Michel LARTILLIER

ULB

Les tribulations de l'équation du second degré

centre de documentation pédagogique

UREM
Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

Plan

Michel Lartillier est professeur de mathématiques à l'Athénée Bracops-Lambert (Anderlecht) et délégué aux stages pour l'ULB.
Ce texte a fait l'objet d'un exposé dans le cadre d'un cycle d'exposés-discussions organisé par *Altaïr*, Centre d'histoire des sciences et des techniques.

Renseignements pour Altaïr :

M. Jean DOYEN 02/640.69.30 ou 02/650.58.72
Département de mathématique
ULB - CP 216
Boulevard du Triomphe
B-1050 Bruxelles

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un accord de coopération entre l'UREM et le CREM a.s.b.l. (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), avec le soutien de la Direction générale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation.

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES

Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

Introduction

Dans ce fascicule, je vous propose d'effectuer un voyage spatio-temporel depuis l'aube des mathématiques à Babylone jusqu'au commencement de la Mathématique contemporaine (fin du XVIII^{e} siècle). L'embarquement aura lieu sur les rives du Tigre ou de l'Euphrate. Deux escales sont prévues en Grèce. Des mystères de l'Inde, les caravanes arabes nous emmèneront, par l'Italie et l'Allemagne, à Bruges où une agréable surprise nous attend.

Chapitre 1 : Babylone

La tablette B.M. 13901 – traduite par F. Thureau-Dangin (1936) et par O. Neugebauer (1937) – constitue l'un des plus anciens textes babyloniens à caractère mathématique (1700 av. J.-C.). Elle nous fournit les premières traces d'« équations du second degré ». (Voir document 1 en annexe.)

Cette tablette se compose de 24 problèmes dont 21 sont lisibles ; chaque problème, écrit sans symbolisme, est suivi d'une solution établie étape par étape sans la moindre justification.

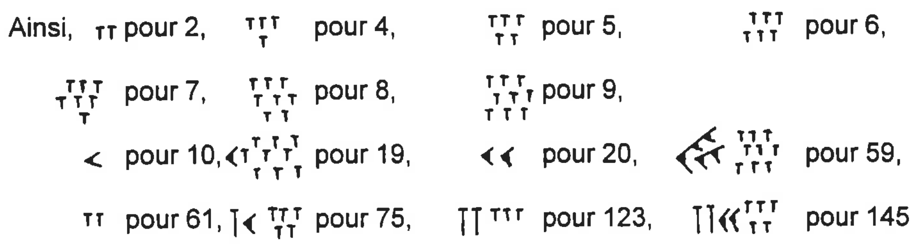
Données préalables à la lecture des problèmes :

le côté (d'un carré) représente l'inconnue « x » cherchée ;
la surface représente le carré « x^2 » de l'inconnue ;
se faire correspondre *n* représente l'élévation de *n* au carré ;
seuls des nombres réels positifs sont considérés ;
le système de numération est mixte : décimal et sexagésimal.

Document 2.

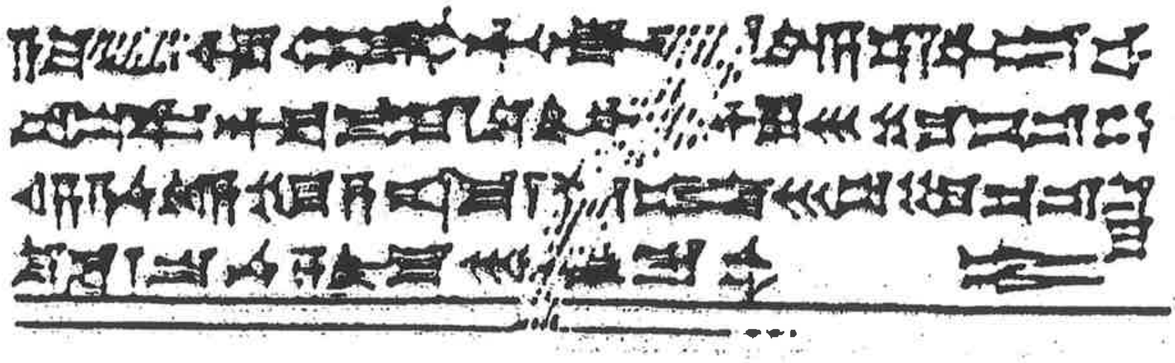
𒁹 représente une « puissance de 60 » et veut dire aussi bien 1, 60, 3600, ... que 1/60, 1/3600, ...

𒌋 représente 10 fois une puissance de 60 et veut dire aussi bien 10, 600, 36000, ... que 10/60, 10/3600, ...



Seul le contexte permet au scribe de déterminer la position de la « virgule ».

Document 3.



A.ŠÀ-lam ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45-e 1 wa-ṣi-tam
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [30] ù 30 tu-uš-ta-kal
15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1-e 1 ÍB.SÁ 30 ša tu-uš-ta-ki-lu
ŠÀ.BA 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

Traduction :

« J'ai additionné la surface et mon côté (du carré) : 45. Tu placeras 1, l'unité. Tu fractionneras la moitié de 1. Tu feras se correspondre [30] et 30 : 15. Tu ajouteras (cela) à 45, cela fait 1, c'est le carré de 1.30 que tu as fait se correspondre, tu détacheras de 1, cela fait 30. C'est le côté. »

L'équation proposée est

$$x^2 + 1x = 0;45$$

solution :

$$1 * (\frac{1}{2}) = 0;30$$

$$(0;30)^2 = 0;15$$

$$0;15 + 0;45 = (0;60) = 1$$

$$1 = (x + 0;30)^2$$

$$x + 0;30 = 1$$

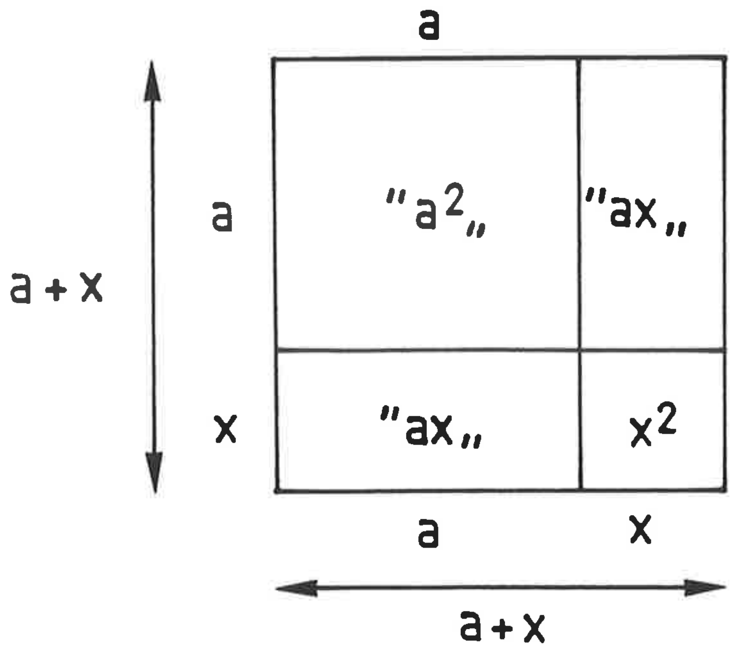
$$x = 0;30$$

c'est le côté

De manière contemporaine, l'équation est $x^2 + 1 * x = 0,75$.

Le scribe a « complété » le premier membre afin d'obtenir un carré. L'équation est du type $x^2 + px = q$ avec p et q positifs ; elle admet donc deux racines réelles, une positive et une négative. Le scribe ne retient bien entendu que la seule racine positive. Sans doute connaît-il le développement de $(x + a)^2$, peut-être à partir de la vision géométrique.

Document 4.



D'où la démarche :

$$x^2 + 2*(\frac{p}{2})*x = q$$

$$x^2 + 2*(\frac{p}{2})*x + (\frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2$$

$$(x + (\frac{p}{2}))^2 = \frac{(4*q + p^2)}{4}$$

La quantité du second membre étant bien sûr positive, le scribe recherche dans une table de carrés, la racine carrée positive $r = \sqrt{\frac{(4q + p^2)}{4}}$ et enfin $x = r - (\frac{p}{2})$.

Le deuxième problème, qui se traduit par $x^2 - x = 14{,}30$, très voisin du précédent à nos yeux, ne l'est pas pour le Babylonien : dans la « complétion des carrés », il va devoir considérer $(x - (\frac{p}{2}))$, quantité qui en certaines circonstances peut être négative ; en se restreignant au cas où $a^2 - 2a*b$ est positif, le scribe semble se servir du développement $(a-b)^2 = a^2 - 2*a*b + b^2$. Ce cas reste d'ailleurs très discuté par les spécialistes de mathématique babylonienne : d'où vient la limitation $a \geq 2*b$? D'où vient la connaissance du développement de $(a-b)^2 = a^2 - 2*a*b + b^2$? (cf. M. Caveing, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Presses Univ. Lille, 1994.)

Le troisième problème est celui-ci :

Document 5.

ša-lu-uš-ti A.ŠÀ as-sú-<uḫ-ma> ša-lu-uš-ti mi-it-ḫar-tim a-na lib-bi
A.ŠÀ-lim ú-ṣi-ib-ma 20-e 1 wa-ṣi-tam ta-ša-ka-an
ša-lu-uš-ti 1 wa-ṣi-[tim 20 ta-na-sà-aḫ-ma] 40 a-na 20 ta-na-ši
13.20 ta-la-pa-at [ba-ma-at 20 ša-l]u-uš-tim ša ta-sú-ḫu
te-ḫe-pe 10 ù [10 tu-uš-ta-kal 1.40] a-na 13.20 tu-ṣa-ab
15-e 30 [ÍB.SÁ 10 ša tu-uš-ta-ki-lu ŠÀ.BA 30] ta-na-sà-aḫ-ma 20
IGI-40-GÁL.[BI 1.30 a-na 20 ta-na-ši-ma 30] mi-it-ḫar-tum

Traduction :

« J'ai retranché le tiers de la surface et ensuite j'ai ajouté le tiers du côté à la surface, cela fait 20. Tu placeras 1, l'unité. Tu retrancheras le tiers, soit 20, de 1, l'unité, cela fait 40, que tu porteras à 20 : tu inscriras 13.20

Tu fractionneras en deux 20, le tiers que tu as retranché. Tu feras se correspondre 10 et 10 : 1.40, que tu ajouteras à 13.20 : cela fait 15. C'est le carré de 30.

10, que tu as fait se correspondre, tu retrancheras de 30 : cela fait 20.

L'inverse de 40, c.-à-d. 1.30, tu porteras à 20 : cela fait 30. C'est le côté. »

Il s'agit cette fois de l'équation : $0;40 * x^2 + 0;20 * x = 0;20$

Solution :

$$0;40 * 0;20 = 0;13,20$$

$$0;20 * \frac{1}{2} = 0;10$$

$$(0;10)^2 = 0;1,40$$

d'où 0;15 qui est le carré de 0;30

d'où $0;40 * x = 0;20$

en multipliant par l'inverse de 0;40,

qui est 1;30, il vient 0;30

qui est le côté

L'équation est cette fois du type : $a*x^2+b*x=c$ avec a, b, c positifs et le coefficient principal a distinct de 1 ; dans la résolution de cette équation, le scribe sera donc amené à effectuer au moins une division, c'est-à-dire à multiplier par l'inverse d'un nombre et donc à recourir à une table d'inverses. Le scribe a utilisé une astuce pour éviter autant que possible l'opération « division » : il multiplie **tous** les termes de l'équation par le coefficient principal

$$a*x^2+b*x=c$$

$$a*a*x^2+a*b*x=a*c$$

$$(a*x+(\frac{b}{2}))^2=a*c+(\frac{b}{2})^2=r^2$$

$$a*x=r-(\frac{b}{2})^2$$

Il ne lui reste plus qu'à effectuer une seule division par a ; cette astuce du scribe babylonien est intéressante, nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard !

Les problèmes 4, 5 et 6 regroupent en fait les problèmes 1 et 3 ; « le scribe s'entraîne ! »

Le problème 7 est plus intéressant : il s'agit cette fois de l'équation $11*x^2+7*x=6;15$. Le début de la solution est en tout point semblable à celle du problème 3 jusqu'à l'étape cruciale de la division ou multiplication par l'inverse. En effet, ici, il faut trouver l'inverse de 11. Or, dans le système babylonien (10-60), seuls les nombres du type $2^m*3^n*5^p$ admettent un inverse en version limitée. Ce n'est pas le cas de 11 !

Que faire ?

