Monique FRÉDÉRICKX

ULB

Modéliser les stratégies face à un test à choix multiple

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

centre de documentation pédagogique

Mise en page : Marie-Line Haesevelde
Graphiques : Nicole Cardon
Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-10-5

MATHÉMATIQUE

MODÉLISER
LES STRATÉGIES
FACE À UN TEST
À CHOIX MULTIPLE

Frédérickx M.

PLAN

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

MATHÉMATIQUE

MODÉLISER
LES STRATÉGIES
FACE À UN TEST
À CHOIX MULTIPLE

Frédérickx M.

1. Présentation

1.1. Avant-propos :

La situation pédagogique décrite ci-dessous a été suggérée par Francis Buekenhout, professeur à l'U.L.B., au cours d'un atelier de mathématique du secondaire.

1.2. Niveau :

4^e ou 5^e année (mathématiques : 4 h/semaine)

1.3. Objectifs :

- Étude d'une fonction peu habituelle.
- Première confrontation avec les probabilités.
- Développement du sens critique lors de l'analyse d'une situation.

1.4. Résumé :

Un test de 10 questions à choix multiple est proposé aux élèves. Après correction du test, une discussion s'ouvre pour savoir quelle est la manière la plus économique de répondre à un questionnaire à choix multiple. Comment minimiser son effort et maximiser ses chances de réussite ? Cette situation permet d'introduire une fonction peu habituelle et un calcul de probabilités.

Le test comprend 10 questions. Le temps nécessaire pour y répondre est largement suffisant.

Pour chaque question, 3 réponses sont proposées dont une et une seule est correcte. Il y a donc 4 choix possibles par question : l'abstention ou une des trois réponses proposées.

L'évaluation se fait comme suit :

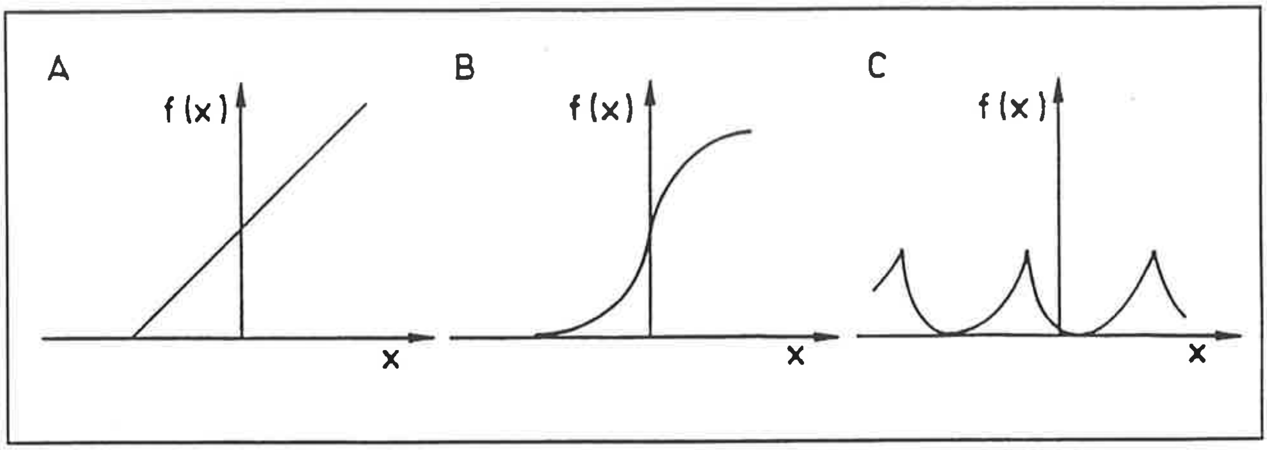
- réponse correcte : + 2 points,
- réponse fausse : - 1 point,
- abstention : 0 point.

Le seuil de réussite est de 10/20. Moins de dix points, c'est l'échec ; un score de 10 points ou plus, c'est la réussite, sans mention spéciale pour une note élevée.

Notons que sur les trois réponses proposées, l'une d'elles peut être éliminée facilement. Nous ne tiendrons compte de ce fait qu'en fin de discussion.

