

Monique FRÉDÉRICKX
Monique PARKER



Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques



Les Cahiers du CeDoP

Le contenu de ce document n'engage que la seule responsabilité de son auteur.
Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle,
par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable,
est illicite et expose le contrevenant à des poursuites judiciaires.

Copyright © Université libre de Bruxelles - Centre de Documentation Pédagogique (CeDoP) - 1995

Mise en page : Marie-Line Haesevelde

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-20-2

PLAN

Avant-propos	p. 3
1. Graphique « classique »	p. 5
2. Graphique dans des axes semi-logarithmiques	p. 7
3. Graphique dans des axes logarithmiques	p. 10
4. Quelques applications	p. 12
5. Une convention bien utile	p. 22
6. Le papier à simple ou double échelle logarithmique	p. 24
Annexes	p. 28

Niveau : 6^e année (toutes sections)

Objectif : présenter, dans des domaines variés, des utilisations pratiques des échelles logarithmiques.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un accord de coopération entre l'UREM et le CREM a.s.b.l. (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), avec le soutien de la Direction générale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation.

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs

Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99



Avant-propos

MATHÉMATIQUE

L'avènement des calculatrices de poche permet d'utiliser les logarithmes de façon simple et efficace. Cependant, bien souvent les élèves appuient sur les touches sans vraiment savoir ce que sont ces logarithmes ni à quoi ils servent. Parfois même, la fonction logarithme étudiée au cours de mathématiques n'a pour eux que peu de rapport avec les logarithmes du cours de physique ou du cours de chimie.

Les graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques présentent un double intérêt : ils sont utilisés dans des domaines fort variés et ils aident à visualiser une échelle logarithmique.

Le papier à simple ou double graduation logarithmique n'est plus guère utilisé dans les cours de sciences. Nous incluons néanmoins quelques exemples de graphiques dessinés sur ces papiers. Ils peuvent bien sûr être reproduits sur du papier ordinaire mais la manipulation de la graduation imprimée est un exercice de compréhension de plusieurs notions : les logarithmes, la pente d'une droite, l'équation d'une droite, ...

Le point de vue que nous avons adopté est très pragmatique : le texte s'adresse surtout aux utilisateurs des logarithmes, non-mathématiciens de formation. Les professeurs de mathématiques y trouveront peut-être quelques exemples leur permettant de faire de l'interdisciplinarité avec les cours de sciences.

À titre d'exemple, considérons les mesures suivantes :

Le diamètre d'un électron mesure $0,000\ 000\ 000\ 006\ \text{mm} = 6 \cdot 10^{-15}\ \text{m}$.

Le diamètre d'un atome d'hydrogène mesure $0,000\ 000\ 1\ \text{mm} = 10^{-10}\ \text{m}$.

Le diamètre du virus de la fièvre aphteuse mesure $12\ \text{nanomètres} = 1,2 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$.

Un homme mesure en moyenne $1,7\ \text{m}$.

Le Mont Éverest a une hauteur de $8\ 880\ \text{m}$.

Le diamètre de la lune mesure $3\ 472\ \text{km}$.

Le diamètre équatorial de la terre mesure $12\ 757\ \text{km} \cong 1,2 \cdot 10^7\ \text{m}$.

La distance moyenne terre-lune mesure $353\ 680\ \text{km} \cong 3 \cdot 10^8\ \text{m}$.

Le diamètre du soleil considéré comme sphérique mesure $1\ 390\ 000\ \text{km} \cong 10^9\ \text{m}$.

La distance moyenne terre-soleil mesure $149,5\ \text{millions de km} \cong 1,5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$.

Une année lumière vaut $9,461 \cdot 10^{12}\ \text{km} \cong 10^{16}\ \text{m}$.

Le diamètre de notre galaxie mesure $90\ 000\ \text{années lumières} \cong 10^{21}\ \text{m}$.

Comment représenter toutes ces mesures sur une **même** échelle ?

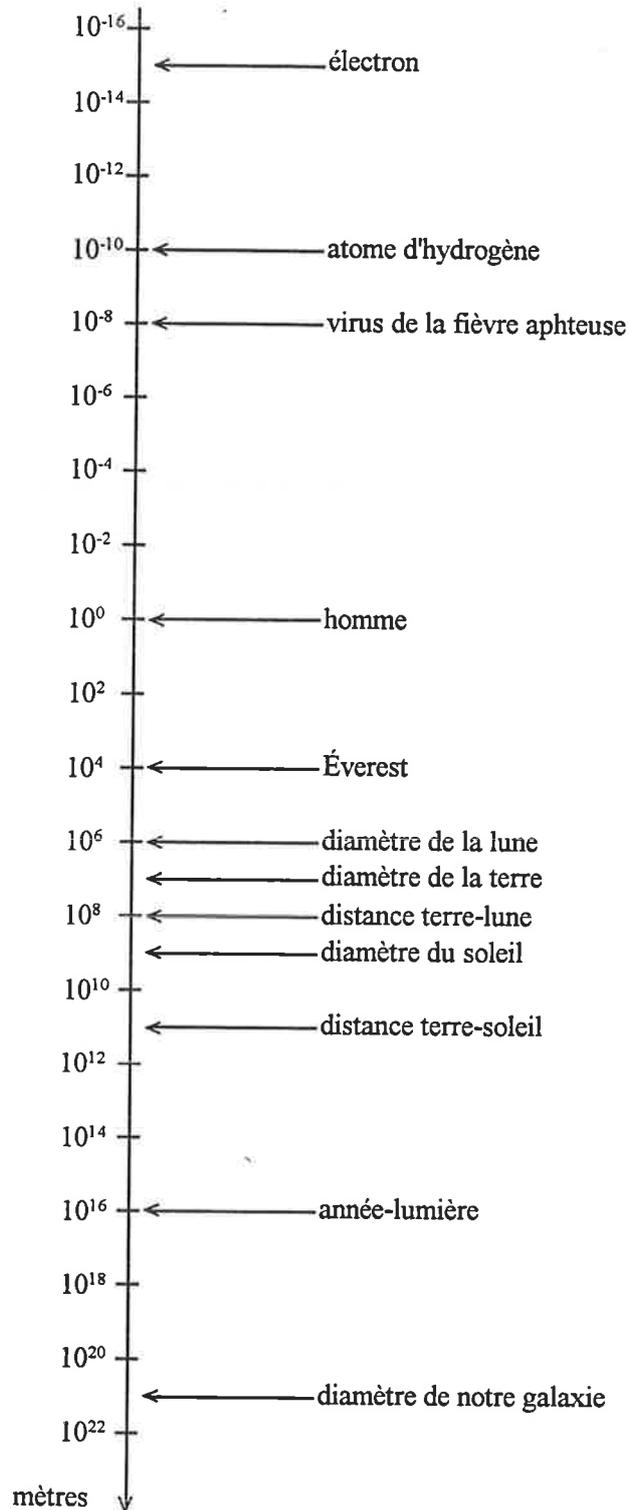
Si on tente de représenter les mesures des différentes grandeurs précitées sur la droite graduée linéairement, on se rend vite compte que le résultat est confus et illisible.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

La représentation suivante est nettement plus claire :



Une telle graduation de la droite est appelée **échelle logarithmique**.

Les échelles logarithmiques sont également utilisées dans des graphiques à 2 dimensions. L'objet de ce dossier est d'expliquer leur emploi et la manière de les utiliser à bon escient.

1. Graphique « classique »

La plupart des fonctions sont habituellement représentées graphiquement dans le plan vectoriel rapporté à une base orthonormée. L'étude complète du graphique d'une fonction dans ces conditions est parachevée en cinquième secondaire.

Néanmoins dans certains cas, le graphique obtenu est peu utilisable par l'expérimentateur.

Exemples :

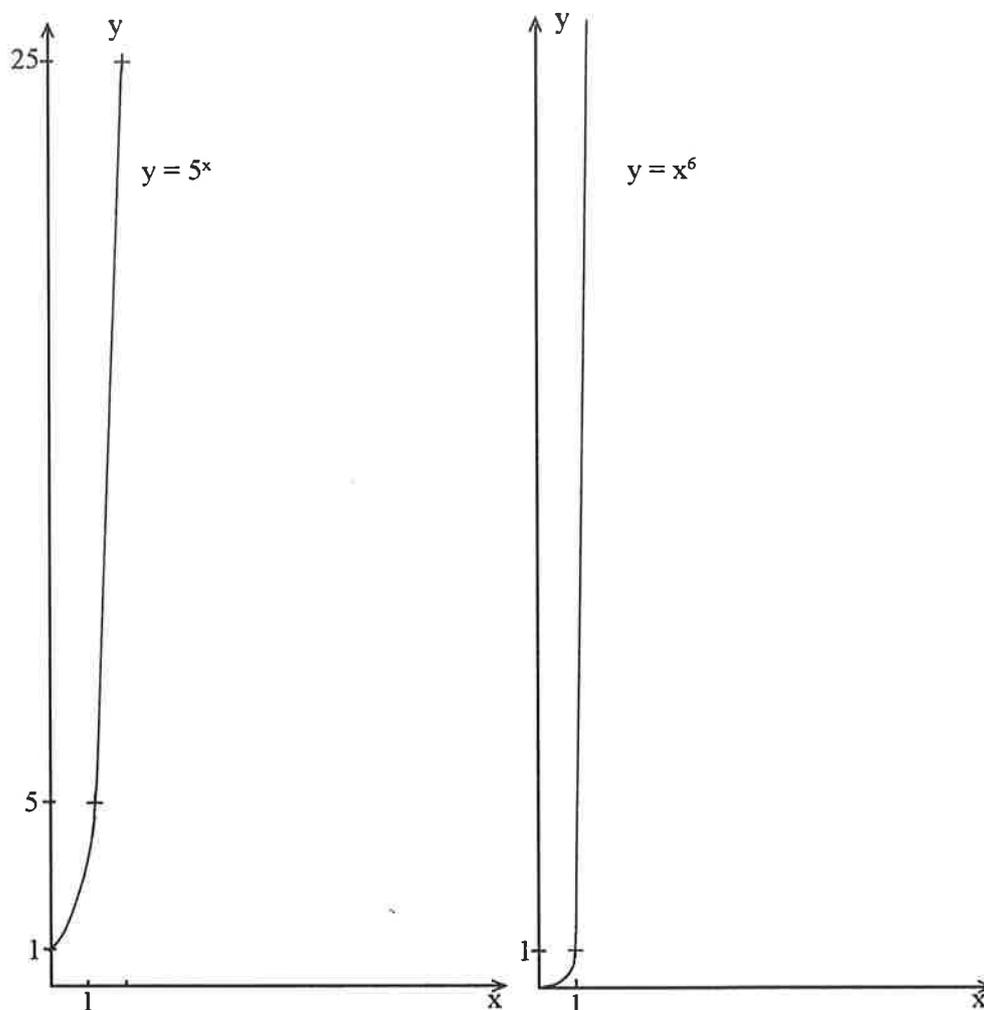


figure 1

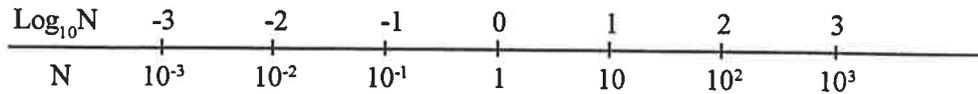
On peut bien sûr utiliser des échelles différentes sur les deux axes. La lecture du graphique reste néanmoins difficile.