« Va voir une table de multiplication par 11.
Trouves-tu 5;30 ?
Oui ! car 11 * 0;30 = 5;30
0;30 est ton côté. »

Le reste de la tablette consiste en

- des problèmes (8 à 14) qui se ramènent à des équations à deux inconnues dont la première est du type $x^2+y^2=p$;
- des problèmes (15 à 24) plus compliqués à 3 ou 4 inconnues où le scribe doit appliquer les « méthodes » apprises dans les deux premiers groupes de problèmes.

Une constatation s'impose : l'équation du type $x^2+c=b*x$ avec b et c positifs n'apparaît jamais !

Or ce type d'équation aurait donné, lorsque b^2-4*c est positif, **deux** racines réelles **positives**, ce qui vraisemblablement a gêné notre scribe.

Chapitre 2 : La vision géométrique en Grèce

La lecture du livre II des *Éléments* d'Euclide a amené les mathématiciens à envisager l'hypothèse d'une « Algèbre Géométrique ». Certains théorèmes de ce livre peuvent en effet se traduire, comme nous allons le voir, en « équations du second degré ». (Pour une discussion sur une éventuelle justification de cette terminologie, cf. B. L. Van der Waerden et À. Szabó - Bibliographie, pp. 50-51).

Les théorèmes du livre II sont souvent relatifs à « l'application des aires » ou « παραβολη των χωριων ».

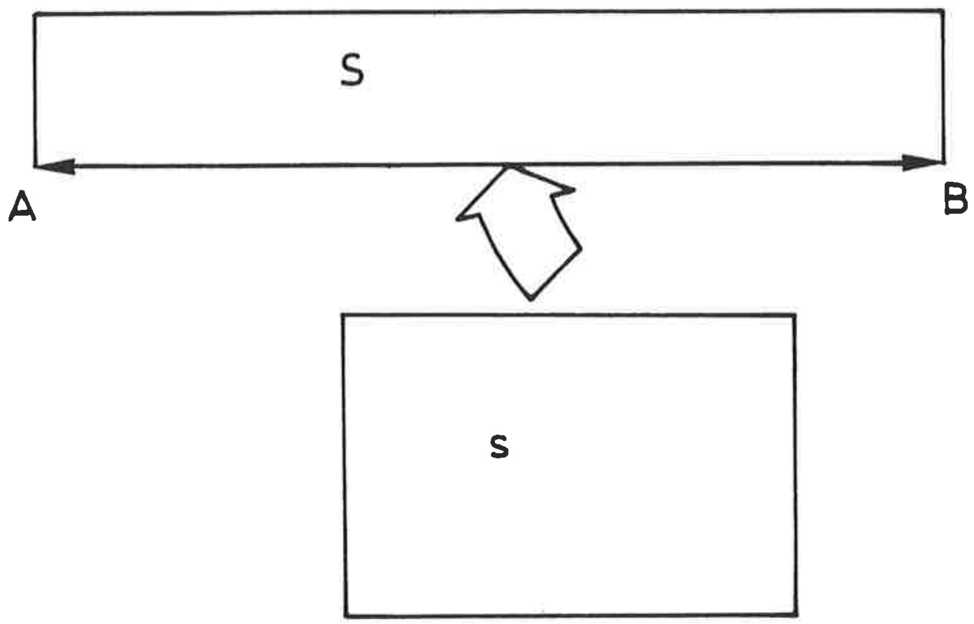
Proclus, dans son *sur Euclide* nous signale que cette technique remonte à la plus haute antiquité. Elle remonterait aux premiers Pythagoriciens. (Voir document 6 en annexe.)

Les Grecs considéraient trois « applications des aires » :

1° « L'application simple » ou « parabole » « παραβολλειν ».

On construit sur un segment donné (AB) un parallélogramme ou un rectangle d'aire donnée S.

Document 7.

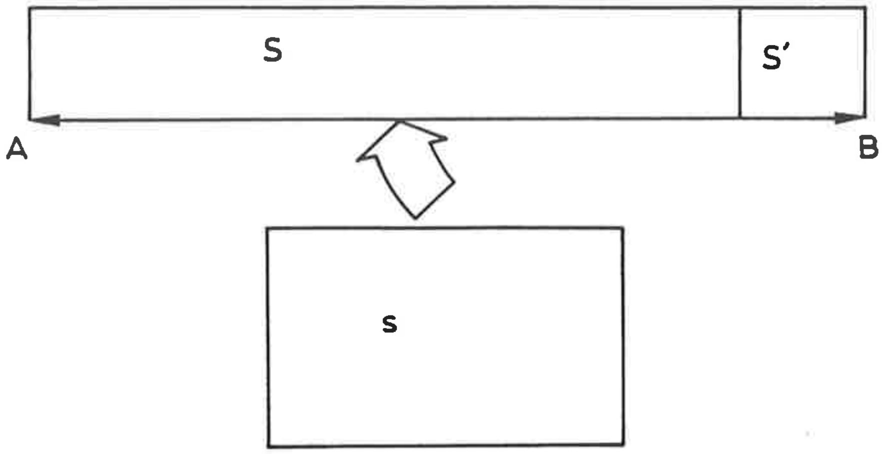


En 1265, en latin ecclésiastique, « parabola » désigne un récit allégorique des Livres Saints sous lequel se cache un enseignement ; plus tard, « parabole » prend un sens différent : « d'une manière détournée ou obscure ».

2° « L'application par défaut » ou « ellipse » « ελλειπειν ».

On construit sur un segment donné (AB) un parallélogramme ou un rectangle d'aire donnée S avec un défaut d'aire S'.

Document 8.

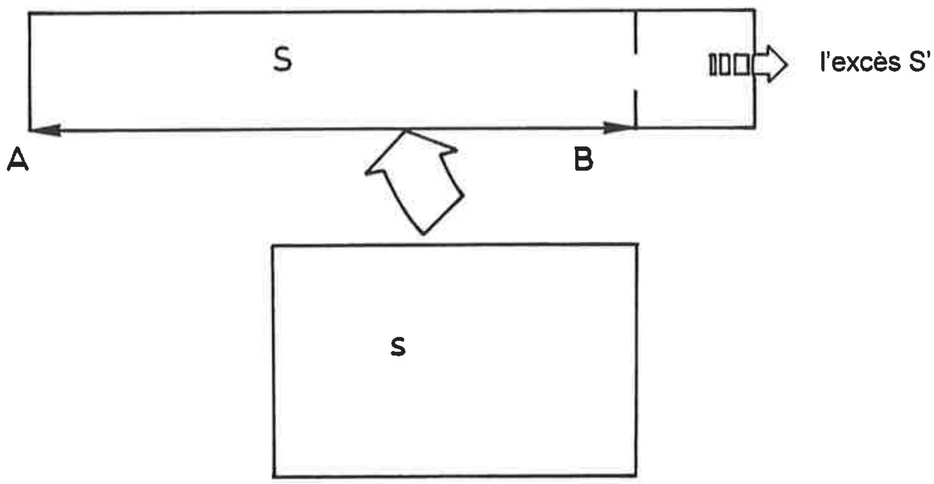


En 1573, le latin « ellipsis » désigne une omission syntaxique ou stylistique d'un ou de plusieurs mots que l'esprit supplée de façon plus ou moins spontanée, d'où l'idée d'un art du raccourci ou du sous-entendu.

3° « L'application par excès » ou « hyperbole » « υπερβαλλειν ».

On construit sur un segment donné (AB) un parallélogramme ou un rectangle d'aire donnée S avec un excès d'aire S' ;

Document 9.



Dès le XIII^e siècle, « hyperbola » désigne une figure de style qui consiste à mettre en relief une idée au moyen d'une expression qui la dépasse, d'où plus tard, l'idée d'emphase ou d'exagération.

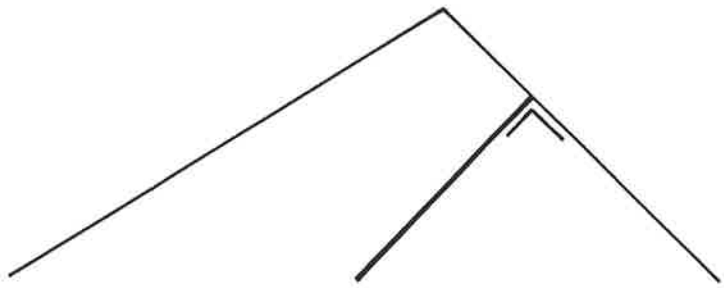
Voilà bien trois noms « parabole, ellipse, hyperbole » qui ne peuvent manquer d'appeler quelques commentaires : quels liens existe-t-il entre « application des aires » et « sections coniques » ?

Il faut se rappeler que, chez Euclide, Archimède et leurs prédécesseurs, les sections coniques s'obtenaient indépendamment les unes des autres et n'avaient pas encore reçu leur terminologie bien connue.

Document 10.1. : ορθογωνιου χωνου τομης section de cône rectangle

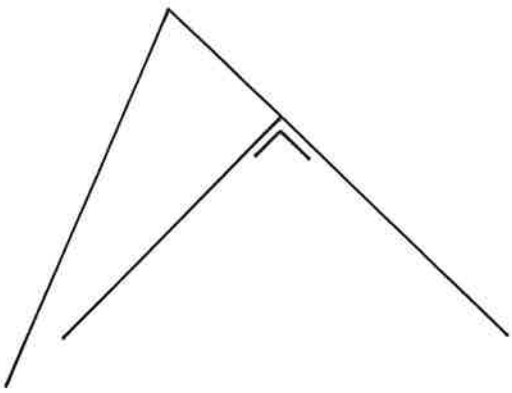
Une parabole

Document 10.2. : αμβλυγωνιου χωνου τομα section de cône obtusangle



Une demi-hyperbole

Document 10.3. : οξυγωνιου χωνου τομα section de cône acutangle



Une ellipse

Les trois sections coniques s'obtenaient donc par section de cône par un plan orthogonal à une génératrice.

Voici ce que dit Euclide au sujet de la dernière de ces courbes (l'ellipse) :

« Si un cône ou un cylindre est coupé par un plan non parallèle à la base, la section obtenue est ' une section d'un cône d'angle aigu ' qui est semblable à un ' bouclier ' ». (Voir le document 11 – Texte original d'Euclide – en annexe).

Il faudra attendre le Maître es coniques, Apollonius de Perge (262-190 av. J.-C.) pour

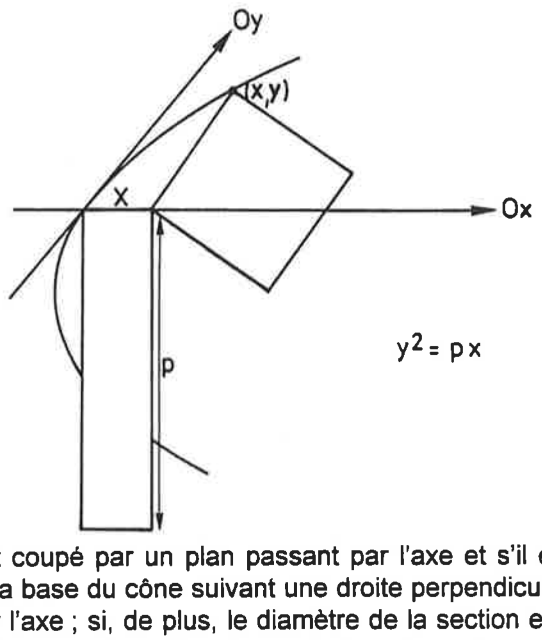
1° considérer les trois sections coniques comme sections d'un même cône ;
2° envisager l'hyperbole comme une courbe constituée de deux branches ;
3° nommer les trois sections coniques de l'appellation qui leur est restée.

Par l'intermédiaire de trois théorèmes liant chaque section de cône à une propriété d' « application d'aires », Apollonius va substituer

« parabole »	à	« section de cône rectangle »
« hyperbole »	à	« section de cône obtusangle »
« ellipse »	à	« section de cône acutangle ».

La géométrie analytique usuelle permet de comprendre aisément les liens entre coniques et applications des aires

Document 12.

