PROBLEMATHS
15 novembre 2017

ÉNONCÉS

Problemath 7

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit S une sphère de rayon 1 et soit $S^{'}$ une sphère de rayon r passant par le centre de S. Pour quelles(s) valeur(s) de r l'aire de l'intersection de $S^{'}$ avec l'intérieur de S est-elle maximale?

Problemath 8

Le célèbre mathématicien italien Pericoloso SPORGERSI a remarqué que son numéro de sécurité sociale (qui se compose de 10 chiffres décimaux) a une propriété remarquable : pour tout $k = 1, 2, \ldots, 10$, le $k^{ème}$ chiffre de ce numéro est égal au nombre de chiffres $k - 1$ dans le numéro (ainsi, le premier chiffre est égal au nombre de chiffres 0, le deuxième est égal au nombre de chiffres 1, etc. . .). Quels sont tous les numéros de 10 chiffres ayant cette propriété?

Problemath 9

Peut-on recouvrir entièrement une table carrée de $0,9$ mètre de côté par deux nappes circulaires de $1,006$ mètre de diamètre chacune?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 8 décembre à 14h**.

Solution du Problemath 4: Numérotons (1),(2),(3) les trois équations du système. En soustrayant (2) de (1), puis (3) de (2), on obtient

$$\begin{array}{rll} & x(1-x^2)+y(y-1)+z^2(z-1)=0 & (4) \\ et & y(1-y^2)+z(z-1)+x^2(x-1)=0 & (5) \end{array}$$

L'équation (4)$-z$(5) s'écrit, après calculs, $x(1-x)(1+x+xz) = y(1-y)(1+z+yz)$. Comme le système est invariant par une permutation cyclique des trois inconnues, on a donc aussi $y(1-y)(1+y+yx) = z(1-z)(1+x+zx)$. Puisque x, y, z sont ≥ 0 et que $1+x+xz$, $1+z+yz$, $1+y+yx$ sont > 0, on en déduit que $1-x$, $1-y$ et $1-z$ sont tous < 0 ou tous > 0 ou tous $= 0$. Dans les deux premiers cas, x, y et z sont tous > 1 ou tous < 1, ce qui contredit l'équation (1). La seule solution du système est donc $x = y = z = 1$.
Ont fourni une solution correcte : L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), G. GRAMMATICA (élève de Terminale S à l'Ecole Européenne de Francfort), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), V. FRANKEN (BA1 physique), U. KODHELI (BA2 maths), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. BODART (BA3 maths), D. LEFEVRE (BA3 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), A. GREEN (prof de maths), G. MUKENDI (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 5: A raisonne comme suit: "Par l'inégalité triangulaire, mon nombre est $3, 5, 7$ ou 11. Comme le périmètre du triangle est un nombre premier, 3 est à rejeter.

Si j'avais un 5, C se dirait : "Je vois deux 5, donc j'ai un 3 ou un 7. Mais si j'avais un 3, alors A et B pourraient chacun en déduire qu'ils ont un 5 car si l'un d'eux avait un 3, l'autre en déduirait qu'il a nécessairement un 5. Puisque ni A ni B n'a deviné son nombre, je n'ai pas un 3. Donc j'ai un 7". Puisque C n'a rien deviné, je n'ai pas un 5.
Si j'avais un 7, B se dirait : "Je vois deux 7, donc j'ai un 3 ou un 5. Mais si j'avais un 3, A et C pourraient chacun en déduire qu'ils ont un 7. Puisque ni A ni C n'a deviné son nombre, je n'ai pas un 3. Donc j'ai un 5". Puisque B n'a rien deviné, je n'ai pas un 7. Par conséquent, mon nombre est 11" (fin du raisonnement de A).
Ont fourni une solution correcte : L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), Q. CLAUS (élève de 5ème à l'Athénée Uccle I), G. GRAMMATICA (élève de Terminale S à l'Ecole Européenne de Francfort), G. PETRELLA (BA1 maths), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), L. BENIZRI, V. FRANKEN (BA1 physique), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. BODART (BA3 maths), D. LEFEVRE (BA3 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), O. DECKERS, P. GILLET, A. GREEN, T. HAMEL, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWE (ingénieurs), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 6: On va prouver plus généralement qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les 3 sommets sont des points de $\mathbb{Q}^2$. Si un tel triangle existait, on obtiendrait en le translatant un triangle ayant les mêmes propriétés et un sommet en $(0, 0)$. Par une rotation de 60° centrée à l'origine, on pourrait appliquer un des deux sommets restants sur l'autre. Une telle rotation s'écrit

$$(x, y) \longrightarrow (xcos60^\circ - ysin60^\circ,\ xsin60^\circ + ycos60^\circ).$$

On aurait donc $\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = a$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = b$ avec $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$ et x, y non simultanément nuls. Si $x \neq 0$, alors $\sqrt{3} = \frac{1}{x}(2b - y) \in \mathbb{Q}$. Si $y \neq 0$, alors $\sqrt{3} = \frac{1}{y}(x - 2a) \in \mathbb{Q}$. Dans les deux cas, comme $\sqrt{3}$ est irrationnel, on obtient une contradiction.
W. SHERRER a prouvé en 1946 que les seuls $n-$gones réguliers ($n \geq 3$) dont les sommets sont des points de $\mathbb{Q}^2$ sont les carrés.
Note historique : Ce Problemath, ainsi que le Problemath 7 posé en novembre 2011, faisait partie d'une liste de problèmes appelés "Killer problems" ou "Jewish problems". Ils étaient utilisés en URSS, dans les années 1970 et 1980, pour empêcher l'entrée d'étudiants juifs à l'Université de Moscou. A l'examen oral, ces étudiants devaient les résoudre l'un après l'autre, sous peine d'être recalés. Ces problèmes, a priori difficiles si on ne voyait pas tout de suite comment les attaquer, avaient tous une solution simple, de façon à empêcher les étudiants de se plaindre. Pour plus de détails, voir http://arxiv.org/abs/1110.1556.
Ont fourni une solution correcte : C. TUDOR (élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), Q. CLAUS (élève de 5ème à l'Athénée Uccle I), G. GRAMMATICA (élève de Terminale S à l'Ecole Européenne de Francfort), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. KIERE (BA2 polytech), C. BODART (BA3 maths), D. LEFEVRE (BA3 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), O. DECKERS, A. GREEN, T. HAMEL, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWE, G. MUKENDI (ingénieurs), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

LES PENSÉES DU JOUR

"*Dans les questions de sciences, l'autorité d'un millier ne vaut pas l'humble raisonnement d'un seul individu*" (GALILÉE, mathématicien et physicien italien, 1564-1642).
"*Equations are just the boring part of mathematics. I always attempt to see things in terms of geometry*" (Stephen HAWKING, physicien anglais né en 1942).