La représentation graphique des phénomènes à croissance ou décroissance rapide étant peu commode dans des échelles linéaires, on utilise dans ce cas des graphiques dans lesquels l'un ou les deux axes sont logarithmiques, c'est-à-dire qu'au lieu de porter sur cet axe les valeurs d'une grandeur N , on y porte les valeurs de $\log N$.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

L'échelle logarithmique ramène à distance « raisonnable » les grands nombres et « déroule » les petits nombres (compris entre 0 et 1).



La représentation d'une fonction dans un repère dont l'un ou les deux axes sont gradués par une échelle logarithmique est particulièrement intéressante quand ces graphiques deviennent alors des droites. Nous verrons que c'est le cas pour les fonctions du type $y = b \cdot a^x$ ou $y = b \cdot x^a$.

Nous ne considérons ici que des fonctions positives d'une variable positive ($y = f(x)$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$). Les graphiques classiques de ces fonctions se situent donc entièrement dans le premier quadrant.

En sciences, les grandeurs étudiées vérifient souvent cette condition. De plus, si une grandeur est négative, un changement d'unités peut souvent la rendre positive. Cette restriction n'est donc pas importante pour l'expérimentateur.

Frédéricx M.
Parker M.

2. Graphique dans des axes semi-logarithmiques (lin-log)

2.1. Pour les fonctions exponentielles du type $y = a^x$ ($a > 0$ et $a \neq 1$) (1), on utilise fréquemment des axes « lin-log ». Dans une telle représentation, les axes sont perpendiculaires et pour chaque couple (x, y) vérifiant l'équation (1), on porte en abscisse la valeur de x et en ordonnée la valeur de $y^* = \log y$. La valeur de la base du logarithme est au choix de l'utilisateur. Nous supposons ici que les logarithmes sont en base 10.

Exemple : si la fonction $y = 5^x$ est représentée sur du papier usuel (les deux axes ayant une échelle linéaire), les points suivants sont à reporter sur le graphique :

x	$y = 5^x$
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	15625

Dans des axes semi-logarithmiques, on reporte sur le graphique les valeurs suivantes :

x	$y^* = \log y$
0	$\log 1 = 0$
1	$\log 5 \cong 0,7$
2	$\log 25 \cong 1,4$
3	$\log 125 \cong 2,1$
4	$\log 625 \cong 2,8$
5	$\log 3125 \cong 3,5$
6	$\log 15625 \cong 4,2$

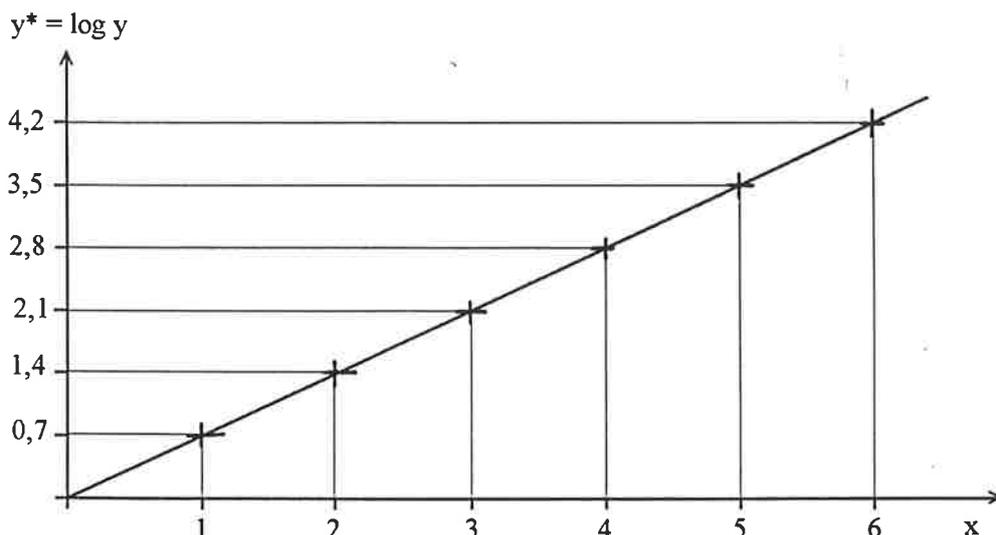


figure 2

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

2.2. La fonction $y = a^x$ dans des axes lin-log

La fonction $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) est représentée par une droite dans des axes lin-log.

Dans les axes x , y^* , cette droite a pour équation $y^* = \log a \cdot x$

Elle passe par l'origine et sa pente vaut $\log a$.

Si le graphique semi-logarithmique s'avère être une droite passant par l'origine, on sait que la fonction est du type $y = a^x$.

Si on ne connaît pas a priori la valeur de a , on peut la trouver à partir du graphique : pour $x = 1$, $y^* = \log a = \alpha$ d'où $a = 10^\alpha$.

Frédéricx M.
Parker M.

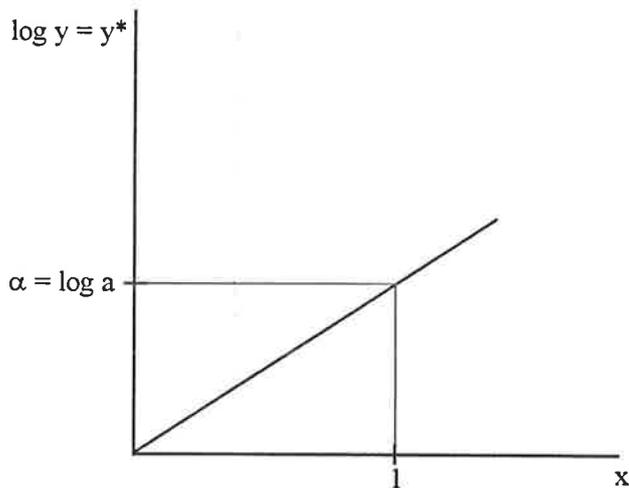


figure 3

La valeur de a peut aussi se trouver à partir de deux points du graphique : la pente $\log a$ de la droite vaut

$$\frac{y_2^* - y_1^*}{x_2 - x_1} = \alpha \quad \text{d'où } a = 10^\alpha$$

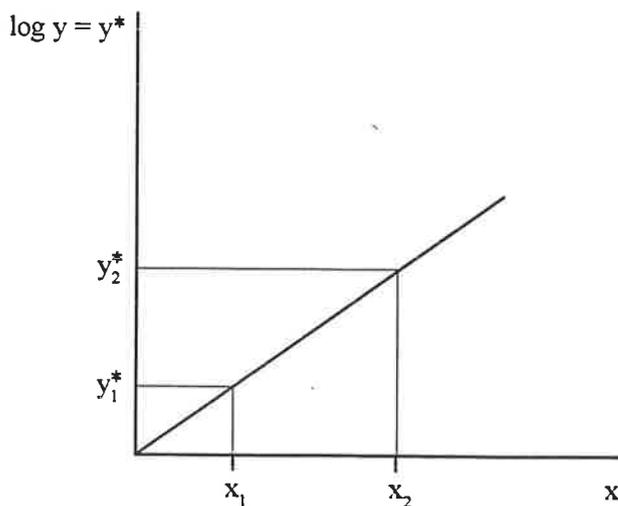


figure 4

2.3. La fonction $y = b \cdot a^x$ dans des axes lin-log

La fonction $y = b \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) est représentée par une droite dans des axes lin-log.

Dans les axes x, y^* , cette droite a pour équation $y^* = \log a \cdot x + \log b$ (2)

Exemple :

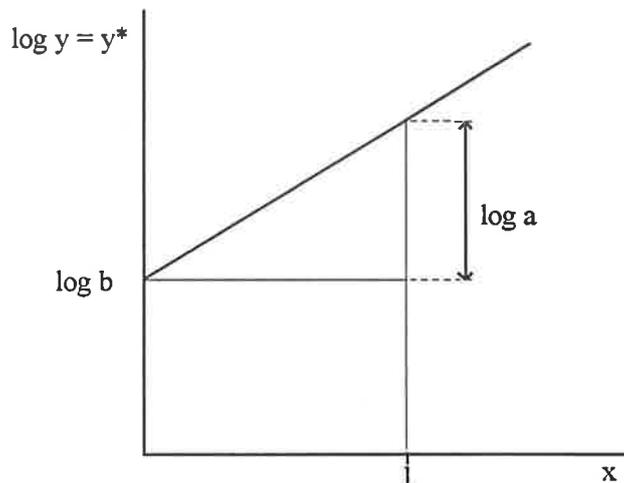


figure 5

La valeur de $\log b$ se lit immédiatement sur le graphique. La pente $\log a$ de la droite se détermine comme précédemment.

Exemple :

$$y = 7 \cdot 2^x$$

$$y^* = \log y = \log 2 \cdot x + \log 7$$

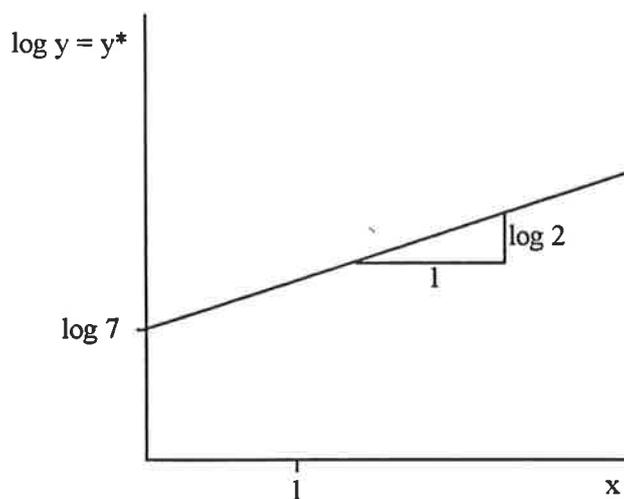


figure 6

MATHÉMATIQUE 3. Graphique dans des axes logarithmiques (log-log)

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Pour représenter les fonctions du type $y = b \cdot x^a$ ($a \neq 0, b > 0$), (3)
on utilise fréquemment des axes logarithmiques. Dans une telle représentation, les axes sont perpendiculaires et pour chaque couple (x, y) vérifiant l'équation (3), on porte en abscisse $x^* = \log x$ et en ordonnée, $y^* = \log y$.

Une fonction du type $y = b \cdot x^a$ ($a \neq 0, b > 0$) (4)
est représentée par une droite dans des axes log-log.

En effet, (4) équivaut à $\log y = a \cdot \log x + \log b$ ou $y^* = a \cdot x^* + \log b$

Frédéricx M.
Parker M.