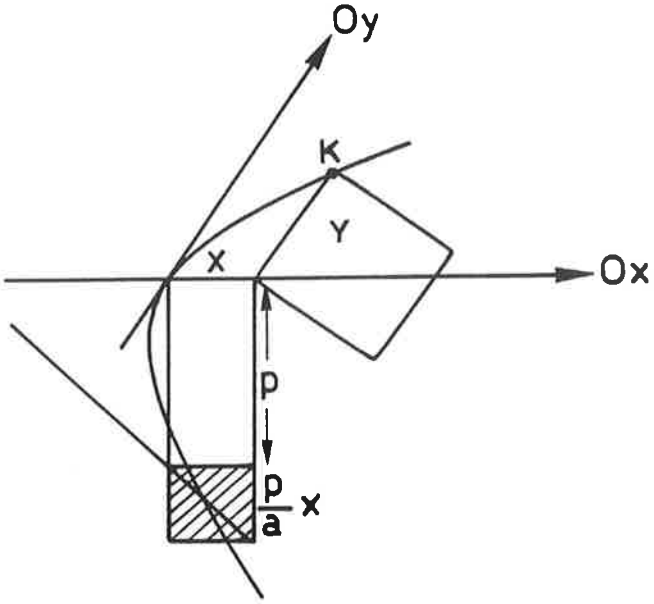


« Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe ; si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe,le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restants du triangle. Nous appellerons une telle section une **parabole**. »

Traduction de P. Ver Eecke

(Voir le document 13 – Texte original d'Apollonius – en annexe)

Document 14.



$$y^2 = x(p + \frac{p}{a}x)$$

ou

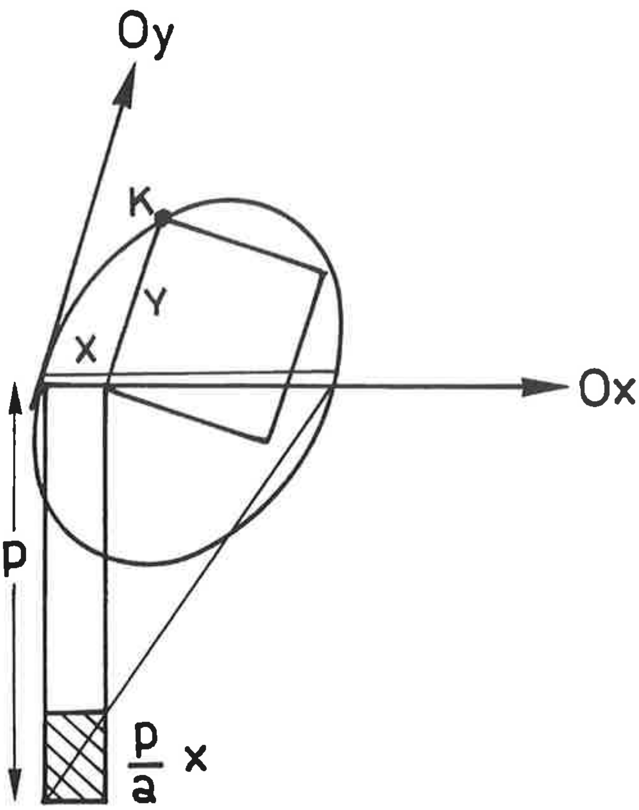
$$y^2 = xp + \frac{p}{a}x^2$$

« Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe ; si, de plus, le diamètre prolongé de la section rencontre l'un des côtés du triangle passant par l'axe au delà du sommet du cône, le carré de toute droite menée de la section, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône jusqu'au diamètre de la section, sera équivalent à une aire, appliquée suivant une certaine droite située dans le prolongement du diamètre de la section, et sous-tendant l'angle extérieur du triangle, est le même que le rapport du carré de la droite menée du sommet du cône, parallèlement au diamètre de la section, jusqu'à la base du triangle, au rectangle délimité sous les segments de la base, déterminés par la droite menée ; aire ayant comme largeur la droite découpée sur le diamètre par cette première droite, du côté du sommet de la section, et augmentée d'une figure qui, semblable au rectangle délimité par la droite sous-tendant l'angle extérieur du triangle, et par le paramètre, est semblablement placée. Nous appelons une telle section une **hyperbole**. »

Traduction de P. Ver Eecke

(Voir le document 15 – Texte original d'Apollonius – en annexe).

Document 16.



$$y^2 = x(p - \frac{p}{a}x)$$

ou

$$y^2 = xp - \frac{p}{a}$$

« Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe et s'il est coupé par un autre plan qui, rencontrant chacun des côtés du triangle passant par l'axe, n'est pas mené parallèlement ni anti-parallèlement à la base du cône ; si, de plus, le plan de base du cône et le plan sécant se rencontrent suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe, ou perpendiculaire au prolongement de cette base, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune des plans, jusqu'au diamètre de la section, sera équivalent à une aire appliquée suivant une certaine droite, avec laquelle le rapport du diamètre de la section est le même que le rapport du carré de la droite menée, du sommet du cône, parallèlement au diamètre de la section, jusqu'à la base du triangle, au rectangle délimité sous les droites que découpe cette dernière droite sur les côtés du triangle ; aire ayant comme largeur la droite découpée sur le diamètre par cette première droite, du côté du sommet de la section, et diminuée d'une figure semblable au rectangle délimité par le diamètre et par le paramètre, et semblablement placée. Nous appelons une telle section une **ellipse**. »

Traduction de P. Ver Eecke

(Voir le document 17 – Texte original d'Apollonius – en annexe).

Revenons aux « équations du second degré » ou du moins ce qui, chez Euclide, semble en tenir lieu :

Livre II, Th. 5

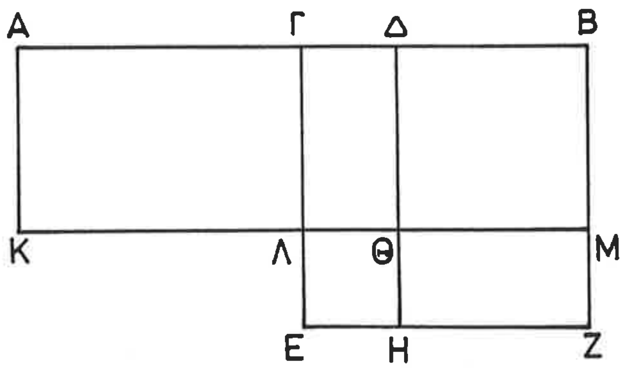
« Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière. »

Traduction de F. Peyrard, 1819
(Voir le document 18 – Texte original – en annexe).

Il faut donc démontrer que :

« Aire sur AΘ » + « Aire sur ΛH » = « Aire sur ΓZ ».

Document 19.



« Aire sur AΛ » égale « Aire sur ΓM »
« Aire sur ΓΘ » égale « Aire sur ΘZ »
d'où « Aire sur ΓM » = « Aire sur ΔZ »
« Aire sur AΛ » = « Aire sur ΔZ »
« Aire sur AΘ » = « Aire sur ΓΘ » + « Aire sur ΔZ »
« Aire sur AΘ » + « Aire sur ΛH » = « Aire sur ΓZ ».

(On notera le caractère « visuel » et particulièrement élémentaire de cette démonstration.)

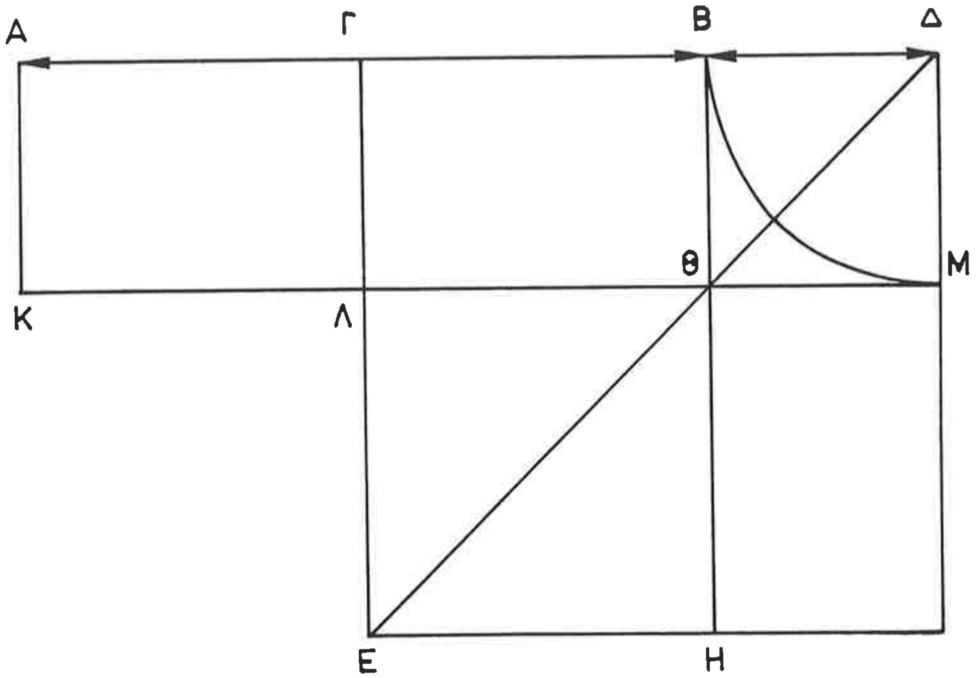
Si l'on pose l (AB) = a et l (ΔB) = x, alors le problème revient à trouver x tel que $a * x - x^2 = b^2$ où b^2 est l'aire d'un " gnomon " donné soit « une application par défaut » d'un rectangle sur un segment de longueur a.

Livre II, Th. 6

« Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite. »

Traduction de F. Peyrard, 1819
(Voir le document 20 – Texte original – en annexe).

Document 21.

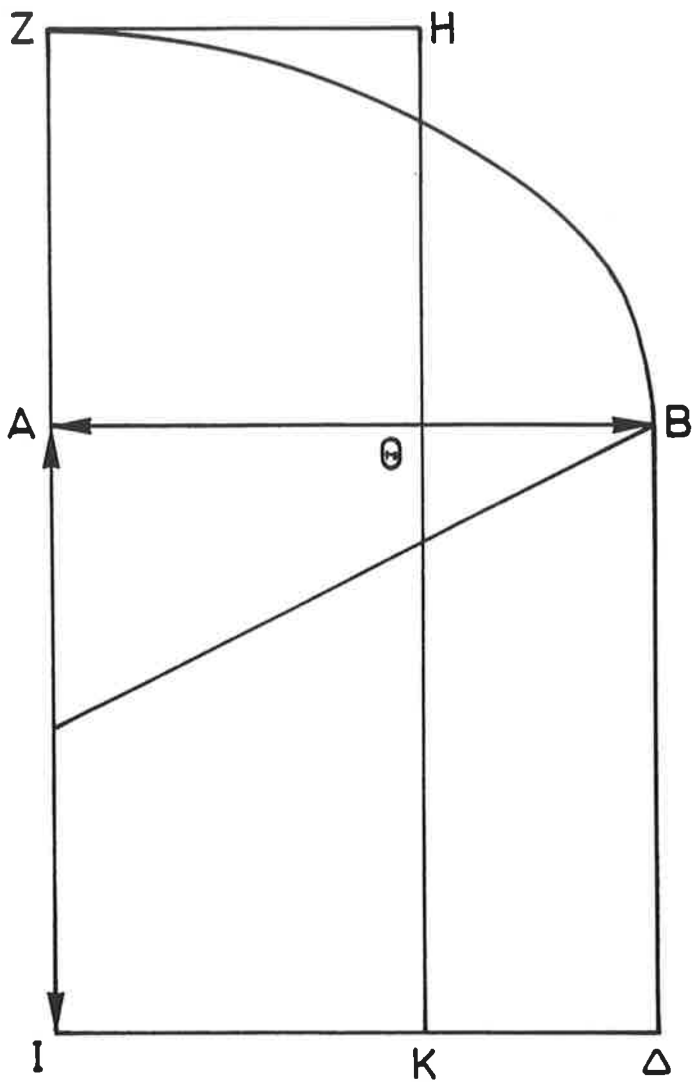


Il faut donc démontrer que « Aire sur Aθ » + « Aire sur Eθ » = « Aire sur ΓΔ ». Si l'on pose l (AB) = a, alors le problème revient à « appliquer par excès » le rectangle d'aire donnée b^2 sur le côté a donné.

D'où « l'équation contemporaine » : $a * x + x^2 = b^2$

Livre II, Th. 11

Document 22.



« Couper une droite donnée de sorte que le rectangle construit sur l'entière et un segment est égal au quarré sur le segment restant. »

(Voir le document 23 – Texte original – en annexe).

En d'autres termes, trouver un point θ du segment [A,B] de sorte que
« Aire du rectangle (AB, θB) » = « Aire du carré (A, θ) ».

Ce théorème et cette construction permettent de démontrer le théorème 30 du livre VI dont dépend la construction de certains polyèdres réguliers (dodécaèdre et icosaèdre).

Livre VI, Th. 30

Ακπον και μεσον λογον ευθεια τετμησθαι λεγεται, οταν η ωφ η ολη προφ το μειζον τμημα, ουτωφ το μειζον πραφ το ελλαττον

« Une ligne droite est coupée en ' moyenne et extrême raison ' quand la droite est au plus grand segment comme le grand est au petit ».

