui n'est autre que la droite sur les nombres entiers.

Polygone plongé

Soit E le plan (euclidien), l'espace (euclidien) ou tout autre espace dans lequel la définition suivante a un sens. Un polygone (S, A, I) est dit **plongé** dans E ou **polygone de E** si S est un ensemble de points de E et si A est un ensemble de segments fermés de E tel que toute extrémité d'une arête soit un sommet. Le polygone est dit **régulier** si chacun de ses automorphismes s'étend en automorphisme de E.

Définition d'un polyèdre

Cette définition comporte quatre notions primitives (ou premières) qui sont celles de sommet, celle d'arête, celle de face et celle de relation d'incidence. Ces notions sont soumises à des conditions ou axiomes.

(P) Un polyèdre est constitué par la donnée de trois ensembles non vides disjoints S, A et F et d'une relation I qui est un ensemble d'éléments du produit S x A x F.

Les éléments de S sont appelés **sommets**.

Les éléments de A sont appelés **arêtes**.

Les éléments de F sont appelés **faces**.

On dit que I est la **relation d'incidence**. Les éléments de I sont appelés **chambres**.

Si x et y sont deux éléments (sommets, arêtes ou faces) d'une même chambre, on dit que x et y sont **incidents**.

On appelle **mur** toute paire d'éléments incidents.

Ces données sont soumises aux conditions suivantes :

- (A1) Pour tout sommet s, l'ensemble des arêtes et des faces incidents à s muni de la relation d'incidence induite par I est un polygone.
- (A2) Pour toute face f, l'ensemble des arêtes et des sommets incidents à f muni de la relation d'incidence induite par I est un polygone.
- (A3) Pour toute arête a, l'ensemble des sommets et faces incidents à a muni de la relation induite par I est un digone.
- (A4) Connexité : pour tout sommet s et toute face f, il existe une suite finie
$$s = x_1, x_2, \ldots, x_n = f$$
dans laquelle tout couple d'éléments consécutifs sont incidents.

Commentaires

1. Les noms « sommet », « arête » et « face » importent peu. Nous en avons besoin dans l'expression des énoncés ci-dessus. On pourrait les remplacer par « chaise », « table » et « chope » sans affecter la structure de polyèdre. En d'autres termes, nous ne nous intéressons pas à la nature des sommets, arêtes et faces.

2. Si on affaiblit (A1) et (A2) en exigeant que tout sommet et toute façe soient incidents à un pré-polygone et qu'on procède de même en (A3), on ouvre la porte à des pré-polyèdres qui englobent les développements de polyèdres de la géométrie élémentaire.

3. Sommets et faces jouent le même rôle. Il y a un principe de dualité. Tout polyèdre (S, A, F, I) possède un dual (F, A, S, I).

4. Il est intéressant de modifier (A3) en y remplaçant le mot digone par le mot polygone. On obtient alors un principe de trialité. Les ensembles structurés ainsi définis sont appelés « géométries minces de rang trois ».

Définitions

Soient (S, A, F, I) et (S', A', F', I') deux ployèdres. Un **isomorphisme** du premier sur le second est un trio de bijections de S sur S', de A sur A' et de F sur F' qui transforme toute chambre du premier en une chambre du second. La propriété réciproque, à savoir que toute chambre du second est image d'une chambre du premier, est automatique. Comme toujours, un isomorphisme de (S, A, F, I) sur lui-même est appelé automorphisme.

Un polyèdre est dit **régulier** si pour toute chambre c et toute chambre c' il existe un automorphisme transformant c en c'.

Théorèmes

1. Tout mur est inclus à deux chambres

2. Si on décide que deux chambres sont adjacentes quand elles ont un mur commun, l'ensemble des chambres est connexe pour la relation d'adjacence.

3. Si c et c' sont deux chambres, il existe au plus un automorphisme transformant c en c'.

4. Dans un polyèdre régulier, tout mur est fixé par un et un seul automorphisme et celui-ci est d'ordre deux.

Commentaires

1. Les démonstrations ne sont ni triviales, ni très difficiles. Nous les réservons à l'exposé oral.

2. Il ne faut pas espérer une classification exhaustive des polyèdres comme ce fut le cas pour les polygones. Le monde des polyèdres est sauvage. Il ne faut même pas espérer une classificaton exhaustive des polyèdres réguliers : ce monde-là est sauvage, lui aussi. Il est possible de définir des revêtements de polyèdres et de classer les polyèdres réguliers simplement connexes.