2. Test **MATHÉMATIQUE**

1. Le graphique de la fonction $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow x + \pi$ est :



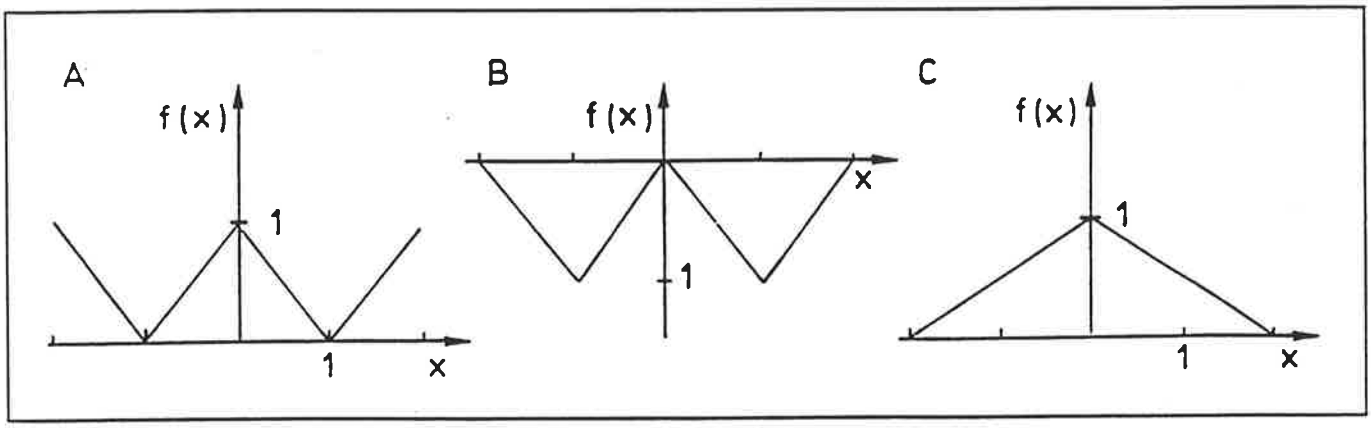
2. La période de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(x) = 1/3 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3} x\right)$ est égale à :

$A : \frac{3\pi}{2}$ $B : 2\pi$ $C : \frac{3}{2}$

3. Si la fonction $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

son graphe est :



MATHÉMATIQUE

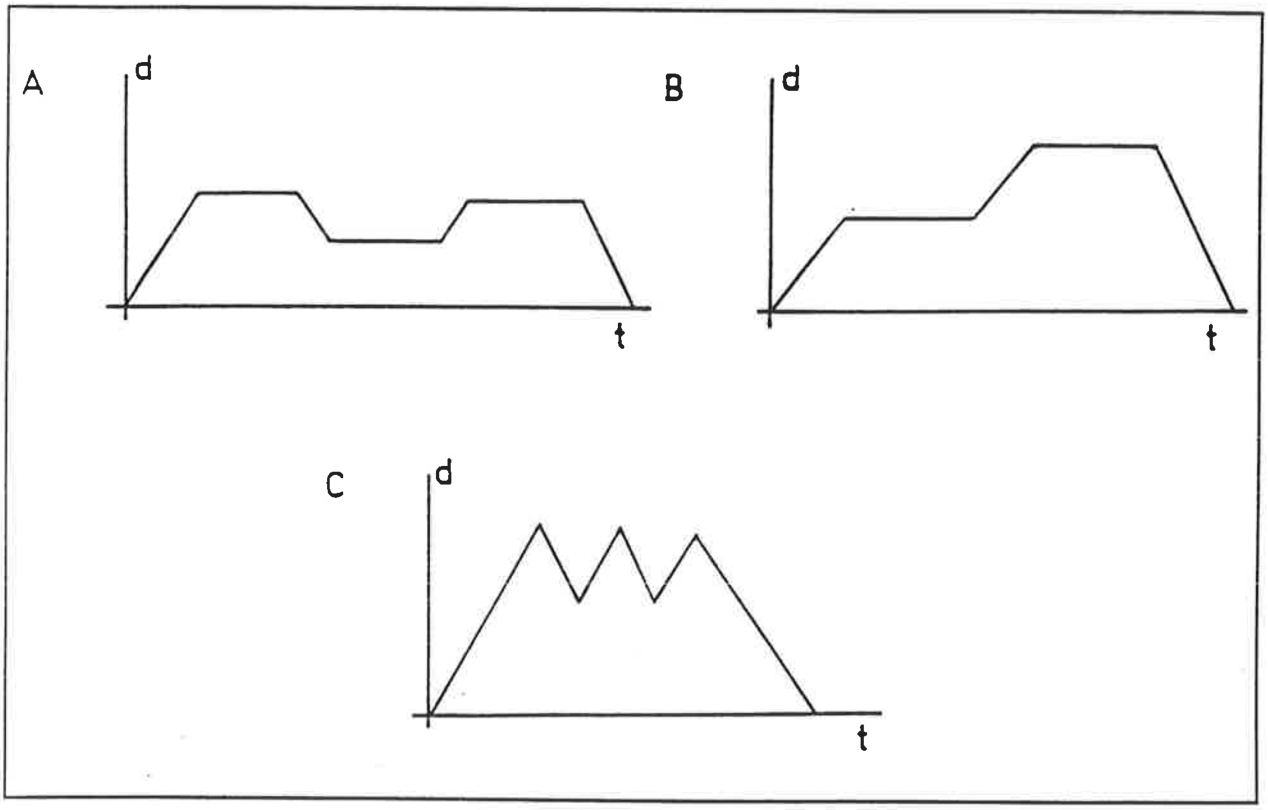
MODÉLISER
LES STRATÉGIES
FACE À UN TEST
À CHOIX MULTIPLE