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{(l-x)}$$

d'où $l*(l-x) = x^2$

d'où $x^2 + l*x - l^2 = 0$

dont la racine positive est $\dfrac{l*(-1+\sqrt{5})}{2}$

ou en modifiant quelque peu,

$a = x, b = l - x, a + b = l,$

$$\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b}$$

ou encore $1 + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b}$

et en posant $\Phi = \dfrac{a}{b}$

$\Phi^2 - \Phi + 1 = 0$

d'où la racine positive $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

On reconnaît – la - « proportio divina » (Fra Luca Pacioli di Borgo, 1509)
- « sectio divina » (Kepler, 1596)
- « sectio aurea » (Leonardo da Vinci, 1509)

et – le célèbre « Nombre d'Or ».

Chapitre 3 : Progrès... ou influence babylonienne en Grèce ?

À côté de la vision d'« algèbre géométrique » que certains croient voir dans les *Éléments* d'Euclide et dont nous venons de vous donner un aperçu, les équations du second degré apparaissent, et cette fois sans aucune discussion, chez deux auteurs grecs : Héron et Diophante.Leur approche ne pourra manquer de rappeler celle de certains de leurs prédécesseurs !

HÉRON d'Alexandrie (?-62 apr. J.-C.)

Dans *Geometrica* 24.3, on lit :

« Étant donné un carré dont la somme de son aire et de son périmètre est 896, trouvez son côté. »

Cet énoncé est suivi d'une résolution, étape par étape :

« La moitié de 4 : 2 ».
« Le carré ajouté 4 + 896 d'où 900 ».
« La racine carrée : 30 ».
« On retranche 2 : 28 ».
« C'est le côté du carré ».

En écriture contemporaine, cela donne :

$$x^2 + 4 * x = 896$$
$$x^2 + 2 * \frac{4}{2} * x = 896$$
$$x^2 + 2 * \frac{4}{2} * x + 4 = 896 + 4 \quad \text{d'où} \quad 900$$
$$(x + \frac{4}{2})^2 = 900$$
$$x + \frac{4}{2} = 30$$
$$x = 28$$

Bien sûr, seule la racine positive est considérée !

Voici un autre problème traduit en notations contemporaines :

$$(\frac{11}{14}) * d^2 + (\frac{29}{7}) * d = 212$$

Cette fois, le coefficient principal est distinct de 1 !
Les démarches effectuées par Héron sont les suivantes :
il multiplie « l'équation » par 154, il vient :

$$121 * d^2 + 58 * 11 * d = 154 * 212$$
d'où
$$(11 * d)^2 + 58 * 11 * d = 154 * 212$$

Héron a multiplié toute son « équation » par 154 afin

1° d'éliminer les fractions,
2° de diminuer le nombre de divisions dans la suite de la résolution.

Cette technique n'est pas sans rappeler la technique du scribe babylonien et pose de nouvelles questions à l'historien des sciences : quelle est l'influence de la mathématique babylonienne sur la mathématique grecque ? À partir de quelle époque, cette influence s'exerce-t-elle et dans quelle proportion ?

DIOPHANTE d'Alexandrie (2e ou 3e siècle apr. J.-C.)

On trouve chez Diophante les mêmes problèmes et les mêmes techniques mais avec cette fois un essai de symbolisation :

« L'inconnue » s'appelle soit πληθος μοναδωυ αοριστον, soit αριθμος

Elle est symbolisée par γ dans le manuscrit de Madrid
par ς dans Marcianus 308

Le carré de l'inconnue x^2 est	δυναμις	Δ^{γ}
Le cube de l'inconnue x^3 est	κυβος	K^{γ}
La quatrième puissance x^4 est	δυναμοδιναμις	$\Delta^{\gamma}\Delta$
La cinquième puissance x^5 est	δυναμοκυβος	ΔK^{γ}
La sixième puissance x^6 est	κυβοκυβος	$K^{\gamma}K$

Voir aussi le document 24 en annexe.

L'addition se traduit par une simple juxtaposition (le signe + est inutile).

Les nombres « purs » sont associés à $\overset{0}{M}$.

La soustraction se traduit par $\uparrow$

Diophante regroupe tous les termes à additionner, puis tous les termes à soustraire.

Ainsi $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ s'écrira chez Diophante $K^{\gamma}\bar{\alpha}\,\varsigma\,\bar{\eta} \uparrow \Delta^{\gamma}\bar{\varepsilon}\;\overset{0}{M}\;\bar{\alpha}$

Diophante dit qu'il **faut** ramener tout problème du second degré à l'un des trois types suivants :

1. $m * x^2 + p * x = q$
2. $m * x^2 = p * x + q$
3. $m * x^2 + q = p * x$,

soit les « trois types babyloniens » que l'on va retrouver encore pendant longtemps ! Il n'y a pas de méthode unique pour résoudre les équations du second degré !

De plus, nous dit Diophante, il **faut** multiplier toute l'équation par le coefficient principal *m* si celui-ci n'est pas unité.

Dans l'*Arithmetica* de Diophante, on découvre les équations du second degré suivantes :

IV.22	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}$	$\varepsilon\sigma\tau\iota\ \varsigma\overline{\delta} \uparrow \overset{0}{M}\overline{\delta}$	pour	$x^2 = 4x - 4$
IV.31	$\Delta^{Y}\overline{\tau\kappa\varepsilon}$	$\varepsilon\sigma\tau\iota\ \varsigma\overline{\gamma}\ \overset{0}{M}\overline{\iota\eta}$	pour	$325x^2 = 3x + 18$
VI.6	$\Delta^{Y}\overline{\pi\delta}\ \varsigma\overline{\zeta}$	$\varepsilon\sigma\tau\iota\ \overset{0}{M}\overline{\zeta}$	pour	$84x^2 + 7x = 7$
VI.7	$\Delta^{Y}\overline{\pi\delta} \uparrow \varsigma\overline{\zeta}$	$\varepsilon\sigma\tau\iota\ \overset{0}{M}\overline{\zeta}$	pour	$84x^2 - 7x = 7$
VI.9	$\Delta^{Y}\overline{\chi\lambda} \uparrow \varsigma\overline{o\gamma}$	$\varepsilon\sigma\tau\iota\ \overset{0}{M}\overline{\text{ϛ}}$	pour	$630x^2 - 73x = 6$
VI.8	$\Delta^{Y}\overline{\chi\lambda}\ \varsigma\overline{o\gamma}$	$\varepsilon\sigma\tau\iota\ \overset{0}{M}\overline{\text{ϛ}}$	pour	$630x^2 + 73x = 6$

Voir en annexe les documents 25 et 26. Il s'agit du même texte de Diophante, mais... la graphie du second est bien plus usuelle !

Chapitre 4 : L'Inde, les équations du second degré et la naissance de l'algèbre

Des traces d'« algèbre » en tant que « calcul avec des inconnues » apparaissent déjà en Inde vers 300 av. J.-C. *Avijakta ganita*, science du calcul des inconnues, est opposé à *vijakta ganita*, science du calcul des connues ou arithmétique. À cette terminologie succèdera बीजगणित, *bîjaganita*, « élément d'analyse-science du calcul ».

Bhaskara II, vers 1150, dira « l'algèbre est semblable à l'arithmétique quant aux règles (des opérations fondamentales) mais apparaît lorsqu'il y a des quantités inconnues ».

Le mot *yavat-tavat* abrégé en *ya* signifie l'« autant que » et représente notre inconnue x. Son carré *yavat-varga* est abrégé en *yava*.

Préalables de lecture

Apparition des coefficients négatifs

Si a est un nombre positif, alors $\mathring{a}$ représente le négatif $(-a)$.

Le nombre absolu ou terme indépendant de l'équation se dit *rupa* abrégé en *ru*. (Notons que *rupa* donnera son nom à la monnaie indienne « roupie » ; cette remarque est loin d'être fortuite !)

L'écriture des équations ou méthode *nyâsa* consiste en une écriture sur deux lignes (les deux membres) de l'équation. Ainsi,

$\mathrm{y\bar{a}va}\ 0\ \mathrm{y\bar{a}}\ 10\ \mathrm{r\bar{u}}\ \mathring{8}$ représente $0x^2 + 10x - 8$

$\mathrm{y\bar{a}va}\ 1\ \mathrm{y\bar{a}}\ 0\ \mathrm{r\bar{u}}\ 1$ représente $1x^2 + 0x + 1$

ou $10x - 8 = x^2 + 1$.

On notera l'économie du signe d'égalité dans cette disposition.

La résolution des équations du second degré consiste en la *madhyamaharana*, terme qui vient de *madhyama* = moyen et *aharana* = élimination ou destruction et qui signifie « **élimination du moyen terme** ».

BRAHMAGUPTA (598-665)

Règle pour l'élimination du « moyen terme » :

« Mettre le nombre absolu du côté opposé à celui du carré et de l'inconnue simple en soustrayant.

Au nombre absolu multiplié par quatre fois le coefficient du carré, ajouter le carré du coefficient du ' moyen terme ', la racine carrée du même moins le coefficient du ' moyen terme ', étant divisée par deux fois le coefficient du carré, est la valeur du ' moyen terme ' ».

$$\overline{\text{y}}\text{ava } 1\ \ \text{y}\overline{\text{a}}\ \overset{0}{10}\ \ \text{r}\overline{\text{u}}\,0$$

$$\overline{\text{y}}\text{ava } 0\ \ \text{y}\overline{\text{a}}\ 0\ \ \text{r}\overline{\text{u}}\ \overset{0}{9}$$

$$\overset{0}{9} * 4 * 1 = \overset{0}{36}$$

$$\overset{0}{36}+\left(\overset{0}{10}\right)^2 = 64$$

$$8-\overset{0}{10}=18$$

$$\frac{18}{2*1}=9$$

MÂHAVIRÂ (850)

« Le quart d'un troupeau de chameaux fut aperçu dans la forêt ;
deux fois la racine carrée du troupeau gambadait sur la colline ;
trois fois cinq chameaux s'abreuvaient posément.
Quel est donc l'effectif de ce troupeau ? »

Cela donne l'équation : $\frac{1}{4} * x + 2 * \sqrt{x} + 15 = x$

BHASKARA II (1114-1150)

Voici l'énoncé d'une autre règle inspirée par Srîdharâ (750) :

« Quand un carré et autre terme de l'inconnue est engagé dans le reste ; alors, après avoir multiplié les deux côtés de l'équation par une quantité supposée, on doit leur ajouter quelque chose de sorte que le côté puisse donner une racine carrée.

Égaler encore la racine carrée du nombre absolu à la racine carrée de l'inconnue à partir de cette équation.

Si l'on ne peut pas parvenir ainsi à la solution, dans le cas de **cubes** ou de **bicarrées**, cette valeur doit être obtenue grâce à **la propre ingéniosité** du calculateur ! »

En traduction contemporaine, cela donne :

Soit l'équation : $a * x^2 + b * x = c$.

On doit chercher deux nombres y et z tels que $y * (a * x^2 + b * x) + z$ et $y * c + z$ soient des carrés.

La proposition de Bhaskara II est $y = 4 * a$ et $z = b^2$,

d'où $4 * a^2 * x^2 + 4a * b * x + b^2 = 4a * c + b^2$

d'où $(2 * a * x + b)^2 = 4a * c + b^2$.

Voici quelques autres énoncés de Bhaskara II.

« Oh ! Fille ! d'un groupe de cygnes,
7/2 fois la racine carrée était jouant
sur le rivage d'un plan d'eau.
Les deux cygnes absents s'ébattaient
amoureusement dans les flots.
Dis, quel est le nombre de cygnes ? »

(Voir document 27 – Texte original – en annexe.)

On obtient l'équation : $\frac{7}{2} * \sqrt{x} + 2 = x$. Bhaskara obtient les deux solutions 16 et 1/4 et ... bien sûr rejette 1/4 !

« La cinquième partie d'une troupe de singes,
moins trois, élevée au carré était allée dans une caverne.
Un singe était en vue, grimpé dans une branche.
Dis combien ils étaient ? »

(Voir document 28 – Texte original – en annexe.)

La résolution de cette équation fournit les racines 50 et 5 (5 doit être rejeté car incongru dans le problème). On constate que Bhaskara admet qu'une équation du second degré peut posséder deux racines :

« Si (après extraction des racines) la racine carrée du terme absolu est plus petite que le terme absolu négatif de l'autre côté, alors en prenant son négatif aussi bien que son positif, deux valeurs de l'inconnue sont trouvées. »

« Des singes s'amusaient.
De la troupe bruyante,
un huitième au carré gambadait dans les bois.
Douze criaient tous à la fois au haut de la colline verdoyante.
Combien d'êtres comptait la caste remuante ? »

Traduction de L. Rodet, 1878
(Voir document 29 – Texte original – en annexe.)

$$(\frac{1}{8} * x)^2 + 0 * x + 12$$
$$0 * x^2 + 1 * x + 0$$

Après quelques transformations, il vient $(x - 32)^2 = 16$. Ici, $16 < 32$ et Bhaskara accepte les deux solutions 16 et 48.