3. On pourrait exprimer la « convexité » en utilisant la formule d'Euler comme axiome. Dans la pratique habituelle, c'est ce qu'on fait presque toujours de manière implicite.

Polyèdre plongé

Soit E le plan (euclidien), l'espace (euclidien) ou tout autre espace dans lequel la définition suivante a un sens. Un polyèdre (S, A, I) est dit **plongé** dans E ou est un **polyèdre de E** si S est un ensemble de points de E et si A est un ensemble de segments fermés de E tel que toute extrémité d'une arête soit un sommet. Le polyèdre est dit **régulier dans E** s'il est régulier et si chacun de ses automorphismes s'étend en automorphisme de E.

Commentaires

1. Il est possible d'élaborer une théorie des développements de polyèdres donnant lieu à un beau théorème général.

2. Il est possible d'éviter les répétitions que nous avons faites en séparant les polygones et les polyèdres. Il y a une définition unifiée et généralisée des polytopes et des géométries minces. Sur le plan groupal, elle se rapproche des groupes de Coxeter.

3. Nous venons de voir qu'une théorie des polyèdres par la géométrie d'incidence et sans topologie est bien développée. L'exception actuelle est le traitement de la formule d'Euler généralisée qui demeure tributaire de la topologie, peut-être à titre provisoire.

4. Il peut arriver qu'un polyèdre de E soit régulier en tant que polyèdre mais qu'il ne soit pas régulier dans E. Pensons à un parallélépipède rectangle. Il y a d'autres contre-exemples plus spectaculaires.

CeDoP

CENTRE DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUE

Le Centre de Documentation Pédagogique de l'ULB édite et diffuse des brochures à caractère didactique, destinées essentiellement aux enseignants et aux étudiants du secondaire. Ces brochures peuvent être utilisées par les enseignants comme outil de recyclage. Elles peuvent également être employées en classe comme outil didactique.

Un catalogue gratuit est disponible sur simple demande. Il peut également être consulté sur le site web de l'ULB (dans le menu de la page d'accueil, cliquez sur « vous êtes enseignant » et laissez-vous guider par les liens hypertexte). Les brochures les plus récentes sont proposées en format .pdf sur le site. Certains documents sont disponibles sous forme de disquette ou de CD-ROM.

Pour tout renseignement ou toute commande :

Yvon Molinghen
Tél. 02/650.40.35
e-mail cedop@ulb.ac.be

Autres titres disponibles en mathématiques

- Apprendre à parler graphique
- Cours de mathématique du secondaire (disquettes ou CD-ROM)
- Développer le concept de nombre depuis les méthodes intuitives jusqu'aux algorithmes et la rationalisation
- Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques
- Huit questions à propos du Lotto
- L'ellipse ou la rencontre d'un spirographe, d'une échelle qui tombe et d'une attraction foraine
- L'histoire des logarithmes
- L'ombre à la lampe sur la TI92
- La tradition mathématique
- Le cas de la géométrie
- Le professeur de mathématiques
- Les dérivées et... les boîtes de conserve
- Les tribulations de l'équation du second degré
- Lieux géométriques faciles... mais déroutants
- Modéliser les stratégies face à un test à choix multiple
- Quelques propositions de leçons intégrant le logiciel DERIVE.
  Partie 1 : les intégrales
- Quelques propositions de leçons intégrant le logiciel DERIVE.
  Partie 2 : à propos des fonctions
- Suites de polygones
- Une étude de coniques... pour ne pas tomber en panne de kérosène
- Utilisation du logiciel DERIVE en algèbre linéaire

Université Libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique – CeDoP
50, avenue Franklin Roosevelt (CP 178)
Tél. 02/650.40.35   Fax 02/650.47.20   e-mail cedop@ulb.ac.be

Dépôt légal D/2002/6890/01
Prix de vente : 1 €