Frédérickx M.

4. La moyenne arithmétique de 5 nombres vaut 5400. Si chaque nombre augmente de 100, de combien augmente sa moyenne arithmétique ?

   A : 5400
   B : 100
   C : 500

5. Deux cyclistes roulent à la même vitesse v lorsque la route est horizontale et à la même vitesse v' lorsque la route est en côte, avec $v > v'$. Leur parcours commun, qu'ils effectuent à une minute d'intervalle, est constitué d'une partie plate, puis d'une côte, puis à nouveau d'une partie plate. La distance d qui les sépare a été représentée, en fonction du temps t, selon l'un des graphiques suivants. Lequel ?



6. Pour trois nombres distincts a, b, c, définissons $(a, b, c) = a^b - b^c + c^a$. Alors, $(1, -1, 2)$ vaut :

   A : 4
   B : ∞
   C : 2

7. Que vaut le reste de la division de $\left(\left((x-1)^2-1\right)^3-1\right)^2$ par $x-1$?

   A : 12345
   B : 0
   C : 4

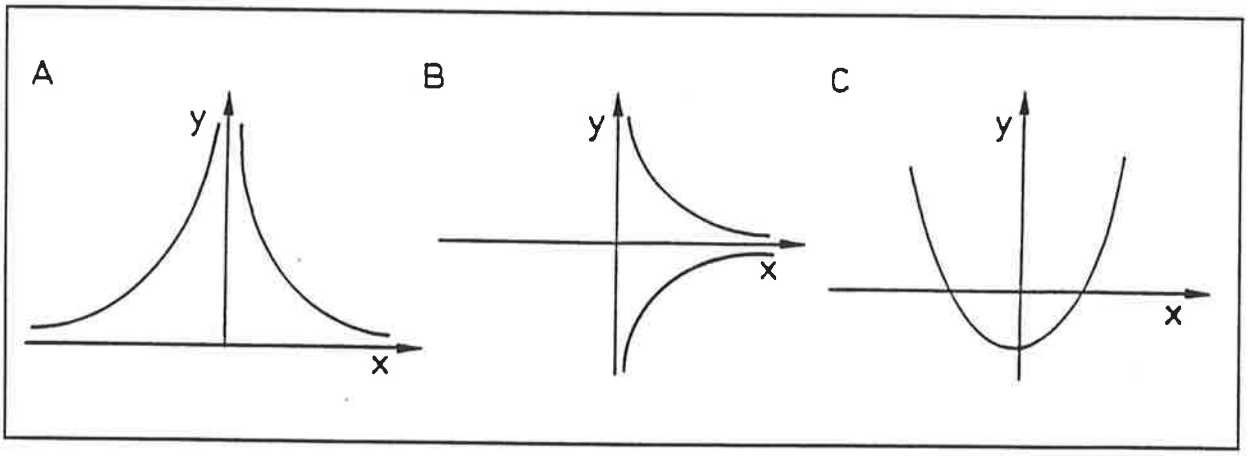
8. En ajoutant à un nombre naturel le quart de son tiers, on obtient 91. Quel est ce nombre ?