« Vois cet essaim de mouches à miel.
De la moitié prends la racine;
Dans un champ de jasmin, cette troupe butine.
Huit neuvièmes du tout voltigent dans le ciel.
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus un frelon bourdonner :
Attiré par l'odeur pendant la nuit dernière,
il s'était fait prisonnier;
Dis-moi : quel chiffre atteint la troupe buissonnière ? »

Document 30.

न्यासः याव १८ या ० रू ०
याव १६ या ९ रू १८

शोधने कृते जातौ पक्षौ

याव २ या ९ रू ०
याव ० या ० रू १८

एतावष्टभिः सङ्गुण्य तयोरेकाशीतिरूपाणि

प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा तयो साम्यकरणार्थं

न्यासः या ४ रू ९
या ० रू १५

साम्यलब्धं यावत्तावन्मानं ६ अस्य वर्णोत्थापि

ना जातालिकुलसङ्ख्या ७२

उदाहरणं। पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो

Résolution par l'hindou Bhaskara (∼1150) de l'équation écrite dans les deux premières lignes :

$$18x^2 + 0x + 0$$
$$=$$
$$16x^2 + 9x + 18$$

Chapitre 5 : L'équation du second degré dans le monde arabe

Au carrefour de la mathématique grecque et de la mathématique indienne, les mathématiciens arabes vont hériter des deux formes de pensée mathématique :

- de l'Inde : la numération décimale de position, l'écriture des « chiffres », l'algèbre (celle-ci avec une légère perte d'ailleurs !)
- de la Grèce : le souci des démonstrations rigoureuses par voie géométrique.

Mohammed ibn Musa al-KHWARIZMI (780-850)

Il publie, en 830, le *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab* ***al-gabr wa-l muqabala,*** « Bref ouvrage sur le calcul de **l'algèbre et l'amuqabala** »

Document 31.

« En algèbre, on rencontre trois sortes de nombres :

- les nombres simples ou dirham (cf. drachme ou unité monétaire. Pensons à rupa !)
- les « racines », « ǧizr » جذر ou « chose », « šay » شيء
  Chose donnera en latin « res », en italien « cosa », en allemand « Coss »
  « ǧizr » serait une traduction du sanscrit « mula » (racine d'un arbre, d'une plante, puis fondement, origine).
- les « carrés », « māl » مال (le bien, le montant, le trésor, qui donnera « census », « censo », « zensus »).

Le mot algèbre vient de al-gàbr الجبر qui signifie « restauration, reboutement, remise en place des os ».

Cette signification particulière se retrouve :

- dans un texte anglais de 1561 : « This araby worde **algebra** sygnifieth as well fractures of the bones, etc... as the restauration of the same. »
- dans un passage du chapitre XV du *Don Quichotte* de Cervantes : « En devisant ainsi, les deux compagnons arrivèrent à un village, où ce fut grand bonheur de trouver un **algébriste** pour panser l'infortuné Samson. »

Pour Al-Khwarizmi, par « **al-gabr** » il faut faire passer un terme soustractif d'un membre dans l'autre pour le rendre additif. Quant à « **al-muqabala** », il s'agit de la confrontation ou de la suppression des termes identiques dans les deux membres.

Vers l'an 1000, les termes « algèbre » et « algébristes » prennent déjà tout leur sens classique : al-Hayyam (1048-1123) parle des « procédés de résolution de l'algèbre et ... des algébristes ». Il faudra néanmoins un certain temps avant que l'Occident n'accepte le sens contemporain du mot « algèbre » dans :

Jean de Séville (1150) :	« Alghoarismi de arismetrice »
Sacrobosco (1200-1256) :	« Algorismus »
A. de Villedieu :	« Carmen de algorismo » (en vers provençaux !)
R. Bacon (1250) :	« Algebra quae est negotiatio et almochabala quae est census »

Maître Benetto de Florence :	«†Trattato di praticha d'arismeticha » (506 folios où l'« algèbre » occupe 3 livres sur 16)
Luca Pacioli (1494) :	« Arte Magiore »
Ghaligai (1520) :	« Une science inventée par un Arabe très savant du nom de Geber »
Cardan en 1545 :	« Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus »
Peletier en 1560 :	« De occulta parte numerorum quan Algebram vocant »
? en 1561 :	« Gebra und Almuthabula »
R. Bombelli en 1572 :	« L'algebra, parte maggiore dell'Arithmetica »
Gosselin en 1577 :	« De arte magna seu de occulta parte numerorum, quae est algebra et almucabala vulgo dicitur »

et...
en 1590, François Viète rejette le mot « algèbre » car n'ayant aucun sens en français et propose... « Analyse » !

Mais revenons à al-Khwarizmi :

Par « al-gabr » et « muqabala », on **doit** ramener toute équation du second degré à une des 6 formes canoniques. Tous les termes **doivent** apparaître comme des grandeurs additives. Le coefficient du « Trésor » (coefficient du carré de l'inconnue) **doit** être égal à l'unité et pour ce faire : **il faut diviser** toute l'équation par le coefficient du « trésor ».

Notre enseignement est bien hérité de l'algèbre al-Khwarizmi ! (Pourquoi ne pas reprendre la technique du Babylonien ?)

Les 6 formes canoniques d'équations sont :

1° « Des carrés égalent des choses »	$a*x^2 = b*x$
2° « Des carrés égalent des dirhems »	$a*x^2 = c$
3° « Des choses égalent des dirhems »	$b*x = c$
4° « Des carrés et des choses égalent des dirhems »	$a*x^2 + b*x = c$
5° « Des carrés et des dirhems égalent des choses »	$a*x^2 + c = b*x$
6° « Des choses et des dirhems égalent des carrés »	$b*x + c = a*x^2$

À côté de ses « algorithmes » (non symboliques !), al-Khwarizmi fournit une, parfois même plusieurs, justifications géométriques inspirées des théorèmes 5 et 6 du livre II des *Éléments* d'Euclide. Lorsqu'une équation admet deux racines de signes contraires, il ne retiendra que la seule racine positive ! Rappelons, de plus, que le symbolisme « à l'indienne » est perdu !

Document 32.

« Quant aux carrés et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : un carré et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams.

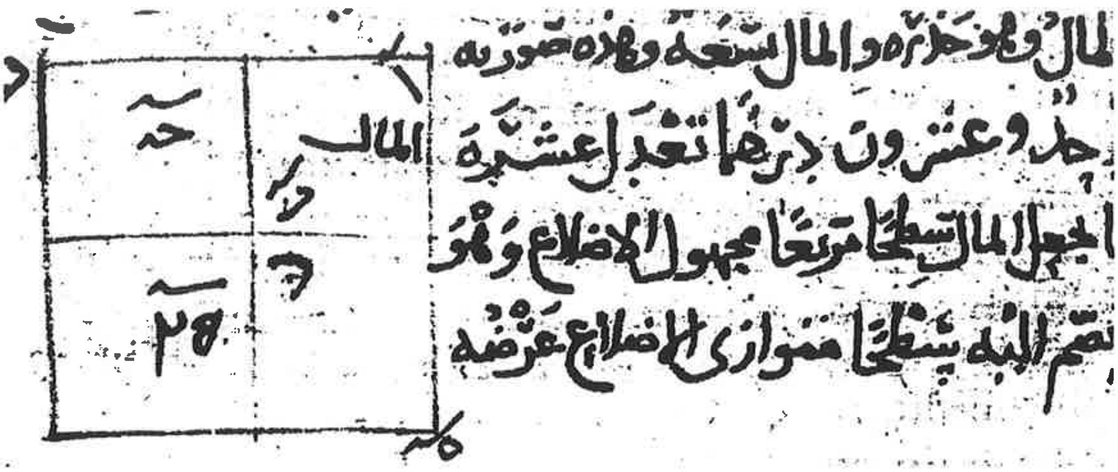
Sa signification est que tout carré, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines, [est tel que] cela atteindra trente-neuf.

Son procédé [de résolution] consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu en retranches la moitié [du nombre] des racines et c'est cinq. Il reste trois et c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est neuf. »

Al-Khwarizmi, *L'abrégé du calcul par le Jabr et la Muqabala*, d'après l'édition arabe de A.M. Masharata et M.M. Ahmad, Le Caire, 1968, pp. 18-19
Le nom d'al-Khwarizmi est à l'origine du mot algorithme.

Le texte décrit un algorithme de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$

Document 33.



Extrait du manuscrit de 1342

Document 34.

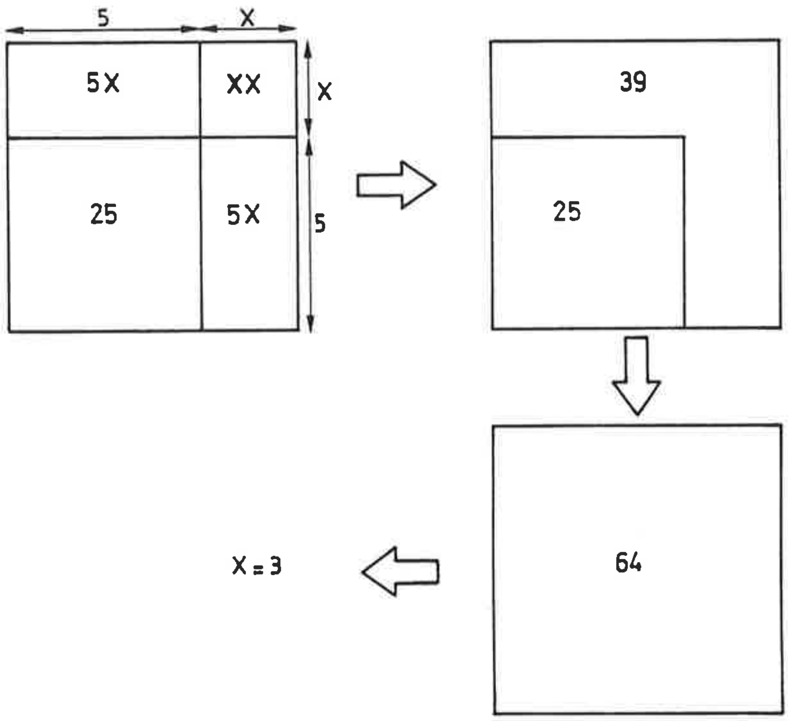


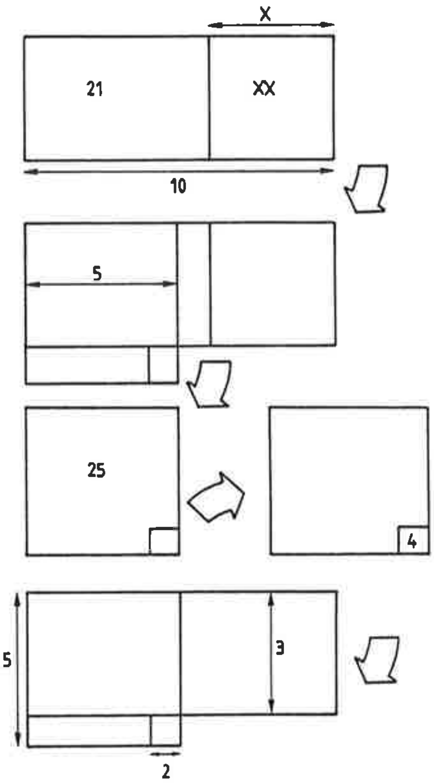
Schéma qui illustre la technique de résolution du même problème.

Quant à l'équation $x^2 + 21 = 10 * x$, elle apparaît au XII^e siècle, dans un manuscrit de R. de Chester, sous la forme : « Substancia vero et 21 dragmata 10 rebus equiparantur », et dont la résolution, en français, est : « Par exemple : un carré et 21 en nombre sont égaux à 10 racines du même carré ». En d'autres termes, que doit valoir le côté d'un carré qui, quand 21 dirhems lui sont ajoutés, devient égal à l'équivalent de 10 racines de ce carré ? La solution est : Divisons en 2 le nombre des racines ; cette moitié est 5 ; multiplions celle-ci par elle-même, ce produit est 25 ; soustrayons de ceux-ci les 21 qui sont liés au carré ; le reste est 4 ; extrayons la racine: elle vaut 2 ; soustrayons ceci de la moitié des racines, qui est 5, le reste est 3 ; ceci est la racine du carré que nous cherchions et le carré est 9. Ou vous pouvez ajouter la racine à la moitié des racines ; la somme est 7 ; et ceci est la racine du carré que vous cherchiez, et le carré lui-même est 49. »

Document 35.

