**PROBLEMATHS**
18 décembre 2017

Voici les solutions des Problemaths 7,8 et 9. Les prochains énoncés paraîtront après les examens de janvier.

**Solution du Problemath 7**: Désignons par $A(r)$ l'aire de l'intersection de la sphère $S'$ de centre $o'$ et de rayon $r$ avec l'intérieur de la sphère $S$ de centre $o$ et de rayon 1. Si $0 < r < \frac{1}{2}$, $S'$ est contenue dans l'intérieur de $S$ et $A(r) = 4\pi r^2$. Si $r = \frac{1}{2}$, $S'$ est tangente à $S$ et $A(\frac{1}{2}) = 4\pi\frac{1}{4} = \pi$ . Lorsque $r > \frac{1}{2}$, $S$ et $S'$ ont un cercle en commun. Soit $p$ un point de ce cercle et soit $\alpha$ l'angle entre les segments $[o, o']$ et $[o', p]$. Dans le triangle $oo'p$, on a $1 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\alpha = 2r^2(1 - \cos\alpha)$, donc $A(r) = \int_0^\alpha (2\pi r \sin t) r dt = 2\pi r^2(1 - \cos\alpha) = \pi$ qui ne dépend plus de $r$. En résumé, $A(r) = 4\pi r^2 < \pi$ si $0 < r < \frac{1}{2}$ et $A(r) = \pi$ si $r \geq \frac{1}{2}$, donc l'aire considérée est maximale pour tout $r \geq \frac{1}{2}$.
**Ont fourni une solution correcte** : L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. BODART (BA3 maths), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, T. HAMEL, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ, G. MUKENDI (ingénieurs), et LADY BELMATH.

**Solution du Problemath 8**: Désignons par $a_0, a_1 \ldots, a_9$ les 10 chiffres du numéro cherché. Dans ce qui suit , il faut constamment garder à l'esprit que $a_i$ représente non seulement la valeur du $(i+1)$ème chiffre, mais aussi (par hypothèse) le nombre de fois que le chiffre $i$ apparaît dans le numéro. Comme il y a en tout 10 chiffres dans le numéro, $\Sigma_{i=0}^9 a_i = 10(*)$. Cette égalité montre aussi que la somme des chiffres du numéro vaut 10. Comme le chiffre $i$ apparaît $a_i$ fois, on a donc $\Sigma_{i=0}^9 i a_i = 10(**)$.
Supposons d'abord que $a_0 = k \geq 7$. Comme le chiffre $k$ apparaît au moins une fois, $a_k \geq 1$. Si $a_k$ était $\geq 2$, la somme $(**)$ serait $\geq 14$, une contradiction. Donc $a_k = 1$ et le chiffre 1 apparaît au moins une fois, autrement dit $a_1 \geq 1$. Si on avait $a_1 = 1$, le chiffre 1 apparaîtrait au moins deux fois (en 2ème position et en $(k + 1)$ ème position), une contradiction. Donc $a_1 \geq 2$. Il en résulte qu'il y a un chiffre $a_j = 1$ avec $j \neq k$, mais alors $a_0 + a_1 + a_j + a_k \geq 11$, ce qui contredit $(*)$.
Supposons maintenant que $a_0 \leq 5$. Il y a alors au moins 5 chiffres$\geq 1$, donc $\Sigma_{i=0}^9 i a_i \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Par $(**)$, cette inégalité doit être une égalité. Ceci n'est possible que si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, mais alors il y a au moins 4 chiffres 1, donc $a_1 \geq 4$, une contradiction.
En conclusion, $a_0 = 6$ et $a_6 = 1$ (car $a_6 \geq 2$ contredirait $(**)$). Ceci entraîne, par $(**)$, que $a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$. De plus , $a_1 \geq 2$. Si $a_1$ était $\geq 3$, il y aurait moins de 3 chiffres 1, ce qui contredirait $(*)$. Donc $a_1 = 2$. De ce fait, $a_2 = 1$ et tous les autres $a_i$ sont nuls.
L'unique solution du problème est donc 6210001000. Nous venons d'apprendre que Pericoloso Sporgersi est mort en tombant d'un train, alors qu'il se penchait sur une inconnue.
**Ont fourni une solution correcte** : L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. BODART (BA3 maths), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, T. HAMEL (profs de maths), A. GRUWÉ (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

**Solution du Problemath 9**: Soient $a, b, c, d$ les coins de la table carrée, avec $|ab| = |bc| = |cd| = |da| = 0,9$. Aucune des deux nappes circulaires ne peut recouvrir deux coins opposés, car le diamètre $1,006$ de chaque nappe est plus petit que la longueur d'une diagonale de la table, à savoir $0,9\sqrt{2} = 1,27279\ldots$ Chacune des nappes doit donc recouvrir deux coins non opposés. Il n'est pas restrictif de supposer qu'une des nappes recouvre $a$ et $b$, et l'autre nappe $c$ et $d$ . Le milieu $m$ du côté $[a, d]$ de la table doit être recouvert par une nappe. Or la distance de $m$ à $b$ et $c$ vaut $\sqrt{(0,9)^2 + (0,45)^2} = \sqrt{1,0125} = 1,00623\ldots$, qui dépasse le diamètre des nappes. Il est donc impossible de recouvrir toute la table.
**Ont fourni une solution correcte** : L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. BODART (BA2 maths), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), M. CORNEZ, A. GREEN, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER, A. GRUWÉ (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

**Rectificatif**: Le Problemath 4 avait aussi été résolu par O. DECKERS.

**LES PENSÉES DU JOUR**
"*L'avancement et la perfection des mathématiques sont intimement liés à la prospérité de l'Etat*" (NAPOLÉON 1er, 1769-1821).
"*One of the big misapprehensions about mathematics that we perpetrate in our classrooms is that the teacher always seems to know the answer to any problem that is discussed. This gives students the idea that there is a book somewhere with all the right answers to all the interesting questions, and that teachers know those answers. And if one could get hold of the book, one would have everything settled. That's so unlike the true nature of mathematics!*" (Leon HENKIN, mathématicien américain, 1921-2006).

Toute l'équipe Problemaths vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année!

- Adieu $(1+2)!!+(3!)^4 - 5 + 6$
- Bonjour $1 - 2 + 3 + 4 \times 567 \times 8/9$

Nous vous offrons également une petite expérience géométrique spectaculaire :
https://www.youtube.com/watch?v=5xLFf_SwaK4