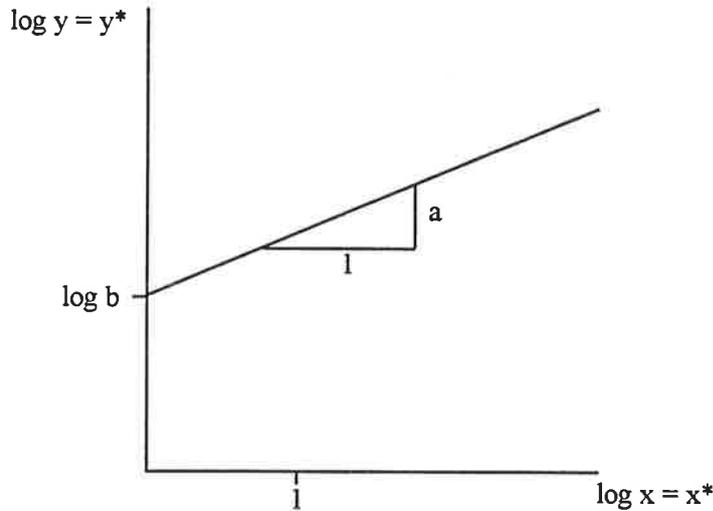


figure 7

La valeur de $\log b$ se lit immédiatement sur l'axe y^* .

La pente a de la droite se voit facilement.

Exemple 1 : soit à représenter la fonction $y = x^6$ qui est dessinée dans des axes usuels à la figure 1.

x	y	x^*	y^*
1	1	0,00	0,00
2	64	0,30	1,81
3	729	0,48	2,86
4	4096	0,60	3,61
5	15625	0,70	4,19

On a $y^* = 6 \cdot x^*$

Le graphique log-log de la fonction $y = x^6$ est une droite passant par l'origine ; sa pente vaut 6.

Exemple 2 : soit à représenter la fonction $y = 4 \cdot x^3$
 $y^* = 3x^* + \log 4$

MATHÉMATIQUE

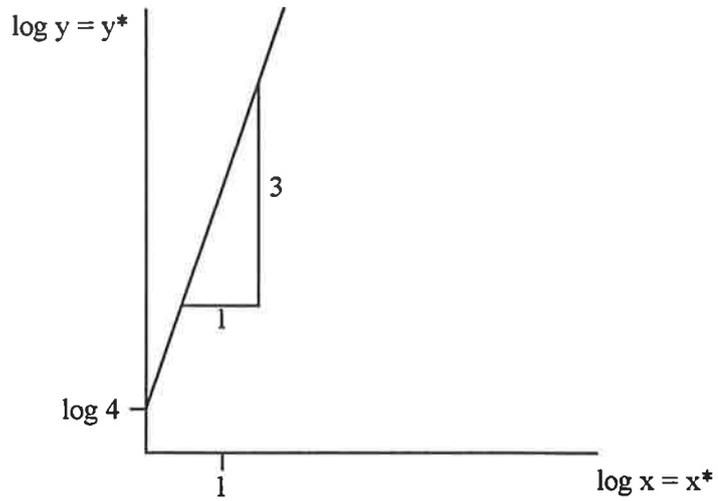


figure 8

MATHÉMATIQUE 4. Quelques applications

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

4.1. Les décès par maladie de cœur aux États-Unis.

Le graphique (figure 9, page 13) représente, dans des axes semi-logarithmiques, le nombre de personnes (sur 100 000 habitants) qui meurent d'une maladie de cœur aux États-Unis, et ce, selon leur âge.

a) Comment peut-on voir sur ce graphique que les personnes ont été groupées par tranches d'âge de 5 ans ?

Réponse : un point est dessiné tous les 5 ans.

b) Combien de personnes âgées de 10 à 15 ans (sur 100 000 habitants) sont-elles mortes d'une maladie de cœur ?

Réponse : environ 1,1 personne sur 100 000.

c) Même question pour les personnes entre 85 et 90 ans.

Réponse : environ 8 500 personnes sur 100 000.

d) Les points du graphique relatifs aux personnes qui décèdent entre 50 et 90 ans sont pratiquement en ligne droite. Qu'est-ce que cela signifie ?

Réponse : le nombre N de décès par maladie de cœur (sur 100 000 habitants) et l'âge t du décès (entre 50 et 90 ans) sont reliés par une relation du type $N = b \cdot a^t$ où a et b sont deux nombres réels positifs.

e) Que valent a et b ?

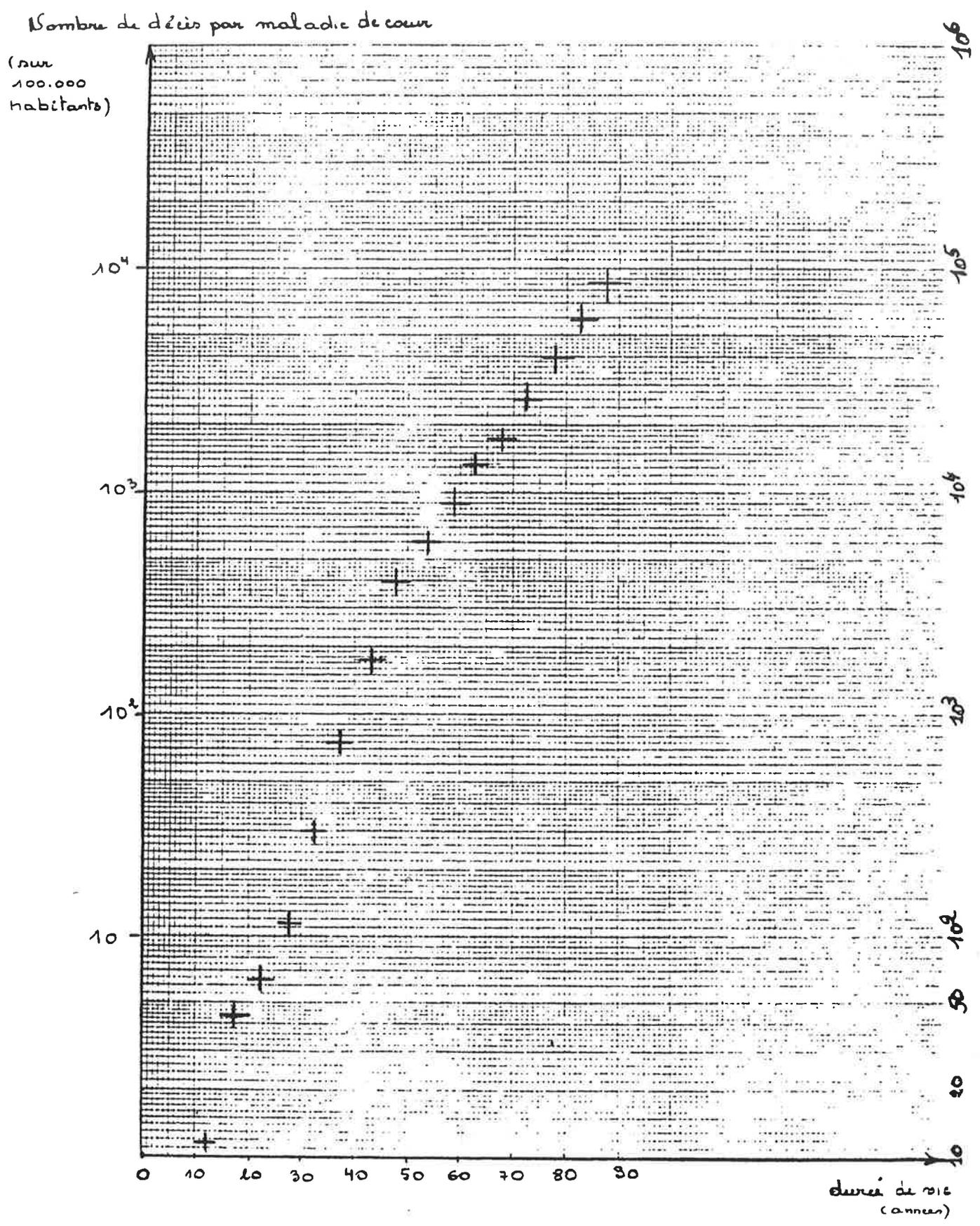
Réponse : les points $(47,5 ; 400)$ et $(87,5 ; 8500)$ appartiennent au graphique. On

a donc

$$\alpha = \frac{\log 8500 - \log 400}{87,5 - 47,5} \quad \text{et } a = 10^\alpha \cong 1,08$$

La valeur de b se lit sur le graphique : $b \cong 11$

Une approximation de la loi qui relie N et t est $N = 11 \cdot 1,08^t$



MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

4.2. La troisième loi de Kepler (1571 - 1630)

Une analyse des observations effectuées par Tycho Brahé sur la planète Mars conduisit Kepler à formuler les bases de l'astronomie moderne. Les deux premières lois de Kepler furent publiées en 1609 dans son ouvrage *Astronomie nouvelle*. Elles s'énoncent comme suit :

1. Toutes les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est un des foyers.
2. La vitesse orbitale des planètes est variable. Les aires balayées pendant des temps égaux par le rayon vecteur allant du Soleil à la planète sont égales.

Dans un deuxième ouvrage, paru en 1618, intitulé *Les Harmonies de l'Univers*, Kepler publia sa troisième loi :

3. Les cubes des demi-grands axes des orbites des planètes sont directement proportionnels aux carrés des durées de leurs révolutions sidérales.

Si A est le demi-grand axe de l'orbite d'une planète et T sa période de révolution autour du soleil, le rapport $\frac{A^3}{T^2}$ est donc constant.

(A est mesuré en unités astronomiques : 1 u.a. = $1,495 \cdot 10^{11}$ m, T est mesuré en secondes)

planète	A	T	$\frac{A^3}{T^2}$	log A	Log T
Mercure	0,387	$7,60 \cdot 10^6$	$1,003 \cdot 10^{-15}$	-0,412	6,881
Vénus	0,723	$1,94 \cdot 10^7$	$1,004 \cdot 10^{-15}$	-0,141	7,288
Terre	1,000	$3,16 \cdot 10^7$	$1,001 \cdot 10^{-15}$	0	7,500
Mars	1,523	$5,94 \cdot 10^7$	$1,001 \cdot 10^{-15}$	0,183	7,774
Jupiter	5,202	$3,74 \cdot 10^8$	$1,006 \cdot 10^{-15}$	0,716	8,573
Saturne	9,554	$9,30 \cdot 10^8$	$1,008 \cdot 10^{-15}$	0,980	8,968
Uranus	19,218	$2,66 \cdot 10^9$	$1,003 \cdot 10^{-15}$	1,284	9,425
Neptune	30,109	$5,20 \cdot 10^9$	$1,009 \cdot 10^{-15}$	1,479	9,716
Pluton	39,600	$7,82 \cdot 10^9$	$1,015 \cdot 10^{-15}$	1,598	9,893

Comme $\frac{A^3}{T^2} = K$

On a $A = K^{\frac{1}{3}} \cdot T^{\frac{2}{3}}$

ou $\log A = \frac{2}{3} \log T + \log K^{\frac{1}{3}}$

ou dans des axes logarithmiques $A^* = \frac{2}{3} T^* + \log K^{\frac{1}{3}}$

Le graphique de A^* (= log A) en fonction de T^* (= log T) est donc une droite de pente $\frac{2}{3}$ et une valeur approchée de $K^{\frac{1}{3}}$ se lit aisément sur le graphique.

On obtient $\log K^{\frac{1}{3}} = -5$, $K^{\frac{1}{3}} \cong 10^{-5}$ ou $K \cong 10^{-15}$ (u.a.)³/s²
Voir figure 10 (page 15).



MATHÉMATIQUE

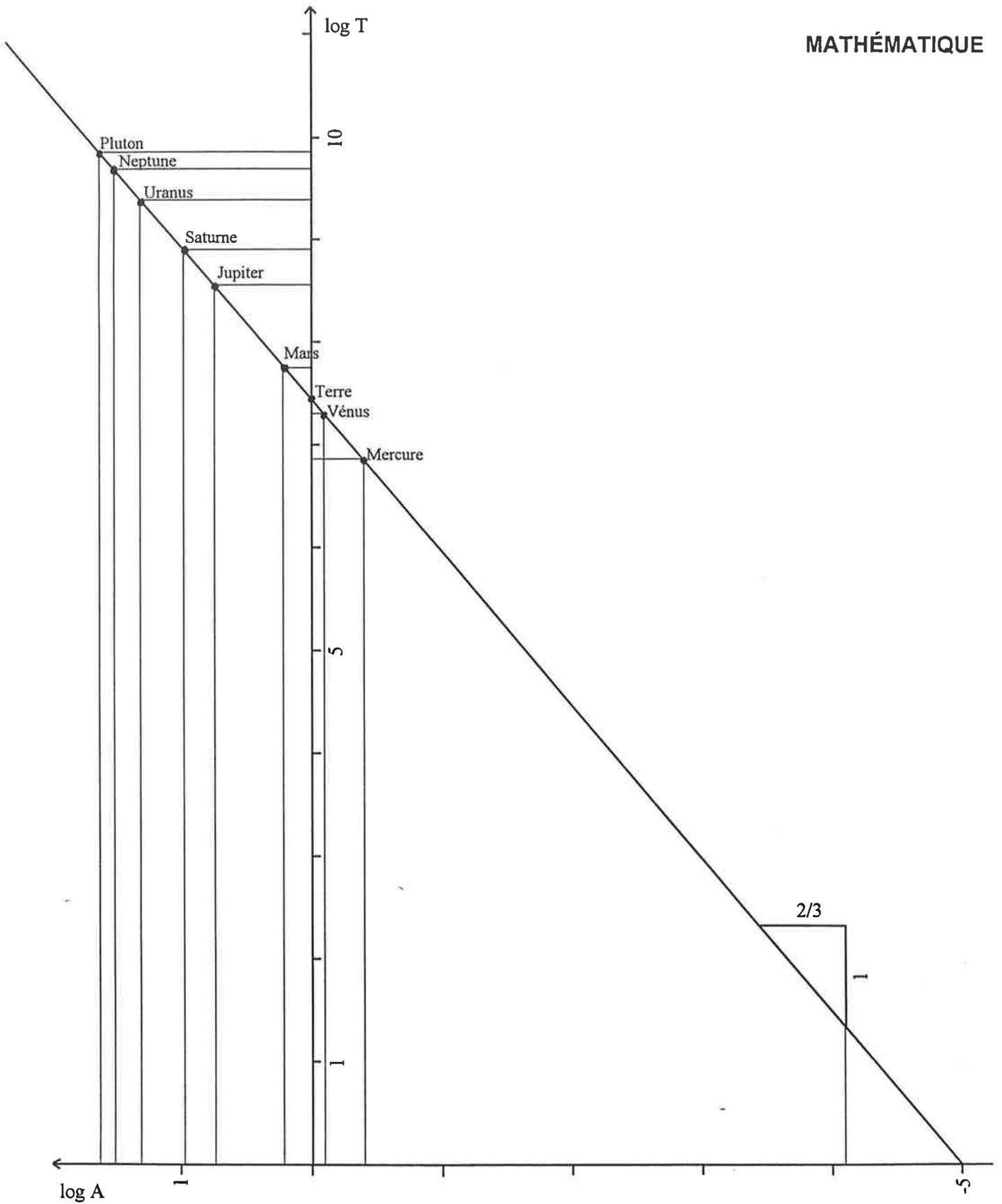


figure 10



MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

4.3. Masse et surface de peau

Il existe un lien entre la masse (M) d'un animal et la surface (S) de sa peau. Celui-ci est donné par la relation $S = k \cdot M^{\frac{2}{3}}$

où k est la constante de Meeh

S est exprimé en dm^2

M est exprimé en kg.

Voici quelques exemples :

animal	k
souris	9
chat	10
lapin	9,75
aigle	7,5
chauve-souris	57,5
homme	11

Si le graphique log-log ci-dessous représente la relation masse-surface de peau d'un cheval, que vaut sa constante de Meeh et quelle est la surface de peau d'un cheval de 200 kg ?

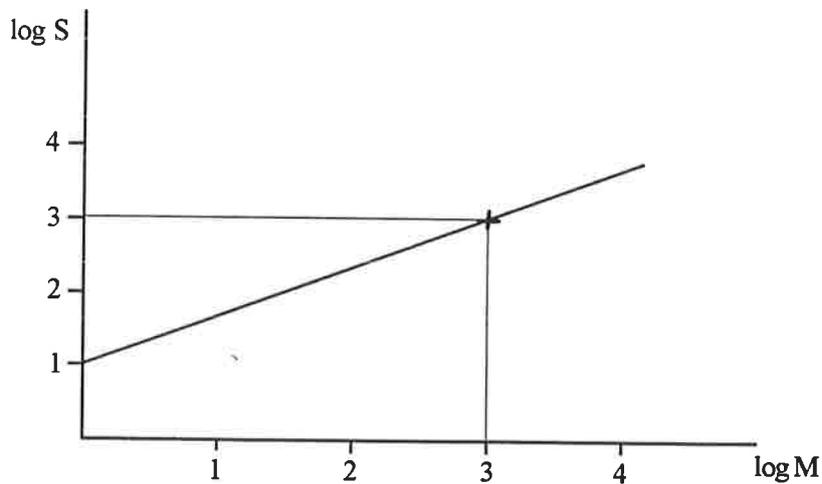


figure 11

MATHÉMATIQUE

ou

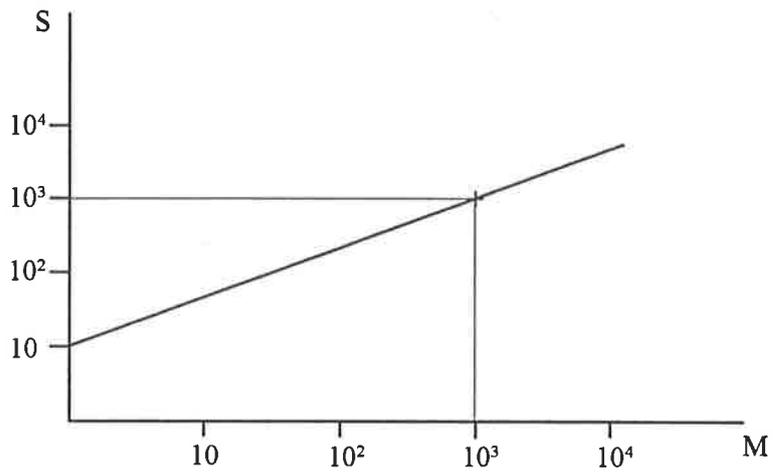


figure 12

Réponse : la constante de Meeh du cheval vaut 10 et la surface de peau d'un cheval de 200 kg vaut 342 dm^2 .

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

4.4. Relation effet-dose

4.4.1.

Dans un grand nombre d'expériences biologiques et physiologiques, les effets E et les doses D de produit utilisé (un médicament par exemple) sont liés par la relation $E = a \cdot \log_{10} D + b$ (5)

où a et b sont des constantes qui dépendent de l'expérience.

On a mesuré les effets E₁ et E₂ correspondant à deux doses D₁ et D₂.

On a ainsi noté : pour D = 3, E = 5 et pour D = 7, E = 9. Calculez les valeurs de a et de b.

Réponse : $a = \frac{4}{\log \frac{7}{3}} \cong 10,87$ $b \cong 5 - 10,87 \cdot \log 3 \cong -0,186$

4.4.2.

On appelle rapport d'activité R_{B/A} d'un médicament B par rapport à un médicament A, le rapport $\frac{D_A}{D_B}$ des doses produisant le même effet :

$$R_{B/A} = \frac{\text{dose de A produisant l'effet } E_1}{\text{dose de B produisant le même effet } E_1} = \frac{D_A}{D_B}$$

On dit que ces médicaments agissent selon des mécanismes comparables si ce rapport est indépendant de l'effet E. On dit que le médicament B est plus efficace que le médicament A si $R_{B/A} = \frac{D_A}{D_B} > 1$

Les graphiques semi-logarithmiques (log-lin) permettent de voir facilement si deux médicaments A et B agissent selon des mécanismes comparables. Dans ces axes, la relation (5) devient $E = a \cdot D^* + b$.

Pour que les médicaments A et B agissent selon des mécanismes comparables, il faut que, pour obtenir un effet donné, le rapport $\frac{D_A}{D_B}$ soit constant.

Donc $\log \frac{D_A}{D_B} = \log D_A - \log D_B = D_A^* - D_B^*$ est constant et les deux droites qui représentent E_A en fonction de D_A^{*} et E_B en fonction de D_B^{*} sont alors parallèles :

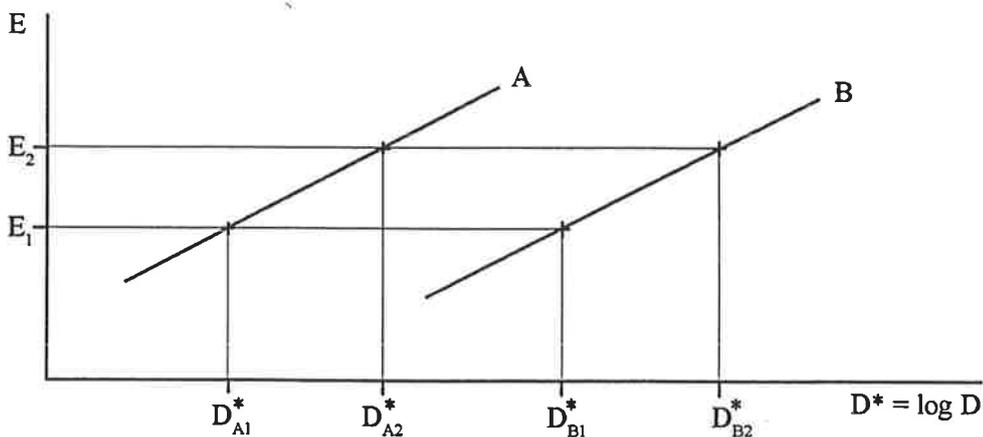


figure 13



MATHÉMATIQUE

4.4.3.

En étudiant les relations entre dose D et effet E de deux médicaments A et B, on trouve :

- pour le médicament A : $E_A = 3 \cdot \log_{10} D_A + 5$
- pour le médicament B : $E_B = 3 \cdot \log_{10} D_B + 6,1$

Calculez le rapport d'activité $R_{B/A}$ du médicament B par rapport au médicament A. Ces deux médicaments agissent-ils suivant des mécanismes comparables ?

Si la réponse est affirmative, lequel des deux médicaments est-il le plus efficace ?

Réponse : on voit immédiatement que ces deux médicaments agissent suivant des mécanismes comparables puisque dans chaque cas, la pente a de la droite $E = a \cdot \log D + b$ vaut 3. Les deux droites sont donc bien parallèles.

Pour un effet donné $E_A = E_B = E$, on a $\log D_A = \frac{E-5}{3}$ et $\log D_B = \frac{E-6,1}{3}$

d'où $\log R_{B/A} = \log D_A - \log D_B = 0,3666\dots$

et $R_{B/A} \cong 2,326$

Le médicament B est donc le plus efficace.

Même exercice que le précédent pour l'énoncé suivant :

- pour le médicament A : $E = 4 \cdot \log_{10} D_A + 7$
- pour le médicament B : $E = 5 \cdot \log_{10} D_B + 6$

Réponse : les deux droites qui représentent ici E en fonction de $D^* = \log D$ ont des pentes différentes ; ces deux médicaments n'agissent donc pas suivant des mécanismes comparables.

Pour un effet donné $E_A = E_B = E$, on a $\log D_A = \frac{E-7}{4}$ et $\log D_B = \frac{E-6}{5}$

d'où $\log R_{B/A} = \log D_A - \log D_B = \frac{E-11}{20}$,

ce qui confirme le fait que le rapport d'activité dépend de l'effet désiré. Pour un « petit » effet ($E < 11$), on a $R_{B/A} < 1$ et le médicament A est plus efficace que le médicament B. Par contre, pour un « grand » effet ($E > 11$), on a $R_{B/A} > 1$ et le médicament B est le plus efficace.

MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

4.5. Temps d'exécution d'algorithmes

On veut comparer les temps d'exécution de deux algorithmes qui résolvent le même problème.

Pour un algorithme linéaire, écrit en Basic et exécuté sur un micro-ordinateur très peu puissant, on obtient $t_A = 19,5 \cdot 10^6 \cdot N$

Pour un algorithme cubique, écrit en Fortran et exécuté sur un très gros ordinateur, on obtient $t_B = 3 \cdot N^3$

Les temps t_A et t_B sont exprimés en nanosecondes et N est le nombre de données traitées.

Pour quelles valeurs de N a-t-on $t_A < t_B$?

Réponse : $t_A = 19,5 \cdot 10^6 \cdot N$
 $t_B = 3 \cdot N^3$
 $t_A < t_B$ si $N > 2550$

On voit que la différence entre les deux facteurs constants permet à l'algorithme cubique d'être plus rapide pour de petites valeurs de N , mais qu'ensuite l'algorithme linéaire devient plus efficace.

Graphiques bilogarithmiques de t_A et t_B :

$\log t_A \cong 7,3 + \log N$ et $\log t_B \cong 0,5 + 3 \cdot \log N$

N	Fortran Algorithme cubique	Basic Algorithme linéaire
10	3 microsecondes	200 millisecondes
100	3 millisecondes	2 secondes
1 000	3 secondes	20 secondes
10 000	49 minutes	3,2 minutes
100 000	35 jours	32 minutes
1 000 000	95 années	5,4 heures

MATHÉMATIQUE

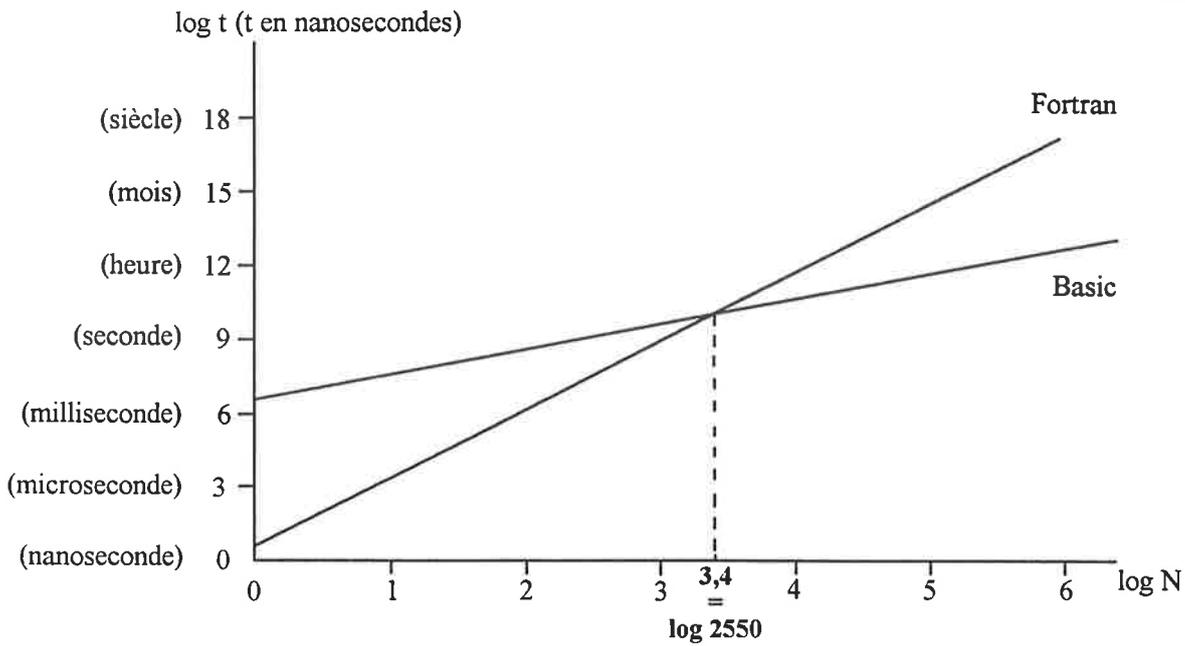


figure 14

ou

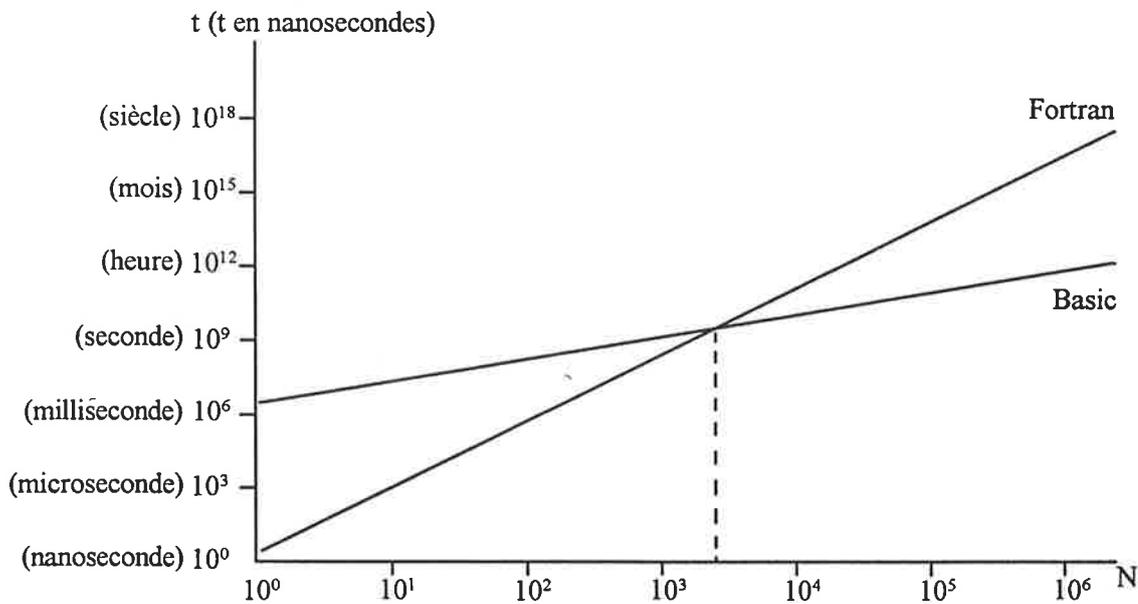


figure 15



MATHÉMATIQUE 5. Une convention bien utile

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Très souvent dans un graphique semi-logarithmique, pour la facilité de l'utilisateur, ce ne sont pas les valeurs de $\log y$ qui sont indiquées sur l'échelle logarithmique, mais celles de y .

De même, dans les graphiques log-log, sur l'axe x^* , on indique en fait les valeurs de x et sur l'axe y^* , on indique les valeurs de y . Nous avons déjà vu des exemples de ceci aux points 4.3 et 4.5.

Reprenons l'exemple de la fonction $y = 5^x$ (voir figure 1, page 5).

Avec cette convention, le graphique devient

Frédéricx M.
Parker M.

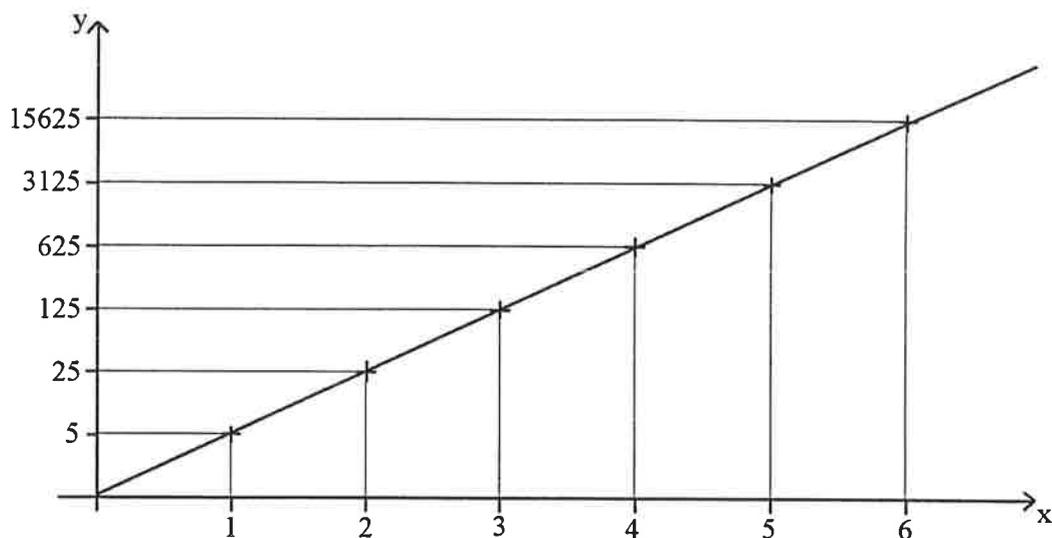


figure 16

La valeur 25 sur l'axe vertical représente donc en fait $\log 25 = 1,4$. Le point de coordonnées (2,25) dans des axes linéaires devient le point (2, $\log 25$) dans des axes semi-logarithmiques. Grâce au subterfuge cité ci-dessus, l'utilisateur ne doit pas calculer la valeur de $\log 25$, ce qui facilite sa tâche.

Cette convention présente un autre avantage : nous avons vu que les fonctions du type $y = b \cdot a^x$ ont pour graphique lin-log des droites d'équation $y^* = \log a \cdot x + \log b$. Étant donné que les valeurs indiquées sur l'axe y^* sont celles de y , la valeur de a se lit immédiatement sur le graphique.

Exemple :

On donne les points de coordonnées (1,24), (2,96), (3,384), (4,1536), (5,6144), (6,24576). Ils appartiennent à une courbe d'équation $y = b \cdot a^x$. Comment déterminer a et b graphiquement ?

On reporte ces points dans des axes lin-log.

MATHÉMATIQUE

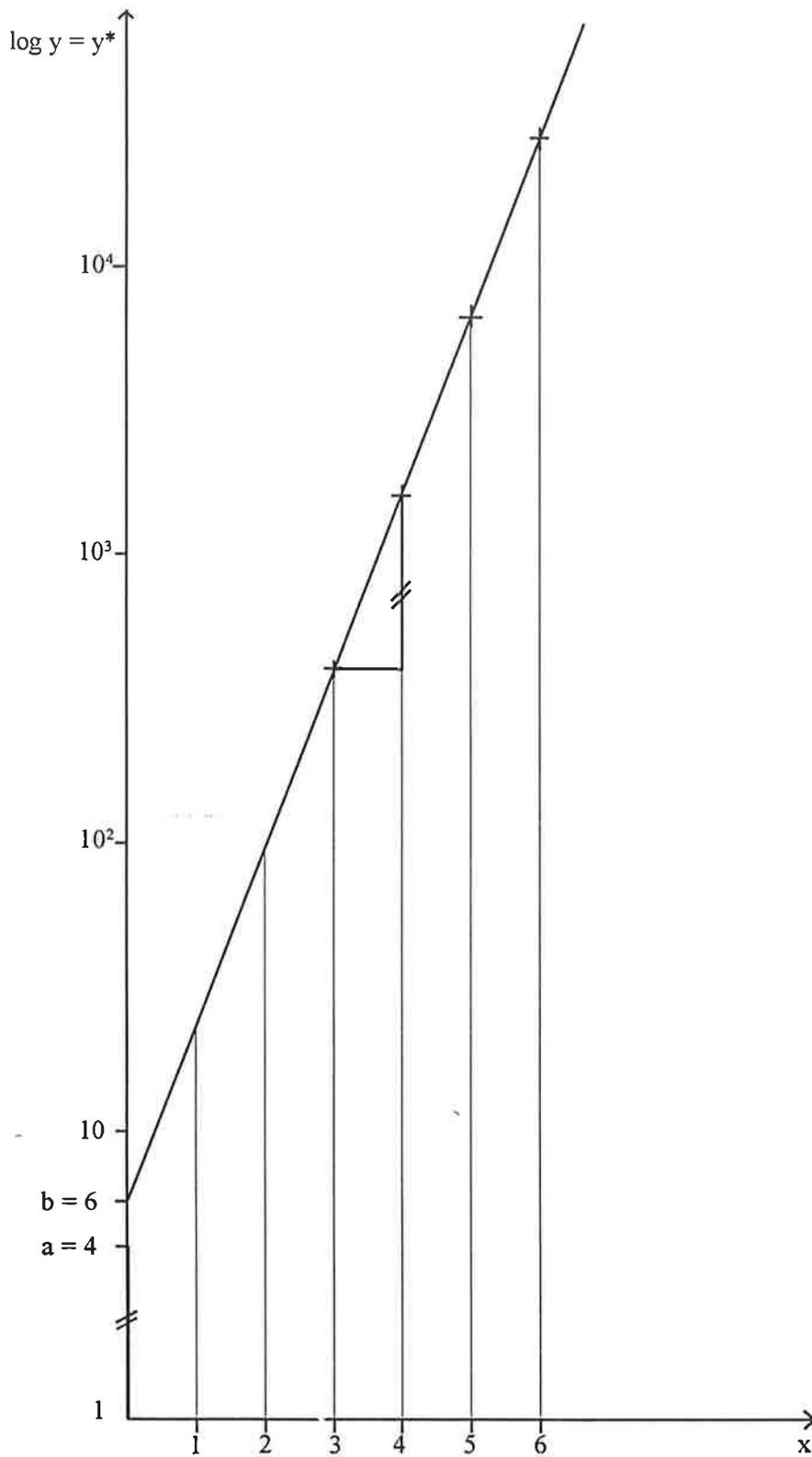


figure 17

Les valeurs de a et de b se lisent aisément sur le graphique : $a = 4$ et $b = 6$. La loi qui relie les points donnés est donc $y = 6 \cdot 4^x$.



MATHÉMATIQUEGRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES**6. Le papier à simple ou double échelle logarithmique**

Des exemples de tels papiers sont reproduits en annexe.

6.1. Précision

Si on regarde attentivement ces papiers, on se rend compte que les sous-graduations des échelles logarithmiques sont obtenues par interpolation linéaire. On assimile donc la fonction logarithmique à une succession de segments de droite. Ceci est certainement une source d'imprécision, mais dans la pratique, ces erreurs sont en général négligeables.

6.2. Petits nombres et grands nombres

Que faire des fonctions du type $y = a^x$ où $0 < a < 1$?

Les valeurs prises par y sont alors inférieures à 1. Or, la plus petite valeur que peut prendre y semble valoir 1 dans l'échelle logarithmique. On peut remédier à cet inconvénient :

voir figures 18 et 19 (page suivante)

L'utilisateur peut choisir la signification des nombres qui apparaissent sur l'axe y^* . Pour les fonctions du type $y = a^x$ où $a > 1$, l'interprétation est celle de la figure 18. La valeur $y = 560$ par exemple, se porte au « troisième étage » en face de la graduation 5,6.

Pour les fonctions du type $y = a^x$ où $0 < a < 1$, l'interprétation des nombres situés sur l'axe y^* dépend du nombre de décimales que l'utilisateur veut considérer (figure 19).

Frédéricx M.
Parker M.

MATHÉMATIQUE

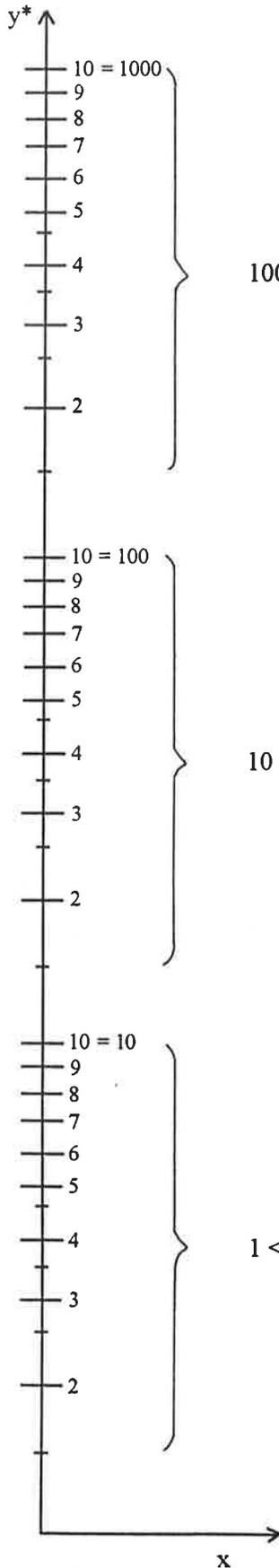


figure 18

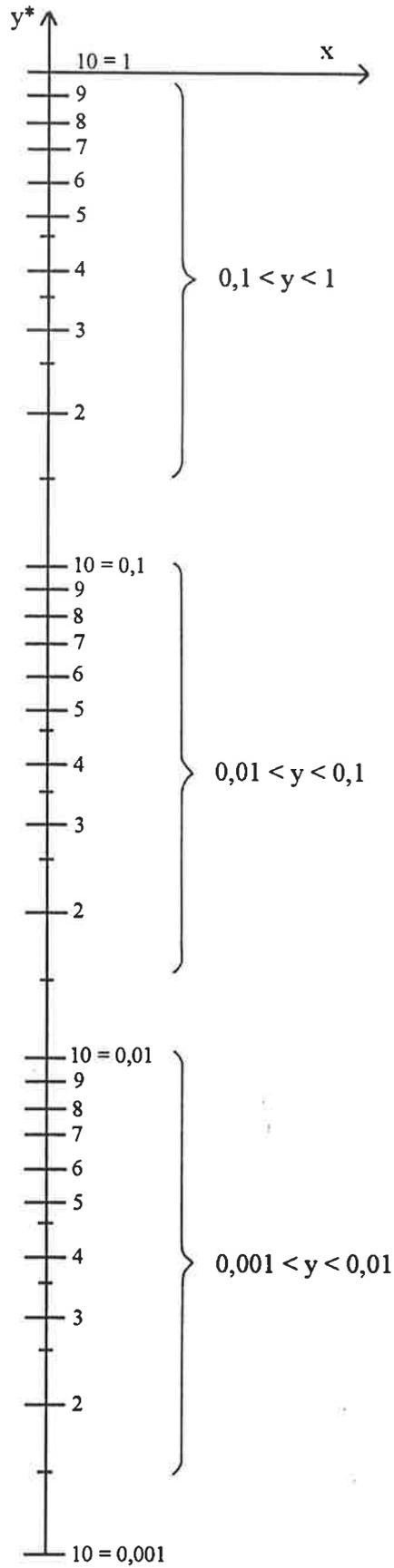


figure 19



MATHÉMATIQUE

GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

6.3. Exemples d'utilisation

6.3.1.

Au laboratoire, l'expérimentateur obtient des mesures lors d'une expérience. Il croit que la variable x et la fonction y de cette variable sont liées par une loi exponentielle. Il reporte les couples de valeurs qu'il a obtenues lors de son expérience sur un papier lin-log. S'il obtient une droite, la loi qui régit l'expérience est du type $y = b \cdot a^x$. Les valeurs de a et de b se lisent sur le graphique, comme nous l'avons vu précédemment.

Exemple pratique :

Pour déterminer la période ou la demi-vie d'une substance radioactive, on mesure l'activité de cette substance, activité qui est proportionnelle au taux de comptage des particules émises.

On obtient le tableau suivant :

temps (h)	taux
0	1000
0,2	819
0,4	670
0,6	548
0,8	449
1	368
1,5	223
2	135
2,5	82
3	49
4	18
5	7

Le taux de comptage C est tel que $C = C_0 \cdot e^{-\lambda t}$
ou $C^* = \log C = \log C_0 - (\lambda \cdot \log e) \cdot t$
dont le graphique lin-log est une droite. L'ordonnée à l'origine est $\log C_0$ et la valeur de C_0 se lit donc immédiatement sur l'axe vertical ($C_0 = 1000$).

Figure : voir annexe I

On peut déterminer de façon graphique la constante de radiation λ . En effet, on voit que la pente de cette droite, c'est-à-dire $-\lambda \cdot \log e$, vaut $-\log 2,7 = -\log e$ et donc $\lambda = 1$.

On en déduit $C = 1000 \cdot e^{-t}$

Frédéricx M.
Parker M.

MATHÉMATIQUE

6.3.2.

Si l'expérimentateur obtient des mesures lors d'une expérience et qu'il croit que la variable x et la fonction y de cette variable sont liées par une loi du type $y = b \cdot x^a$, il reporte les couples de valeurs qu'il a obtenues lors de son expérience sur un papier log-log. S'il obtient une droite, la loi qui régit l'expérience est bien du type présumé. Les valeurs de a et de b se lisent sur le graphique, comme nous l'avons vu précédemment.

Exemple pratique :

Un corps glisse sans frottement vers le bas d'un plan incliné qui a un angle de $17,5^\circ$. On mesure le temps (t) mis par le corps pour parcourir différents espaces (e). On obtient les résultats suivants, avec une incertitude de $0,001$ s sur le temps et de $0,005$ m sur l'espace parcouru.

t(s)	e(m)
0,4880	0,20
0,6880	0,40
0,8340	0,60
0,9410	0,80
1,0470	1,00
1,1760	1,20
1,2470	1,40

La loi qui relie temps et espace parcouru est $e = \frac{1}{2} at^2$ (6)

Par calculs, on trouve $a = (1,7517 \pm 0,0360) \text{ m/s}^2$. Graphiquement, sur papier log-log, on trouve une valeur de a qui est acceptable.

Figure : voir annexe II

En effet, (6) équivaut à $e^* = 2 \cdot \log t + \log \frac{a}{2}$ (7)

La valeur de $\log \frac{a}{2}$ est donc l'ordonnée à l'origine de la droite représentative de (7) et la valeur de $\frac{a}{2}$ se lit immédiatement sur le graphique.

On trouve $\frac{a}{2} \cong 0,85$ ou $a \cong 1,7$.

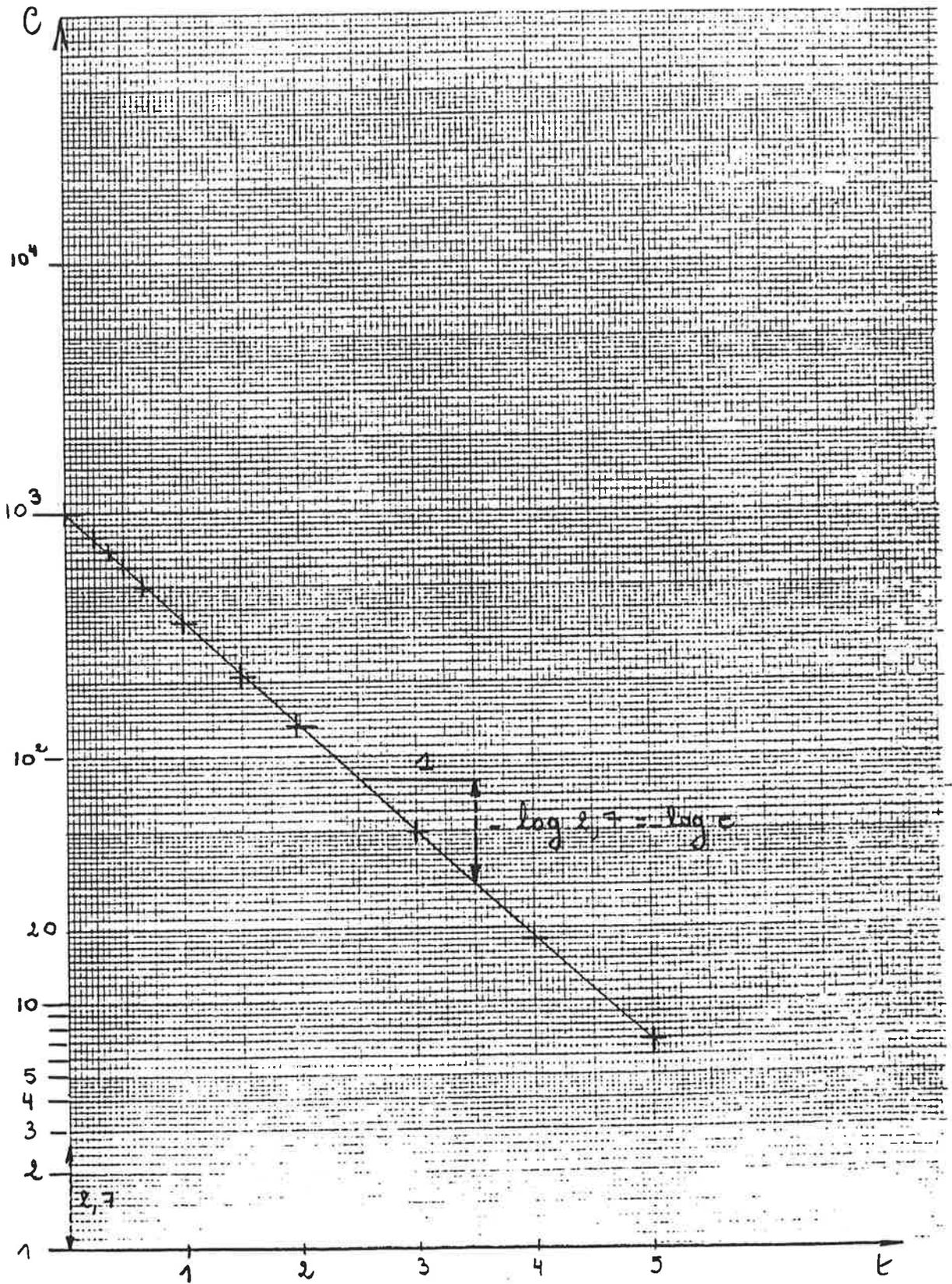
6.3.3.

Le graphique vu au point 4.2 (figure 10, page 15) est repris sur papier log-log dans l'annexe III.

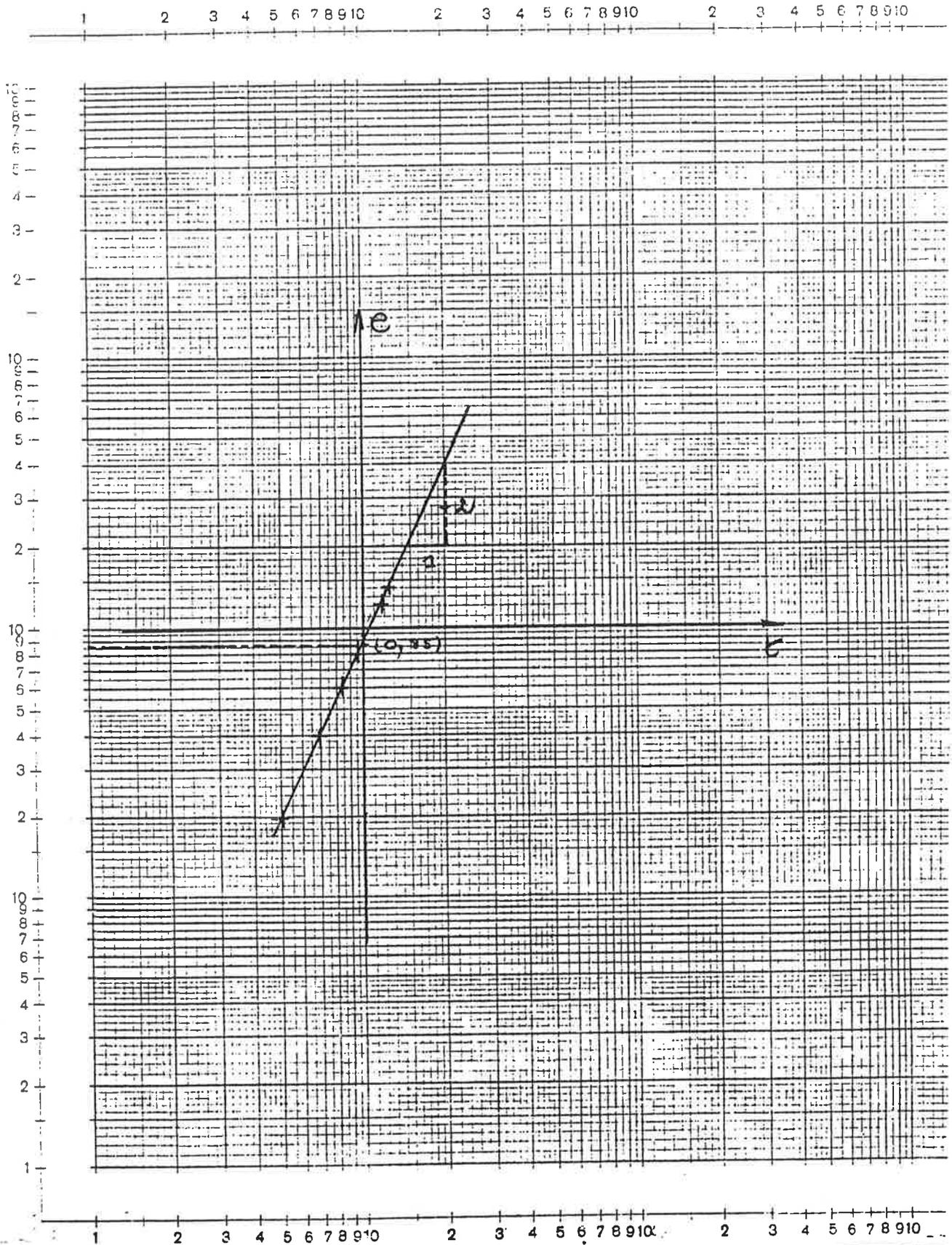
MATHÉMATIQUE 7. Annexes

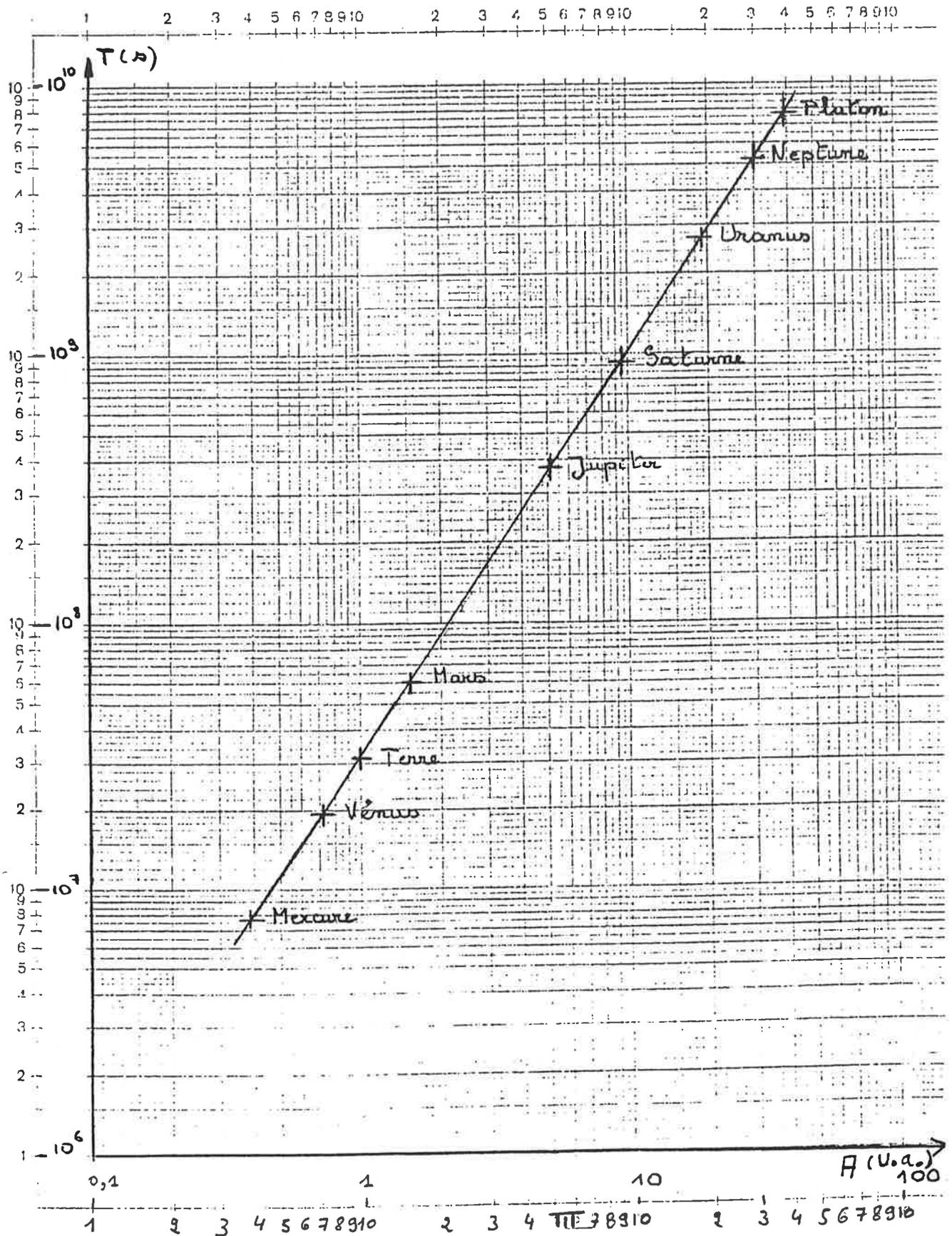
GRAPHIQUES
LOGARITHMIQUES ET
SEMI-LOGARITHMIQUES

Frédéricx M.
Parker M.

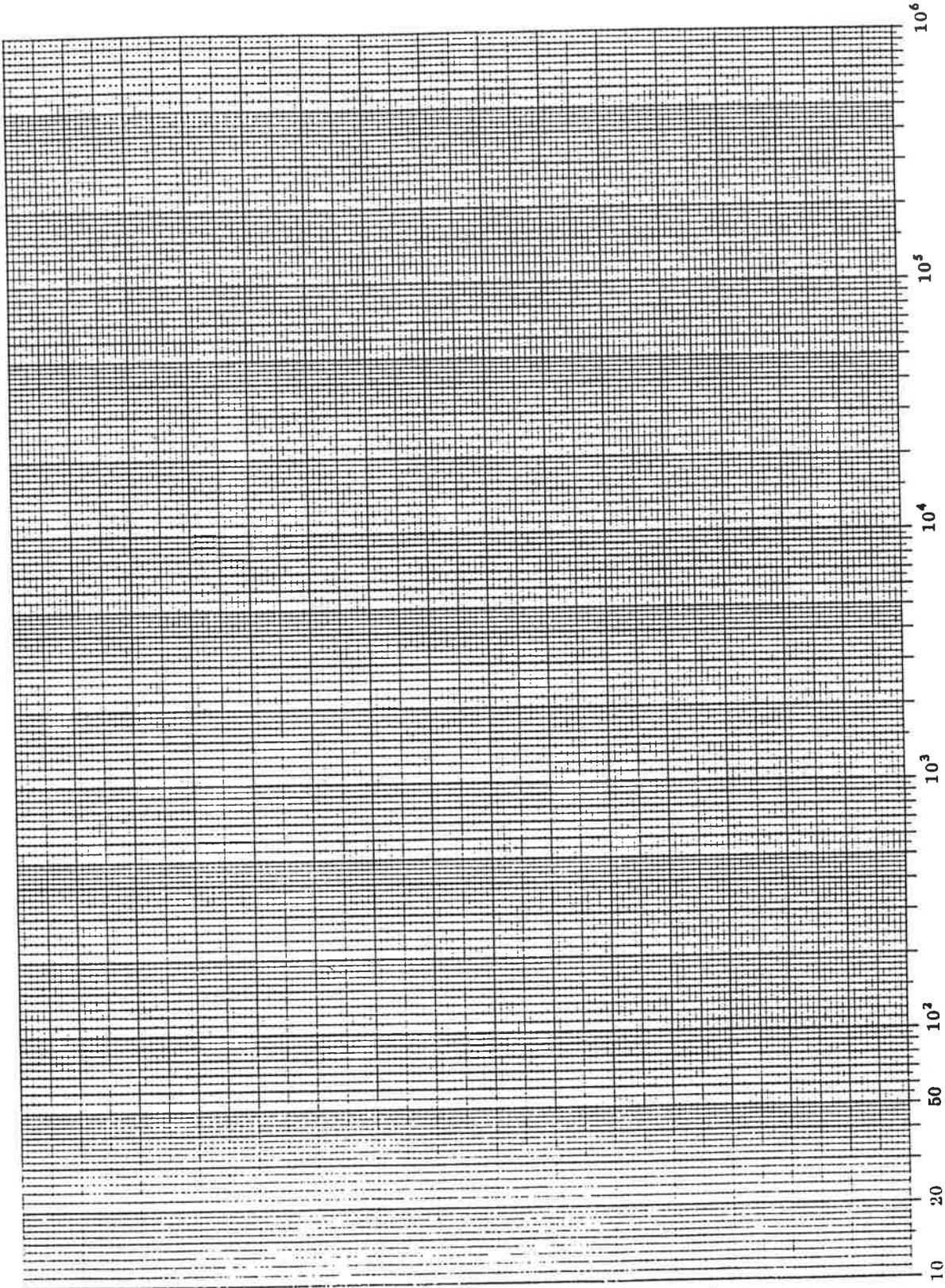


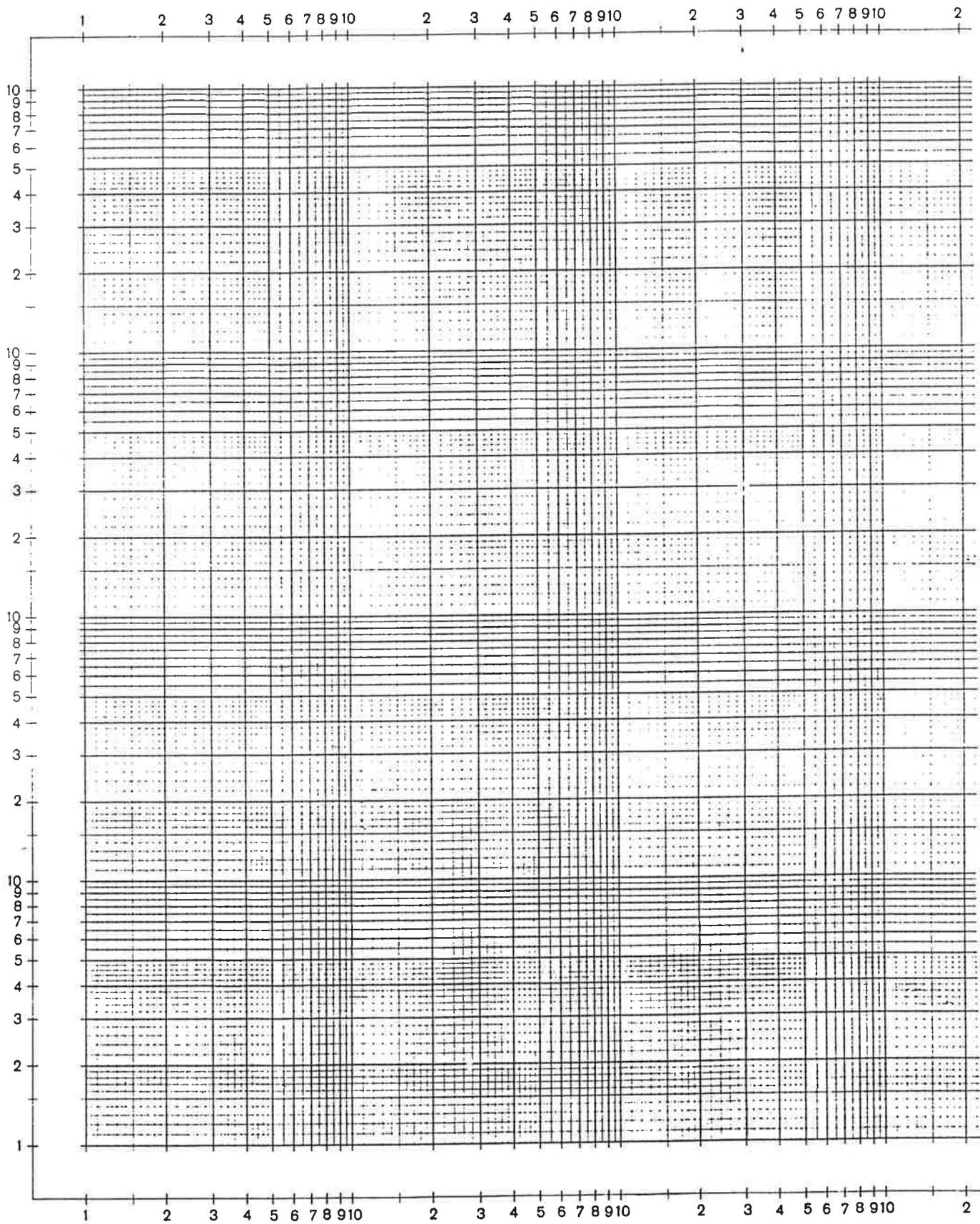
Papier log-log





The image shows a large grid of 100 columns and 100 rows. On the left side, there is a vertical scale with labels from 1 to 10². The labels are: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10¹, 10². The grid is divided into four main sections of 25 rows each, corresponding to the labels 1-25, 26-50, 51-75, and 76-100. The grid is mostly empty, with some faint markings in the top-left corner.





Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
☎ 02/650 40 35

Dépôt légal D/1995/6890/20
Prix de vente : 100 FB