Extrait du manuscrit de 1342

Document 36.



Explication « en forme de puzzle » de la résolution précédente

Mais on constate par le texte suivant :

« Sache en outre que si tu divises en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même et que le produit est plus petit que les dirhems ajoutés au carré, alors « *falmas' ala tu mustahila* » « *hunc quaestio est impossibilis* », mais s'il est égal aux dirhems, la racine du carré est égale à la moitié de la racine sans qu'on ajoute quoi que ce soit ».

En symbolisme contemporain, cela donne :

$$\text{dans } x^2 + c = b * x$$

$$\text{si } (\frac{b}{2})^2 < c \text{ alors "impossible"}$$

$$\text{si } (\frac{b}{2})^2 = c \text{ alors la solution est } \frac{b}{2}$$

Il s'agit de la première discussion liée au « signe du discriminant de l'équation du second degré » et d'une éventuelle « racine double ».

Tabit ibn QURRA (826-901)

Après al-Khwarizmi, Tabit ibn Qurra va montrer que les équations du second degré se ramènent à 3 formes canoniques au lieu des 6 et que les théorèmes 5 et 6 du livre II des *Éléments* d'Euclide suffisent pour les résoudre. Il dira également « Ce que nous (les géomètres) faisons, s'accorde parfaitement avec ce qu'ils (les algébristes) font. »

Al-SAMAWAL (?-1175)

Pour lui, « Il faut opérer sur les inconnues au moyen de tous les instruments arithmétiques comme l'arithméticien opère sur les connues. ». On tend dès lors vers un abandon des justifications géométriques lors de la résolution des équations.

Citons enfin un dernier mathématicien arabe :

Abu-l-Hasan Ali Ibn Muhammad al QALASADI (Grenade ?,-Tunis 1486)

Il introduit un symbolisme et un signe d'égalité dans les équations :
(N.B. : il utilise la version « occidentale » des chiffres indo-arabes !)

Document 37.

l'inconnue	"x"	ش
l'inconnue au carré	"x^2"	ص
l'inconnue au cube	"x^3"	ك
le signe de soustraction	"−"	إلا
le signe d'égalité	"="	ل

$x^2+10x=56$	ص 1 ش 10 ل 56
$x^2=8x+20$	ص 1 ل ش 8 ع 20
$3x^2=12x+63$	ص 3 ل ش 12 ع 63
$x^2+20=12x$	ص 1 ع 20 ل ش 12
$x^2+16=8x$	ص 1 ع 16 ل ش 8
$\frac{1}{2}x^2+x=7\frac{1}{2}$	ص $\frac{1}{2}$ ش 1 ل $7\frac{1}{2}$
$6x^2+12x=90$	ص 6 ش 12 ل 90
$4x^2+48=32x$	ص 4 ع 8 ع 4 ل ش 32

Chapitre 6 : Des techniques arabes à la symbolisation contemporaine

Les techniques que l'on peut qualifier « d'indo-arabes » vont peu à peu pénétrer l'Occident au cours du Moyen-Âge et progressivement donner naissance à une écriture symbolique qui fut jusqu'il y a peu considérée comme l'algèbre classique.

Chiffres indo-arabes, recherche d'écriture symbolique, fusion des « trois cas » de résolution des équations du second degré en un seul, tels seront les progrès apportés durant cette période.

Leonardo FIBONACCI (1170-après 1240)

« Primus enim modus est, quando census et radices equantur numero : ... Verbi gratia : duo census, et decem radices equantur denariis trenti. »

Il s'agit de l'équation : $2x^2 + 10x = 30$

(Notons la présence de *denariis*, « deniers », monnaie du moyen âge, cf. rupa et dirham.)

Les techniques et les exemples numériques sont repris du traité d'al-Khwarizmi ou des travaux d'Umar al-Hayyam. Les justifications géométriques proviennent des théorèmes 5 et 6 du livre II et des théorèmes 28 et 29 du livre VI des *Éléments* d'Euclide.

Paris, 15e siècle : « Si quatuor res et tres censi coequantur cinque numeri ».

1490 : **Nicolas CHUQUET** (~1445-~1500) :

.3.^{2} p.12.^{0} egault a .12.^{1}
... reste .0. donc R^2.0.
adioustee ou soustraicte
avec .2. ou de .2. monte
.2. qui est le nobre. que l'on demande

Voici un début de symbolisme et surtout l'acceptation du « zéro » comme nombre à part entière !, l'équation étant $3x^2 + 12 = 12x$ dont le « discriminant » vaut $144 - 144 = 0$.

1494 : **Lucas PACIOLI** (~1445-1517)

« Si res et census numero coequantur a rebus dimiidio sumpto censum producere debes, addereque numero, cuius a radice totiens tolle semis rerum, census latusque redibit ».

« Si une inconnue et son carré valent un nombre, après avoir pris la moitié des inconnues, tu dois le mettre au carré et l'ajouter au nombre ; à la racine de cela, enlève la moitié des inconnues et arrivera le carré et son côté. »

On retrouve ici « census » pour le carré, « radix » pour racine, « latus » pour le côté d'un carré.

1514 : **Gielis van der HOECKE**

3 Se.+2Pri.– 4N. dit is ghelijc 1

Il s'agit de l'équation $3x^2 + 2x - 4 = 1$.

C'est la première apparition, aux Pays-Bas, des signes « + » et « - ».

1521 : **Francesco GHALIGAI**

c°	pour	cosa	x
□	pour	censo	x^2
m°	pour	meno	-
p ou e	pour	piu	+
---	pour		=

□ 1 e 32 c° --- 320 numeri

$x^2 + 32x = 320$

1567 : **Christoff RUDOLFF** (1500-1543)

Sit 3 z p 2 𝔯 aequatus 5

pour $3x^2 + 2x = 5$

Michael STIFEL (1486-1567)

Moine augustin, comme Luther dont il ne tardera pas à partager les idées de réforme, ce mathématicien va connaître une vie assez mouvementée : adepte de numérologie, prédicateur hasardeux à propos de la fin du monde, il devra s'exiler à plusieurs reprises.

Au sujet des équations du second degré, M. Stifel a l'impression de trouver – enfin – une méthode unique de résolution des trois cas : c'est la célèbre règle « amasias ».

Voir le document 38, p. 34.

Hélas ! cette règle n'est pas unique puisqu'il faut (cf. quinto), dans certains cas ajouter et dans d'autres soustraire !

CARDANO (1501-1576)

Il s'inspire de la règle « amasias » de Stifel et donne la règle suivante dans l'*Ars Magna* en 1545

Querna, da bis
Nuquer, admi
Requan, minue dami

- Querna pour le type $x^2 = ax + N$
- da bis car, dans la résolution, on doit ajouter deux fois

$$x=\sqrt{((\frac{a}{2})^2+N)}+\frac{a}{2}$$

– Nuquer pour le type $N=x^2+ax$
– admi car, dans la résolution, on doit ajouter, puis soustraire

$$x=\sqrt{((\frac{a}{2})^2+N)}-\frac{a}{2}$$

– Requan pour le type $ax=x^2+N$
– minue dami, car dans la résolution, on doit soustraire, puis ajouter ou soustraire

$$x=\pm\sqrt{((\frac{a}{2})^2-N)}+\frac{a}{2}$$

Notons que CARDANO signale que si $(\frac{a}{2})^2-N$ n'est pas positif, alors le problème est faux !

Les notations ne s'imposent pas nécessairement partout et de manière uniforme : ainsi, le mathématicien allemand Johannes **SCHEUBEL**, en 1551, utilisera un symbolisme très particulier.

Voir le document 39, p. 35.

« Prima » désigne le carré de l'inconnue car… c'est la première puissance que l'on peut calculer avec l'inconnue x.
« Secundus » pour la troisième puissance car la deuxième qui...
« Tertia » pour la quatrième car ...

Robert RECORDE (~1510-1558)

En 1557, dans *The Whetstone of Witte*, il introduit le signe « = » avec une justification liée au symbole du parallélisme.

Voir le document 40, p. 36.

Jean BUTEON ou **Jean BORREL,** en 1559, use de notations très particulières :

1 ◊ P 6 ρ P 9 C 1 ◊ P 3 ρ P 24 pour $x^2+6x+9=x^2+3x+24$

Rafaele BOMBELLI (1526-1572)

En 1572, il écrit au sujet des équations du second degré :

L'inconnue x est notée par $\overset{\cup}{1}$, son carré x^2 par $\overset{\cup}{2}$, p pour +, m pour -
Il reste donc toujours trois cas à traiter !, mais pour la première fois depuis Bhaskara II, la mise sous forme canonique sert de justification ;

1. « di Potenze e Tanti eguale a Numero » : « Le premier est celui-ci. Divise chaque chose par la quantité de la puissance ; puis prends la moitié de l'« autant

que » et son carré ajoute-le au nombre ; de la somme prends le côté et du côté retranche la moitié de l' « autant que ». Il restera la valeur de l'« autant que ».

Soit à égaler $\overset{\overset{2}{\cup}}{2}$ .p. $\overset{\overset{1}{\cup}}{12}$ à 32, se réduisant à $\overset{\overset{2}{\cup}}{1}$ .p. $\overset{\overset{1}{\cup}}{6}$ à 16.
Puis prenons la moitié de l'« autant que » et ajoutons-le au côté de la puissance

Soit $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ ce qui fait $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ .p.3 dont le carré est $\overset{\overset{2}{\cup}}{1}$ .p. $\overset{\overset{1}{\cup}}{6}$ .p.9

Or nous voulons $\overset{\overset{2}{\cup}}{1}$ .p. $\overset{\overset{1}{\cup}}{6}$; par conséquent, nous ajouterons 9 aux deux parties, ce qui donnera $\overset{\overset{2}{\cup}}{1}$ .p. $\overset{\overset{1}{\cup}}{6}$ .p.9 égal à 25, et les côtés respectifs sont égaux $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ .p.3 égal à 5. En enlevant 3 de chaque partie $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ égal à 2. L'« autant que » égale 2.

2. « Di Tanti e numero eguale a Potenza »
3. « Di Potenze e Numero eguale a Tanti »

$$\overset{\overset{2}{\cup}}{1}\ .\text{p}.12\ \text{"="}\ \overset{\overset{1}{\cup}}{8}$$

En bref,
$$\begin{aligned}
&(\overset{\overset{1}{\cup}}{1}\ .\text{m}.4)^2\ \text{"="}\ 4\\
&\overset{\overset{1}{\cup}}{1}\ .\text{m}.4\ \text{"="}\ 2\\
&\overset{\overset{1}{\cup}}{1}\ \text{é gal à } 6
\end{aligned}$$

Mais on peut aussi avoir $(4.\text{m}.\ \overset{\overset{1}{\cup}}{1})$ "=" 2, ce qui en enlevant le moins donne 4 égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ .p.2 et l'« autant que » vaudra 2.

Terminons ce chapitre par une dernière proposition de notation, celle de Guillaume **GOSSELIN** qui, en 1577, usera de

L	pour	« Latus », l'inconnue « x »
Q	pour	« Quadratus », le carré de l'inconnue
P	pour	« + »
M	pour	« - »

D'où 12L M 1Q P 48 aequalia 144 M 24L P 2Q pour l'équation $12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2$.

Text (fol. 140 v)
Beispiel (fol. 141 v)

1ʒ aequatus 84 − 8r

Primo. Anumero radicum incipe, eumque dimidiatum, loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.

. . . *pono* − 4 *loco* − 8r

Secundo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.

scilicet − 4 *in* − 4 *facit* + 16

Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorum, aut signi subtractorum, exigentiam.

$$84 + 16 = 100$$

Quarto. Invenienda est radix quadrata, ex summa additionis tuae, vel ex subtractionis tuae relicto.

$$\sqrt{100} = 10$$

Quinto. Adde aut Subtrahe juxta signi aut exempli tui exigentiam.

$$10 - 4 = 6$$

ALIVD EXEMPLVM.

PRIMI CANONIS.

Pri.		ra.		N
4	+	3	ęquales	217

SECVNDI CANONIS.

ra.		N		pri.
3	+	175	æqu.	4

Hic, quia maximi characteris numerus non est unitas, diuisione, ut dictum est, ei succurri debet. Veniunt autem facta diuisione,

pri. ra. N

1 + $\frac{3}{4}$ æqu. $\frac{217}{4}$

$\frac{3}{8}$ in se, $\frac{9}{64}$ + $\frac{217}{4}$

ueni. $\frac{3481}{64}$. Huius ra.

sunt 7 $\frac{3}{8}$ minus $\frac{3}{8}$

manent 7

radicis ualor.

ra. N pri.