   A : 84
   B : 39
   C : 91

9. Dans un tournoi de *Mathoblisck*, chaque rencontre entre deux joueurs élimine l'un d'entre eux. Si 342 joueurs participent à un tel tournoi, combien de rencontres faudra-t-il organiser pour désigner le vainqueur ?

   A : 171
   B : 341
   C : 2

10. L'ensemble des points (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ satisfaisant à $x \cdot |y| = 1$ est représenté par :



MATHÉMATIQUE

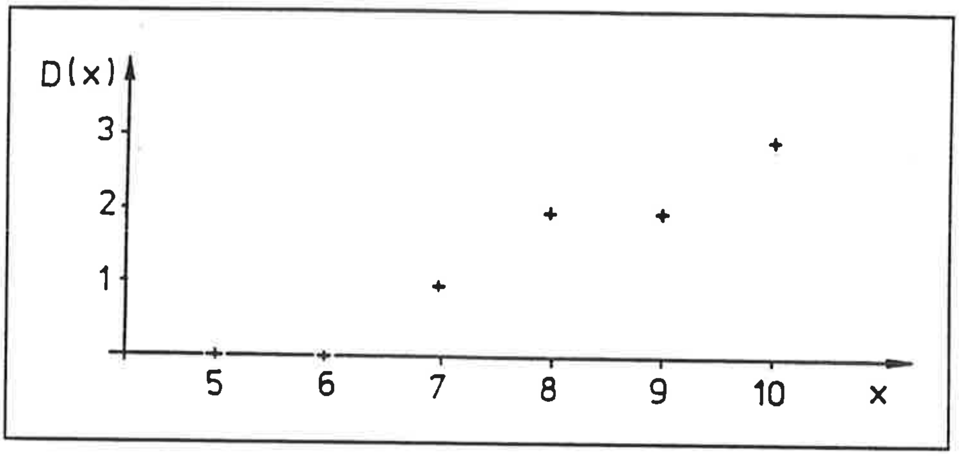
MODÉLISER
LES STRATÉGIES
FACE À UN TEST
À CHOIX MULTIPLE

Frédérickx M.

3. Comment réussir sans risque ou quel est le droit à l'erreur ?

Rappel : il faut obtenir au moins 10 points (seuil de réussite). Par conséquent, il faut répondre correctement à un minimum de 5 questions.
Une question se pose alors : si on répond à x questions, quel est le maximum de réponses fausses $D(x)$ que l'on peut se permettre sans échouer ?

Pour x =	5 réponses,	$D(x)$ =	0	réponse(s) fausse(s)
	6		0	
	7		1	
	8		2	
	9		2	
	10		3	



$D(x)$ est une fonction croissante mais pas strictement croissante. On en déduit que :
- si on répond à 5 questions, ce ne serait pas une attitude intelligente de choisir une 6ᵉ réponse puisque le droit à l'erreur reste le même,
- si on répond à 6 questions, on peut en toute sécurité choisir une 7ᵉ réponse,
- si on répond à 7 questions, on peut en toute sécurité choisir une 8ᵉ réponse,
- si on répond à 8 questions, ce ne serait pas une attitude intelligente de choisir une 9ᵉ réponse puisque le droit à l'erreur reste le même,
- si on répond à 9 questions, on peut en toute sécurité choisir une 10ᵉ réponse.

Un corollaire de ceci est qu'il est intelligent de répondre à 5, 8 ou 10 questions.

Règle de conduite :

Appelons x le nombre de réponses données et $D(x)$ le nombre maximum de réponses fausses permises (droit à l'erreur).
- Si $D(x + 1) = D(x)$,
  alors, il vaut mieux choisir x réponses.
- Si $D(x + 1) = D(x) + 1$,
  alors, il serait complètement fou de choisir x plutôt que $x + 1$ réponses.

