PROBLEMATHS
16 octobre 2017

ÉNONCÉS

Problemath 4

Quels sont les triples (x, y, z) de nombres réels ≥ 0 vérifiant le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3 \end{array}\right. \ ?$$

Problemath 5

Le diabolique Fantomath s'est emparé de 3 logiciens A, B, C, auxquels il a administré un puissant somnifère. Lorsqu'ils se réveillent, il leur annonce qu'il a écrit un nombre premier sur le front de chacun d'eux et que ces 3 nombres (non nécessairement distincts) sont les longueurs des côtés d'un triangle dont le périmètre est lui aussi un nombre premier. Chacun peut voir le nombre écrit sur le front des deux autres (sans pouvoir voir le sien) mais ils n'ont pas la possibilité de communiquer entre eux. Un sourire sardonique aux lèvres, Fantomath annonce alors qu'il libérera le premier qui devinera le nombre écrit sur son propre front. Le logicien A voit un 5 sur le front de B et un 7 sur celui de C. Après un long moment, pendant lequel ils restent tous silencieux, A annonce qu'il a deviné le nombre écrit sur son front. Quel est ce nombre et comment A a-t-il raisonné? (pour rappel, 1 n'est pas un nombre premier)

Problemath 6

Existe-t-il un triangle équilatéral dont les 3 sommets sont des points du réseau $\mathbb{Z}^2$ (ensemble des points à coordonnées entières dans le plan $\mathbb{R}^2$)?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 3 novembre à 14h**

Solution du Problemath 1: Pour tout $k = 1, 2, \ldots, 59$,

$$1 - \frac{cos(60° + k°)}{cos\ k°} = \frac{cos\ k° - cos(60° + k°)}{cos\ k°} = \frac{2sin30° sin(30° + k°)}{cos\ k°} = \frac{cos(60° - k°)}{cos\ k°}$$

L'expression donnée vaut donc $\dfrac{cos\ 59°}{cos\ 1°} \quad \dfrac{cos 58°}{cos\ 2°} \ldots \dfrac{cos\ 1°}{cos\ 59°} = 1.$

Ont fourni une solution correcte : S. NAOULI, C. TUDOR (élèves de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), T. FOUGEREUX (élève de 1ère S au Lycée David d'Angers), G. PETRELLA (BA1 maths), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), L. BENIZRI (BA1 physique), J. DAUE, U. KODHELI (BA2 maths), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. KIERE (BA2 polytech), C. BODART (BA3 maths), D. LEFEVRE (BA3 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. KITENGE NGOIE (BA3 polytech), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), M. CORNEZ, O. DECKERS, T. HAMEL, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWE, G. MUKENDI (ingénieurs), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), M. OWENS et LADY BELMATH (la femme de FANTOMATH).

Solution du Problemath 2: Pour que Bruxelles soit en gravité zéro, il faut que le poids mg d'un corps de masse m soit compensé par la composante verticale de la force centrifuge, c'est-à-dire $\frac{mv^2}{r} cos\lambda$, où λ est la latitude de Bruxelles, r est la distance de Bruxelles à l'axe de rotation de la Terre, et $v = 2\pi\ r/T$, où T est la durée cherchée d'une rotation complète de la Terre. Comme $r = R\ cos\ \lambda$, où R est le rayon de la Terre, l'égalité $mg = \frac{mv^2}{r} cos\ \lambda$ devient $g = \frac{4\pi^2 R}{T^2} cos^2\lambda$, d'où $T = 2\pi cos\lambda\sqrt{R/g}$. En remplaçant λ, R et g par leurs valeurs numériques, on trouve (à 1 minute près) $T = 53$ ou 54 min.
Ont fourni une solution correcte : S. NAOULI (élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), G. PETRELLA (BA1 maths), V. FRANKEN, L. BENIZRI (BA1 physique), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. KIERE (BA2 polytech), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. KITENGE NGOIE (BA3 polytech), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), P.GILLET, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWE (ingénieurs), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 3:Un tétraèdre dans lequel le centre s de la sphère inscrite, le centre s' de la sphère circonscrite et le centre g de gravité coïncident n'est pas nécessairement régulier. Voici une famille infinie de contre-exemples. Soient a, b, c trois nombres réels > 0 et soit T le tétraèdre de sommets $(a, b, c,)$, $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$ dans $\mathbb{R}^3$. Les paires d'arêtes opposées de T ont la même longueur, et T n'est régulier que si $a = b = c$. On va prouver que les points s, s', g de T coïncident. Voici un argument de symétrie très simple qui permet d'éviter tous les calculs. Chacune des rotations de 180° autour des axes $0x, 0y, 0z$ conserve clairement l'ensemble des 4 sommets de T. Les points s, s' et g étant univoquement déterminés par la donnée des sommets de T, ils sont nécessairement fixés par chacune de ces rotations, donc ils coïncident tous avec l'origine 0 du système d'axes. C.Q.F.D.
Anne DE RUDDER, Willy DE DONDER et Marcel CORNEZ ont prouvé que ce sont les seuls contre-exemples.
Ont fourni une solution correcte : R.HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. BODART (BA3 maths), D. LEFEVRE (BA3 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), M. CORNEZ (prof de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère).

LES PENSÉES DU JOUR
"*The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics*" (Godfrey Harold HARDY, mathématicien anglais, 1877-1947).
"*S'il se présentait comme chercheur au CNRS, Dieu serait refusé. Il a fait une manipulation intéressante, mais jamais personne n'a pu la reproduire. Il a expliqué ses travaux dans une grosse publication, il y a très longtemps, mais ce n'était même pas en anglais et , depuis, il n'a plus rien publié*" (Hubert CURIEN, physicien français, 1924-2005, directeur général du CNRS de 1969 à 1973, ministre de la recherche sous François Mitterrand).