$\frac{3}{4}$ + $\frac{175}{4}$ equ. 1

$\frac{3}{8}$ in se. $\frac{9}{64}$ + $\frac{175}{4}$

ueni. $\frac{2809}{64}$. Huius ra.

sunt 6 $\frac{5}{8}$ plus $\frac{3}{8}$

ueniunt 7

radicis ualor.

ALIVD TERTII CANONIS EXEMPLVM.

3 pri. + 217 N æquales 52 ra.

Et hic, quia maximi characteris numerus non est unitas, diuisione ei succurrendum erit. Veniunt autem hoc facto,

1 pri. + $\frac{217}{3}$ N æquales $\frac{52}{3}$ N

$\frac{26}{3}$ in se. $\frac{676}{9}$, minus $\frac{217}{3}$, manet $\frac{25}{9}$

Huius ra. quæ est 1 $\frac{2}{3}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{de}\\ \\ \text{ad}\end{array}\right.$ 8 $\frac{2}{3}$, & manent 7, uel proueniunt 10 $\frac{1}{3}$. Vterque radicis ualor, quod examinari potest.

FIG. 64.—Part of p. 28 in Scheubel's Introduction to his *Euclid*, printed at Basel in 1550.

The Arte

as their woorkes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle vnto one other.* And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle vnto .2. other nombers.*

Allwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiõ of *equations*. I will propounde a fewe exãples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══════, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze. —+— .15.ꝯ ═══════ 71.ꝯ.
2. 20.ze. ——— .18.ꝯ ═══════ .102.ꝯ.
3. 26.ʒ. —+— 10ze ═══════ 9.ʒ ——— 10ze —+— 213.ꝯ.
4. 19.ze —+— 192.ꝯ ═══════ 10ʒ —+— 108ꝯ ——— 19ze
5. 18.ze —+— 24.ꝯ. ═══════ 8.ʒ. —+— 2.ze.
6. 34ʒ ——— 12ze ═══════ 40ze —+— 480ꝯ ——— 9.ʒ.

RECORDE'S SIGN OF EQUALITY

From Recorde's *Whetstone of witte* (1557)

Chapitre 7 : Un Brugeois remarquable !

Simon STEVIN

Dans *son Arithmétique*, Simon Stevin va, par une voie audacieuse pour l'époque, résoudre ce que ses prédécesseurs tentèrent sans succès à plusieurs reprises : la fusion des trois types de résolution des équations du second degré en un seul !

Trois remarques préalables s'imposent :

S. Stevin utilise une terminologie, critiquée par Fr. Viète, qui élimine le langage « équations » au profit d'un langage « en termes de proportions », ainsi

$$\frac{x^2}{(q-px)}=\frac{x}{a} \quad \text{pour} \quad x^2=q-px$$

$$\frac{x^2}{(px-q)}=\frac{x}{a} \quad \text{pour} \quad x^2=px-q\ ,$$

$$\frac{x^2}{(px+q)}=\frac{x}{a} \quad \text{pour} \quad x^2=px+q$$

ajoutant tacitement que dans ces proportions, numérateur et dénominateur doivent être égaux.

Les deux membres s'appellent « premier » et « second terme ».

L'inconnue est le « nombre algebraïque quelconque » et constitue le « troisième terme ».

La notation que Stevin emploie dans ses démonstrations nous paraît beaucoup plus usuelle !

Son écriture, très belle pour l'époque, s'inspire, semble-t-il, des notations de R. Bombelli :

- l'inconnue « x » est symbolisée par ①
- son carré par ②
- son cube par ③

Ainsi, l'équation 4③ + 2② égale 4① + 2 représente $4x^3 + 2x^2 = 4x + 2$.

Écoutons à présent S. Stevin qui nous rappelle l'évolution historique du sujet telle qu'il la connaissait :

Voir le document 41, p. 39.

Examinons le livre LXVIII : la remarque initiale montre bien que le Brugeois est parfaitement conscient de sa découverte !

Voir le document 42, p. 40.
Voir le document 43, p. 41.
Voir le document 44, p. 42.

Et enfin, le texte le plus remarquable :

Voir le document 45, p. 43.

Les deux lignes :
« A la mesme **ajousté** 2 premier en l'ordre faict .... 6 » (Cf. document 43)
« A la mesme **ajousté** -3 premier en l'ordre faict .... 2 » (Cf. document 45), sont identiques « mot pour mot » et révèlent la clé de la fusion des trois types de résolution des équations du second degré en un seul :

« ajouter un négatif » = « soustraire un positif »

C'est la première fois, en mathématique, que les nombres négatifs sont utilisés dans ce sens : **grâce aux négatifs, la soustraction se ramène à une addition.**

C'est là le trait de génie de Simon Stevin, et comme le dit M.H. BOSMANS : « Voici tout à coup que le grand géomètre se redresse et va nous faire sentir la griffe du lion ».

DES INVENTEVRS DE CES REIGLES DE TROIS DES QVANTITEZ.

Les inuenteurs de ces reigles de trois des quantitez ont esté.

Mahomet filz de Mose Arabien de	① egale à ⓪. Leurs deriuatifs. ② egale à ① ⓪.
Et quelque autheur incognu	Leurs deriuatifs.
Quelque autre autheur incognu	③ egale à ① ⓪. ③ egale à ② ⓪.
Louys de Ferrare	④ ega. à ③ ② ① ⓪.

Quant à Diophante, il semble qu'en son temps les inuentions de Mahomet aient seulement esté cognues, comme se peult colliger de ses six premiers liures; Il est vrai qu'il solue de merueilleuses questions, comme nous declarerons en son lieu, mais il conduict communement ses operations par vne admirable subtilité, ainsi, que le premier & second terme, deuiennent ① egale à ⓪, ou leurs deriuatifs, & aucunefois, mais rarement, a ② egale a ① ⓪.

Les deriuatifs de ② egale a ① ⓪, inuentez par le susdict premier autheur incognu, sont descripts par Lucas Pacciolo.

Quant aux inuentions du second autheur incognu, Cardane se dict les auoir trouué par escript; mais qu'elles n'estoient point diuulgees; Aussi que Scipio Ferreus de Bologne, aie trouué la premiere sorte, qui est de ③ egale a ① ⓪; Auquel suiuoit Nicolas Tartalia Bressian, mais par occasion de quelque dispute qu'il eust de ceste matiere, auec Antonio Maria Flendo Venetien, disciple dudict Scipio, en laquelle il discouura quelque chose, par laquelle Nicolas le coniectura, & trouua; Lequel apres beaucoup de prieres de Cardane: le lui à declairé, ce que luy Cardane estoit fondement, par lequel il est venu au bout de plusieurs demonstrations geometriques, de ③ egale à ② ① ⓪, & leurs dependances, dont il à descript vn liure intitulé *Ars magna*.

Mais l'inuention de Louys de Ferrare est n'agueres diuulguée en langue Italienne par Raphael Bombelle grand Arithmeticien de nostre temps.

PROBLEME LXVIII.

ESTant donnez trois termes, desquels le premier ②, le second ① ⓪, le troisiesme nombre algebraique quelconque: Trouuer leur quatriesme terme proportionel.

NOTA. Le binomie du second terme donné de ce probleme se peut rencontrer en trois differences à sçauoir:

① + ⓪.
— ① + ⓪.
① — ⓪.

Desquelles les autres en donnent trois diuerses operations, ausquels Michel Stifle à accommodé ce mot *Amisias.* & Cardane liure 10 chap. 5 ce carme,

Querna, dabis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami.

Mais nous demonstrerons vne seule maniere, par laquelle sans varier d'vne syllabe, l'operation sera en toutes trois la mesme: Parquoi faut sçauoir que nous ne les appellons pas Differences, en respect des operations, car comme nous disons, l'operation est en toutes la mesme, mais en respect des diuersitez, de la disposition des quantitez, du second terme donné.

PREMIERE DIFFERENCE DE SECOND TERME ①+⓪.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ②, le second 4 ① + 12, le troisiesme 1 ①. *Explication du requis*. Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

La moitie de 4 (des 4 ①) est	2
Son quarré	4
Au mesme aiousté le ⓪ donné qui est	12
Donne somme	16
Sa racine quarrée	4
× A la mesme aiousté 2 premier en l'ordre faict	6

Ie di que 6 est le quatriesme terme proportionel requis.

De l'operation.

TROISIESME DIFFERENCE

de second terme ①—⓪.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels : le premier 1 ②, le second 6 ① — 5, le troisiesme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

La moitie de 6 (des 6 ①) est	3
Son quarré	9
Au mesme aiousté le ⓪ donné, qui est	—5
Donne somme	4
Sa racine quarrée	2
A la mesme aiouste 3 premier en l'ordre, faict pour maieure solution	5
Ou autrement soubstraict ledict 2. de 3 premier en l'ordre (ce qui est le propre de ceste troisiesme difference, dont la raison sera manifeste, par l'origine de ces constructions suiuantes) reste pour moindre solution	1

Ie di que & 5 & 1 est le quatriesme terme proportionel requis.

DEVXIESME DIFFERENCE, DE SECOND TERME —① + ⓪.

Explication du donné. Soient donnez trois termes selon le probleme tels: le premier 1 ②, le second —6 ① + 16, le troisiesme 1 ①. *Explication du requis.* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

Construction.

La moitie de —6 (des —6 ①) est	—3
Son quarré (car —3 par —3 faict +9) est	9
Au mesme aiouste le ⓪ donné, qui est	16
Donne somme	25
Sa racine quarrée	5
× A la mesme aiouste —3 premier en l'ordre, faict	2

Ie di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis.

Chapitre 8 : Épilogue

L'histoire va, désormais, s'accélérer. Les notations vont devenir ce qu'elles sont aujourd'hui. Les équations du second degré, ramenées à un seul type de résolution, n'attendent plus que l'écriture définitive de « leur formule de résolution ».

François VIÈTE (1540-1603), en 1590, écrit l'équation $3x^2 + 2x = 5$ de la manière suivante : 3 in A quad + 2 in A aequantur 5.

On est loin de l'écriture sympathique de Bombelli et de Stevin ! En fait, les textes de Viète présentés habituellement ont été « réécrits » par Van Schooten à l'aide des notations en usage en... 1646 !

A. GIRARD (1595-1632), un admirateur de S. Stevin, en 1629, écrit la même équation sous la forme :

	3(2) + 2(1) = 5
OUGHTRED (1574-1660), en 1631, l'écrira	$3\ Z_q + 2\ Z = 5$
HARRIOT (1560-1621), en 1631,	3.aa + 2.a ═══ 5
HERIGONE, en 1634,	3a2 + 2a 2/2 5
DESCARTES (1596-1650), en 1637,	3 yy + 2 y ∝ 5
WALLIS (1616-1703), en 1693,	3xx + 2x - 5 = 0
et enfin en 1700	$3x^2 + 2x - 5 = 0$

Les graphies xx et x^2 vont rester en concurrence pendant quelques temps encore, alors que les puissances supérieures à 2 reçoivent leurs notations contemporaines x^3, x^4, etc.

xx chez Descartes, Huygens, Wallis, Newton, Rolle, Euler.
x^2 chez Leibniz, Gregory, Pascal, Wallis et... Gauss

C'est Gauss qui, pour des raisons typographiques et esthétiques, adoptera et imposera la notation x^2.

Dans l'*Algèbre* de MACLAURIN (1698-1746) parue en 1748, on peut lire :

1° Transportez tous les termes qui contiennent l'inconnue dans un membre de l'équation et tous les termes connus dans l'autre.
2° Si le carré de l'inconnue est multiplié par quelque quantité, divisez tous les termes de l'équation par cette quantité.
3° Formez le carré de la moitié de la quantité qui multiplie l'inconnue simple, ajoutez-le dans l'un et l'autre membre de l'équation et par ce moyen le membre qui renferme l'équation sera un quarré parfait.
4° Tirez la racine quarrée de l'un et l'autre membre, qui, dans l'un, fera toujours l'inconnue avec la moitié de la quantité qui multipliait l'inconnue simple ; de sorte qu'en transposant cette moitié, on aura la valeur de l'inconnue.

639.

Une équation de l'eſpece dont il s'agit, peut ſe réduire, par le moyen de la diviſion, à une forme telle, que le premier terme ne contienne purement que le quarré xx de l'inconnue x. On laiſſera le ſecond terme du même côté où eſt x, & le terme connu on le portera de l'autre côté du ſigne $=$. Notre équation prendra de cette maniere la forme $xx \pm px = \pm q$, où p & q ſignifient des nombres connus quelconques, poſitifs ou négatifs; & tout ſe réduit à préſent à déterminer la vraie valeur de x. Nous commencerons par remarquer que ſi $xx + px$ étoit un quarré effectif, la réſolution n'auroit aucune difficulté, parce qu'il ne s'agiroit que de prendre des deux côtés la racine quarrée.