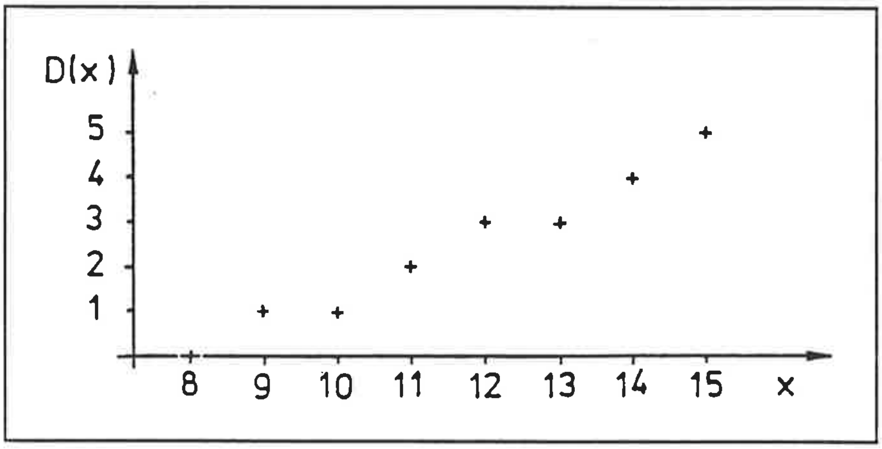
Essayons de mieux maîtriser la fonction $D(x)$ qui dépend du nombre N de questions du test.

Dans le cas étudié précédemment, $N = 10$.

Examinons maintenant le cas où $N = 15$.

La manière de coter le test reste identique mais le minimum requis pour réussir est cette fois de 15 points. On doit donc répondre à au moins 8 questions.

Pour x = 8 réponses,	$D(x)$ = 0 réponse(s) fausse(s)
9	1
10	1
11	2
12	3
13	3
14	4
15	5



Pour $N = 15$ questions, notre règle de conduite conseille donc de répondre à 9, 12 ou 15 questions.

4. Avec les mêmes règles de cotation, quelle est la loi générale valable pour tout N ?

Rappelons que si x est le nombre de réponses fournies, nous appelons $D(x)$ la fonction qui donne le nombre maximum de réponses fausses permises.

4.1. Étudions d'abord le cas où N **est pair** ($N = 2n$).

Le score minimum qui doit être atteint est dans ce cas de $2n$ et il faut répondre à au moins n questions.

- Si $x = n$, le score obtenu est au maximum de $2n$ et $D(n) = 0$.
- Si $x = n + 1$, le score obtenu est au maximum de $2n + 2$. Une réponse fausse impliquerait un score de $2n - 1$ qui est inférieur au score désiré. Par conséquent, $D(n + 1) = 0$.
- Si $x = n + 2$, le score obtenu est au maximum de $2n + 4$. Une réponse fausse impliquerait un score de $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$ qui est supérieur au score désiré.

Frédérickx M.

Deux réponses fausses impliqueraient un score de $2n$ - 2. Par conséquent, $D(n + 2) = 1$.

- Si $x = n + 3$, le score obtenu est au maximum de $2n + 6$. Une réponse fausse impliquerait un score de $2(n + 2) - 1 = 2n + 3$ qui est supérieur au score désiré. Deux réponses fausses impliqueraient un score de $2(n + 1) - 2 = 2n$ qui est le score désiré. Par conséquent, $D(n + 3) = 2$.

De manière générale,

si $x = n + i$ où $0 \leq i \leq n$, le score obtenu est au maximum $2n + 2i$.

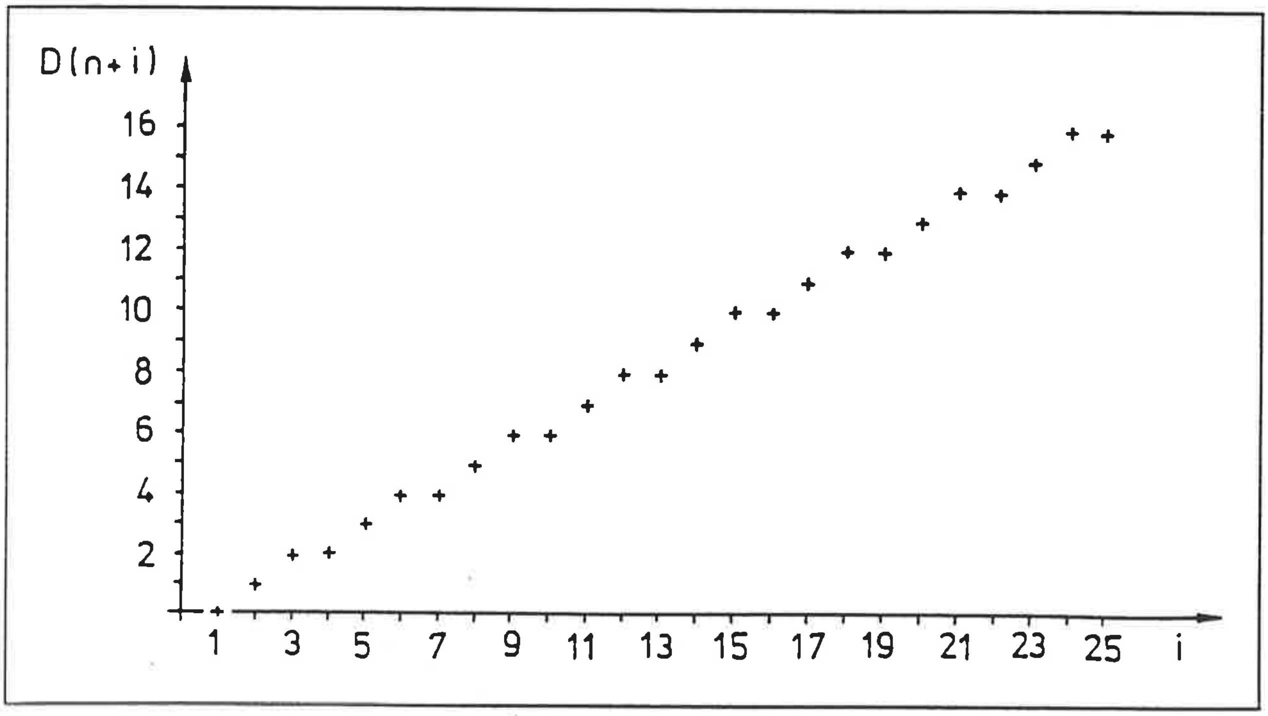
Un nombre f de réponses fausses impliquerait un score de

$2(n + i - f) - f = 2n + 2i - 3f$.

On a donc la condition $2n + 2i - 3f \geq 2n$ ou $f \leq 2/3 \cdot i$

Si on répond à $n + i$ questions, le nombre de réponses fausses doit donc valoir au maximum la partie entière de $2/3 \cdot i$:

ou $D(n + i) = \mathbb{E}(2/3 \cdot i)$ où $0 \leq i \leq n$.



4.2. Étudions maintenant le cas où **N est impair** ($N = 2n + 1$).

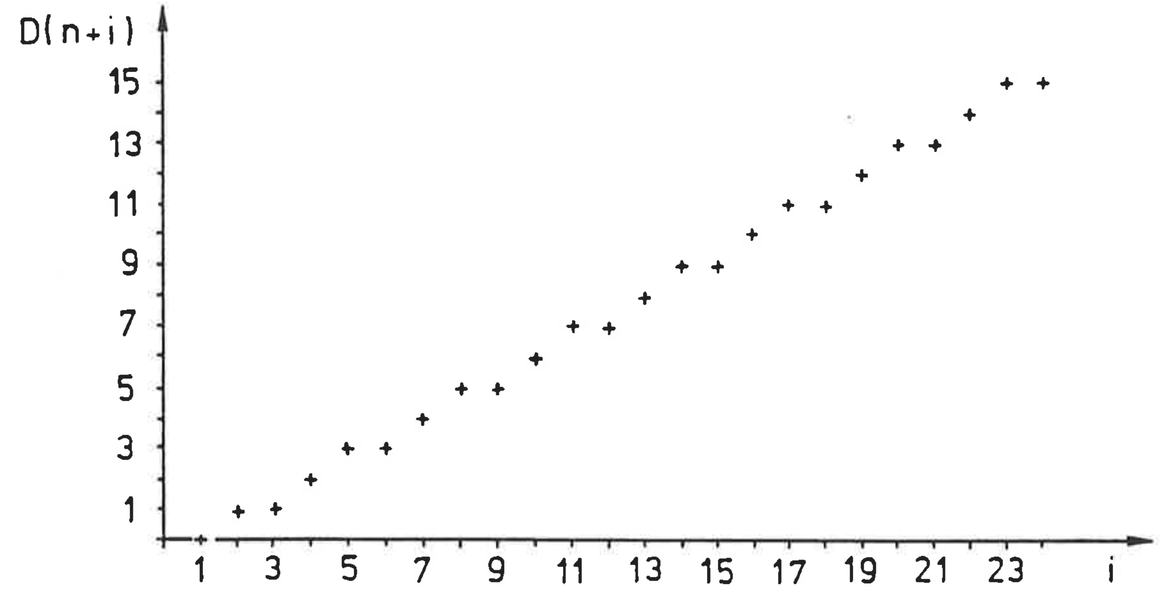
Le score minimum qui doit être atteint est dans ce cas de $2n + 1$.

Si on répond à $x = n + i$ ($1 \leq i \leq n + 1$) questions, le score obtenu est au maximum $2n + 2i$. Un nombre f de réponses fausses impliquerait un score de

$2(n + i - f) - f = 2n + 2i - 3f$.

On a cette fois la condition $2n + 2i - 3f \geq 2n + 1$ ou $f \leq \frac{2i - 1}{3}$

Si on répond à $n + i$ questions, le nombre maximum de réponses fausses doit donc valoir $D(n + i) = \mathbb{E}(\frac{2i - 1}{3})$ où $1 \leq i \leq n + 1$



5. Flash-back sur le problème initial ($N = 10$)

Rappel : les bons choix pour réussir le test consistent à donner 5, 8 ou 10 réponses.

Quel est le nombre C de réponses dont on est certain ?

Nous n'envisageons pas le cas où $C = 0$, 1, 2 ou 3. Nous faisons l'hypothèse optimiste que l'élève qui effectue le test est certain de sa réponse pour au moins 4 des questions.

Si $C \geq 5$, il n'y a pas de problème.

Si $C = 4$, que faire des 6 autres questions ?

Pour chaque question, sur les trois réponses proposées, une est fausse de toute évidence. Il s'agit donc, avant tout, de la trouver et de l'éliminer.

Question : avec **C = 4** et **deux réponses possibles par question**, qu'arrive-t-il si on choisit la réponse au hasard ?

Est-il avantageux de répondre ainsi à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 questions ?

MATHÉMATIQUE

MODÉLISER
LES STRATÉGIES
FACE À UN TEST
À CHOIX MULTIPLE

Frédérickx M.

Un peu de calcul de probabilités va nous éclairer.

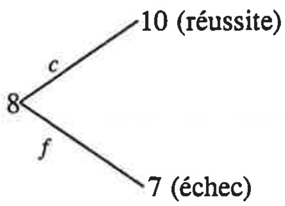
Si $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est le nombre de questions auxquelles on répond au hasard (en plus des 4 réponses sûres déjà acquises), appelons $\mathcal{P}(x)$ la probabilité de réussite en répondant à ces x questions supplémentaires.

- Cas où $x = 1$

Au départ, on a 4 réponses correctes ou encore 8 points.

Si la réponse supplémentaire choisie est correcte, le score obtenu sera de 10 points. Si elle est fausse, le score sera de 7 points. Le choix entre ces deux réponses étant équiprobable, chacun de ces résultats a une probabilité de 1/2 d'être atteint.

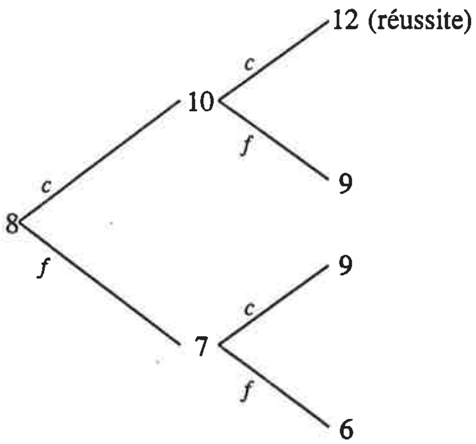
Nous schématisons ceci par l'arbre suivant :



$\mathcal{P}(1) = 1/2$

N.B. : c signifie réponse correcte et f signifie réponse fausse.

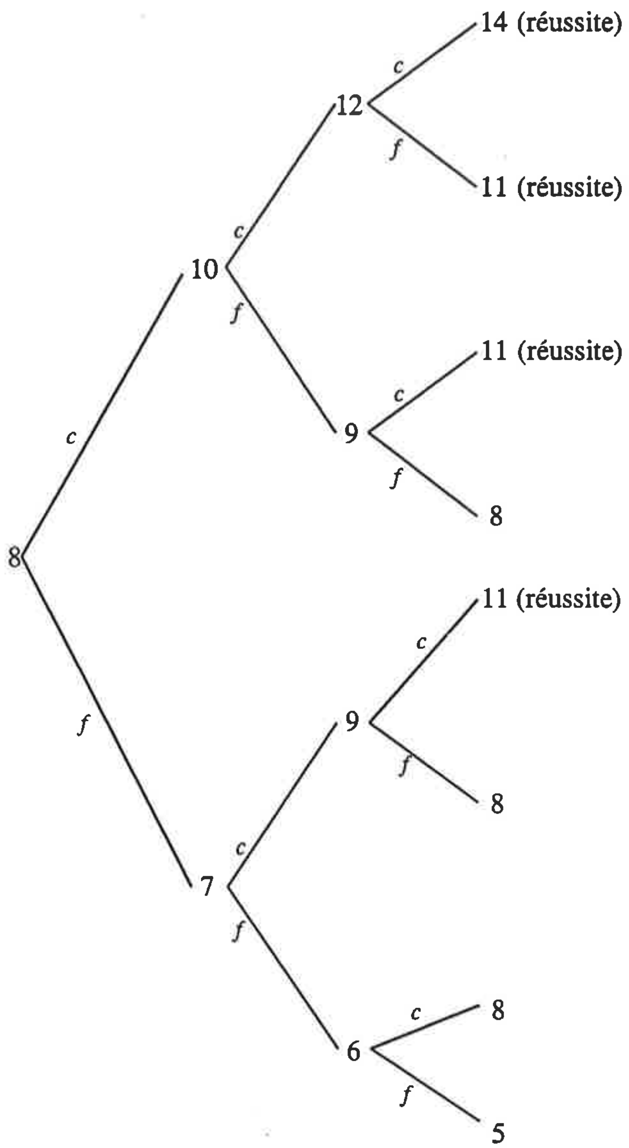
- Cas où $x = 2$



$\mathcal{P}(2) = 1/4$

Nous obtenons un moins bon résultat que pour $x = 1$. Ce n'est pas étonnant : on a vu qu'il ne fallait pas répondre à 6 questions.

- **Cas où $x = 3$**



$\mathcal{P}(3) = 4/8 = 1/2$

- Cas où $x = 4$

L'arbre devient difficile à dessiner ; c'est pourquoi nous nous contentons simplement de signaler les scores situés sur les 16 dernières branches de l'arbre.

16, 13, 13, 10, 13, 10, 10, 7, 13, 10, 10, 7, 10, 7, 7, 4.

Pour simplifier l'écriture, transcrivons ces résultats à l'aide d'une notation exponentielle et regroupons ainsi les termes semblables :
$16, 13^4, 10^6, 7^4, 4$
$\mathcal{P}(4) = 11/16 = 0,6875$.
Pour 8 réponses, on a un résultat nettement meilleur que pour 5 réponses. Surprenant, non ?

- Cas où $x = 5$

On obtient :
$18, 15^5, 12^{10}, 9^{10}, 6^5, 3$
$\mathcal{P}(5) = 16/32 = 1/2$.

- Cas où $x = 6$

On obtient :
$20, 17^6, 14^{15}, 11^{20}, 8^{15}, 5^6, 2$
$\mathcal{P}(6) = 42/64 = 0,65625$.

Nous avions déjà vu qu'une bonne stratégie était de répondre à 5, 8 ou 10 questions. Nous savons maintenant que, étant sûr de quatre réponses et répondant au hasard aux autres questions, la meilleure stratégie est de répondre à 8 questions.

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Dépôt légal D/1995/6890/10
Prix de vente : ~~40 FB~~
1 €