040.

Mais il eſt clair que $xx+px$ ne ſauroit être un quarré, puiſque nous avons vu plus haut que ſi une racine eſt de deux termes, par exemple $x+n$, ſon quarré contient toujours trois termes, ſavoir, outre le quarré de chaque partie, encore le double du produit des deux parties; c'eſt-à-dire, que le quarré de $x+n$ eſt $xx+2nx+nn$. Or nous avons déjà d'un côté $xx+px$, nous pouvons donc regarder xx comme le quarré de la premiere partie de la racine, & il faut en ce cas que px repréſente le double du produit de la premiere partie x de la racine par la ſeconde partie; par conſéquent cette ſeconde partie doit être $\frac{1}{2}p$, & en effet le quarré de $x+\frac{1}{2}p$ ſe trouve être $xx+px+\frac{1}{4}pp$.

641.

Or $xx + px + \frac{1}{4}pp$ étant un quarré réel qui a pour racine $x + \frac{1}{2}p$, si nous représentons notre équation $xx + px = q$, nous n'avons qu'à ajouter de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, ce qui nous donne $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, où le premier membre est effectivement un quarré, & où l'autre membre ne renferme que des quantités connues. Si donc nous prenons des deux côtés la racine quarrée, nous trouvons $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$; & soustrayant $\frac{1}{2}p$, nous obtenons $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$; & comme toute racine quarrée peut être prise soit affirmativement, soit négativement, nous aurons pour x deux valeurs exprimées de cette maniere:

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}.$$

642.

Voilà la formule qui contient la regle, d'après laquelle toutes les équations du second degré peuvent être résolues, & il sera bon d'en imprimer la substance dans la mémoire, afin qu'on n'ait pas besoin de répéter à chaque fois toute l'opération que

nous venons de faire. On pourra toujours ordonner l'équation, de façon que le quarré pur xx se trouve d'un seul côté, & qu'ainsi l'équation ci-dessus ait la forme $xx = -px + q$, où l'on voit alors sur le champ que $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

Bibliographie

1. H.B. BOSMANS, *La résolution de l'équation du 2nd degré chez S. Stévin*, Annales de la Soc. Scientif., TXXXV
2. G. BOUCHENY, *Curiosités et récréations mathématiques*, Paris, Larousse, 1939.
3. L.N.H. BUNT, P.S. JONES, J.D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, New York, Dover publication, 1986.
4. Fl. CAJORI, *A History of Mathematical Notations, Notations mainly in Higher Mathematics*, Open Court, Chicago (Ill.), 1952.
5. M. CAVEING, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Presses Univ. Lille, 1994.
6. A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, *Routes et dédales*, Études Vivantes, 1982.
7. B. DATTA et A.N. SINGH, *History of Hindu Mathematics. A source Book*, Lahore, Motilal Banarsi Das, 1938.
8. P. DEDRON et J. ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, Magnard, 1959.
9. R. DEPAU, *Simon Stevin*, Bruxelles, Office de publicité, Coll. nationale, 1942.
10. H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, The Saunders Series, 1983.
11. H. GERICKE, *Mathematik in Antike und Orient*, Berlin-New York, Springer-Verlag, 1984.
12. G. OHEVERGHESE JOSEPH, The Crest of the Peacock, Penguin, 1991.
13. S.T. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover publication, 1981.
14. S.T. HEATH, *The Thirteen Books of The Elements*, New York, Dover publication, 1956.
15. J. HØYRUP, *« Algèbre d'Al-gabr » et « algèbre d'arpentage » au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne*, in « D'Imhotep à Copernic. Actes du Colloque International ULB 1989, Cahiers d'Altaïr », Peeters, Leuven, 1992.
16. I.R.E.M., *Histoire des mathématiques pour les Collèges*, C.E.D.I.C., 1980.
17. I.R.E.M., *Équations du second degré*, C.E.D.I.C., 1979.
18. I.R.E.M., *Mathématiques au fil des âges*, Gauthiers-Villars, 1987.
19. J. KLEIN, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, New York, Dover publication, 1992.
20. H. MIDONICK, *The Treasury of Mathematics*, Ponguin Books, 1968.
21. N.C.T.M., *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, 1993.
22. F. PEYRARD, *Les œuvres d'Euclide*, Paris, A.Blanchard, 1966.
23. R. RASHED, *Entre arithmétique et algèbre*, Les Belles Lettres, 1984.
24. D.E. SMITH, *History of Mathematics*, New York, Dover publication, 1958.
25. C.N. SRINIVASIENGAR, *The History of Ancient Indian Mathematics*, Calcutta, The World Press Private L.T.D, 1967.
26. D.J. STRUIK (éd.), *The Principal Works of Simon Stevin*, N.V. Swets & Zeittinger, Amsterdam, 1958.
27. A. SZABO, *Les débuts des mathématiques grecques*, Paris, J. Vrin, 1977.

28. Ph. TALON, *Introduction aux mathématiques babyloniennes*, in « D'Imhotep à Copernic. Actes du Colloque International ULB 1989, Cahiers d'Altaïr », Peeters, Leuven, 1992.
29. R. TATON, *Histoire générale des sciences*, P.U.F., 1956-1964.
30. I. THOMAS, *Greek Mathematical Works*, Harvard University Press, 1993.
31. B.L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, J. Wiley & Sons, 1963.
32. B.L. VAN DER WAERDEN, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, 1983.
33. B.L. VAN DER WAERDEN, *A History of Algebra from Al Khawarizmi to Emmy Noether*, Springer, 1985.
34. A.P. YOUSCHKEVITCH, *Les mathématiques arabes (VIIIe - XVe siècles)*, Paris, Vrin, 1976.

BM 13901 Face

Document 6

Procl. in *Eucl.* I., ed. Friedlein 419. 15–420. 19

Ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων. ὅταν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαρατείνῃς, τότε παραβάλλειν ἐκεῖνο τὸ χωρίον φασίν, ὅταν μεῖζον δὲ ποιήσῃς τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτός, τότε ἐλλείπειν. καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐνταῦθα δὲ τῆς παραβολῆς ἐδεήθη τῷ δοθέντι τριγώνῳ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσον ἐθέλων παραβαλεῖν [παραλληλόγραμμον], ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλογράμμου τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον, ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὡρισμένην παραβολήν.

Document 11

Ἐὰν γὰρ κῶνος ἢ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ παρὰ τὴν βάσιν, ἡ τομὴ γίγνεται ὀξυγωνίου κώνου τομή, ἥτις ἐστὶν ὁμοία θυρεῷ.

Ibid., Props. 11-14, Apoll. Perg. ed. Heiberg i. 36. 26–58. 7

ια´

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή.

ιβ'

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν

τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ' εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή.

ιγ

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος,
τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν
ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου,
μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἠγμένῳ μήτε
ὑπεναντίως, τὸ δὲ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις
τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ'
εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ
τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἥτις
ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ
κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς
τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά
τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς
τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης
ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον
τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς
τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ'
αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις, πλάτος
ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς
διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ἐλλεῖπον
εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχο-
μένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν
δύναται· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις.

Document 18

Εαν ευθεια γραμμη τμηθη εις ισα και ανισα, το υπο των ανισων της
ολης τμηματων περιεχομενον ορθογωνιον μετα του απο της μεταξυ
των τομων τετραγωνου ισον εστι τω απο της ημισειας τετραγωνω

Document 20

Εαν ευθεια γραμμη τμηθη διχα, προστεθη δε τις αυτη ευθεια επ ευθειας,το υπο της ολης συν τη προσκειμενη και της προσκειμενης περιεχομενον οπθογωνιον μετα του απο της ημισειας τετραγωνου ισον εστι τω απο της συγκειμενης εκ τε της ημισειας και της προσκειμενης τετραγωνω

Document 23

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Les nombres positifs sont écrits dans la numération alphabétique grecque :

108. LA NUMÉRATION ALPHABÉTIQUE GRECQUE

(Réf. : Guitel, Ifrah)

1	Α	α	Alpha	1000	'Α	Pour écrire les milliers, on reprend les lettres des unités et on leur ajoute, en général à gauche, le signe ' .
2	Β	β	Bêta	2000	'Β	
3	Γ	γ	Gamma	3000	'Γ	
4	Δ	δ	Delta	4000	'Δ	
5	Ε	ε	Epsilon	5000	'Ε	
6	Ϝ	ϛ	Digamma	6000	'Ϝ	
7	Ζ	ζ	Dzêta	7000	'Ζ	
8	Η	η	Êta	8000	'Η	
9	Θ	θ	Thêta	9000	'Θ	
10	Ι	ι	Iota	10000	$\overset{\alpha}{M}$	Pour écrire les dizaines de milliers, on utilise le signe M (Myriade : Μυριοι), et on le surmonte de la lettre correspondant au nombre de dizaines de milliers. Après 90 000, on poursuit de la même manière.
20	Κ	κ	Kappa	20000	$\overset{\beta}{M}$	
30	Λ	λ	Lambda	30000	$\overset{\gamma}{M}$	
40	Μ	μ	Mu	40000	$\overset{\delta}{M}$	
50	Ν	ν	Nu	50000	$\overset{\varepsilon}{M}$	Ainsi : $\overset{\iota\alpha}{M}$ 110 000
60	Ξ	ξ	Ksi	60000	$\overset{\text{ϛ}}{M}$	
70	Ο	ο	Omicron	70000	$\overset{\zeta}{M}$	On peut aller jusqu'à
80	Π	π	Pi	80000	$\overset{\eta}{M}$	99 990 000 $\overset{\text{'θϡϙθ}}{M}$
90	Ϙ	ϙ	Koppa	90000	$\overset{\theta}{M}$	

100	Ρ	ρ	Rhô
200	Σ	σ	Sigma
300	Τ	τ	Tau
400	Υ	υ	Upsilon
500	Φ	φ	Phi
600	Χ	χ	Khi
700	Ψ	ψ	Psi
800	Ω	ω	Oméga
900	Ϡ	ϡ	San

Quelques exemples :

13 $\overline{\text{ΙΓ}}$ 25 $\overline{\text{ΚΕ}}$ 37 $\overline{\text{ΛΖ}}$ 86 $\overline{\text{ΠϚ}}$

125 $\overline{\text{ΡΚΕ}}$ 364 $\overline{\text{ΤΞΔ}}$ 1475 $\overline{\text{'ΑΥΟΕ}}$

(Pour distinguer les lettres-lettres et les lettres-chiffres, on surmonte celles-ci d'un petit trait)

Καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ Δ ἐπίσημον ἔχον τ. ΔΥ. ὁ δὲ κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον Κ ἐπίσημον ἔχον τ. ΚΥ. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον, δέλτα δύο ἐπίσημον ἔχοντα τ. ΔΔΥ, ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτῷ πλευρᾶς κύβου πολλαπλασιασθέντος, δυναμόκυβος καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ΔΚ ἐπίσημον ἔχον τ. ΔΚΥ. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο ΚΚ ἐπίσημον ἔχον τὸ τ. ΚΚΥ

DIOPHANTUS ON EQUATIONS

καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις καὶ ἔστιν
αὐτῆς σημεῖον τὸ [Δ] ἐπίσημον ἔχον Υ, Δ^Υ δύναμις
ὁ δὲ κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον Κ, ἐπίσημον
ἔχον Υ, Κ^Υ κύβος ;
ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτον πολυπλασιασθέντος
δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δελτα δύο
ἐπίσημον ἔχοντα Υ, Δ^ΥΔ, δυναμοδύναμις·
ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς
αὐτῷ πλευρᾶς κύβου πολυπλασιασθέντος
δυναμόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὰ ΔΚ,
ἐπίσημον ἔχοντα Υ, ΔΚ^Υ δυναμόκυβος.
ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολυπλασιάσαντος
κυβόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κάππα
ἐπίσημον ἔχοντα Υ, Κ^ΥΚ, κυβόκυβος.

Document 27

बाले मरालकुलमूल दलानिसन्न

तीरे विलास मरमंथरगाम्यपश्यम

कुर्वंचकेलि कलहं कलहंसयुग्मम

शेषं जले वदमरालकुल प्रमाणम्.

Document 28

यूथात् पंचांशकस्त्र्यूनो वर्गितोगह्वरंगत:

दृष्ट: शाखामृग: शाखामारूढ़ो वदतेकति

Document 29

वनांतराले प्लवगाष्टभाग: संवर्गितोवल्गति जातराग:

फूत्कार नादप्रतिनादहृष्टा दृष्टागिरौ द्वादशाते कियंत: