PROBLEMATHS
20 mars 2018

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

<u>Solution du Problemath 10</u> $f^1(x) = f(x) = x^2 + 12x + 30 = (x+6)^2 - 6$. Plus généralement, $f^n(x) = (x+6)^{2^n} - 6$ pour tout entier $n > 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et, si c'est vrai pour n, alors $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f((x+6)^{2^n} - 6) = (((x+6)^{2^n} - 6) + 6)^2 - 6 = (x+6)^{2^{n+1}} - 6$.
L'équation à résoudre est donc $(x+6)^{1024} - 6 = 0$, qui admet comme seules racines réelles $-6 \pm \sqrt[1024]{6}$.
<u>Ont fourni une solution correcte</u> : D. CORTILD (élève de 4ème au Collège St Michel), S. NAOULI(élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. KIERE(BA2 polytech), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, T. HAMEL, Y. SUPRIN, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER, C. DESSAUVAGES, A. GRUWÉ (ingénieurs), E. ANGELINI (producteur de télévision), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

<u>Solution du Problemath 11</u> Toute suite de P et F dans laquelle $PPPPP$ apparaît avant FFF sera dite <u>favorable</u>. Les suites favorables sont nécessairement d'un des trois types suivants:

- celles qui commencent par F ou FF, prolongées par une suite favorable commençant par P
- celles qui commencent par P, PP, PPP ou $PPPP$, prolongées par une suite favorable commençant par F
- celles qui commencent par $PPPPP$.

Désignons par p_P (resp. par p_F) la probabilité d'obtenir une suite favorable commençant par P (resp. par F). On a donc $p_F = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})p_P$ et $p_P = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16})p_F + \frac{1}{32}$, d'où on tire, après calculs, $p_P = \frac{2}{19}$ et $p_F = \frac{3}{18}$. La probabilité cherchée vaut donc $p_P + p_F = \frac{7}{38} = 0,18421\ldots$
<u>Ont fourni une solution correcte</u> : R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. ABRAHAM (prof de maths), W. DE DONDER (ingénieur).

<u>Solution du Problemath 12</u> La première idée qui vient à l'esprit est de calculer l'aire de tous les disques, d'en faire la somme et de chercher vers quoi elle converge. On peut éviter ces calculs en raisonnant comme suit.
Puisque le rapport de deux aires ne dépend pas de l'unité de longueur choisie, on peut supposer que le disque D est de rayon 1. Soient s un sommet du carré C, D' le disque tangent à D et aux deux côtés de C issus de s, o le centre de D, o' celui de D', t le point de tangence de D et D', et r le rayon de D'. Comme $|os| = |ot| + |to'| + |o's|$, on a $\sqrt{2} = 1 + r + r\sqrt{2}$, d'où on tire $r = 3 - 2\sqrt{2}$. Désignons par Δ la réunion de tous les disques et par Γ (resp. Γ') le carré fermé dont deux sommets opposés sont o et s (resp. o' et s). Par un argument de symétrie, le problème posé est équivalent à calculer l'aire A de $\Delta \cap \Gamma$. Si A' désigne l'aire de $\Delta \cap \Gamma'$, alors $A = A' + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi r^2$, les deux derniers termes étant respectivement l'aire d'un quart du disque D et l'aire des trois quarts du disque D'.
Or $\Delta \cap \Gamma'$ n'est autre que l'image de $\Delta \cap \Gamma$ par l'homothétie de centre s et de rapport r, donc $A' = Ar^2$. Par conséquent, $A = Ar^2 + \frac{\pi}{4}(1 + 3r^2)$, d'où on tire $A = \frac{\pi}{4}\frac{1+3r^2}{1-r^2}$. En remplaçant r par sa valeur $3 - 2\sqrt{2}$, on trouve finalement, après calculs, $A = \frac{\pi}{8}(3\sqrt{2} - 2) = 0,88068\ldots$
<u>Ont fourni une solution correcte</u> : D. CORTILD (élève de 4ème au Collège St Michel), S. NAOULI(élève

de 5ème à l'Athénée Adolphe Max) R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), C. KIERE(BA2 polytech), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. ABRAHAM, M. CORNEZ, O. DECKERS, P. GILLET, T. HAMEL, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, C. DESSAUVAGES, A. GRUWÉ (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 13 Dans le plan complexe, les racines de cette équation sont les sommets d'un 2018-gone régulier convexe centré en 0. Le module de la somme de deux sommets z et z' est invariant par la rotation de centre 0 appliquant z' sur 1. Grâce à cet argument de symétrie, il est donc équivalent de calculer la probabilité que $|z+1| \geq \sqrt{2+\sqrt{3}}$ lorsque z est choisi au hasard parmi les 2017 racines $\neq 1$, autrement dit la probabilité que $|z+1|^2 = |(\cos\theta+1)+i\sin\theta|^2 = 2+2\cos\theta \geq 2+\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou encore $|\theta| \leq \frac{\pi}{6}$. Comme $\theta \neq 0$ puisque $z \neq 1$, on en déduit que $\theta = \pm k\frac{2\pi}{2018}$ avec $1 \leq k \leq \lfloor \frac{2018}{12} \rfloor = 168$. Il y a $2.168 = 336$ tels angles θ, donc la probabilité cherchée vaut $\frac{336}{2017} = 0,16658\ldots$
Ont fourni une solution correcte : D. CORTILD (élève de 4ème au Collège St Michel), R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg), D. GALANT (BA2 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg), M. ABRAHAM, M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, Y. SUPRIN (profs de maths).

Pour terminer en beauté, voici le palmarès final de tous ceux qui ont résolu au moins deux Problemaths en 2017-2018. Tous ces Problematheurs sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le mercredi 25 avril à 12h30 dans le local 2.O8.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus de la Plaine de l'ULB, Boulevard du Triomphe).

- Ont résolu 13 Problemaths : D. GALANT (BA2 maths UMons), E. YUKSEL (BA3 maths ULg).
- Ont résolu 12 Problemaths : R. HAYA ENRIQUEZ (BA1 maths UCL), S. KRECZMAN (BA1 maths ULg).
- Ont résolu 10 Problemaths : Y. SUPRIN (prof de maths),W. DE DONDER (ingénieur).
- Ont résolu 09 Problemaths : O. DECKERS (prof de maths), A. GRUWÉ (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).
- Ont résolu 08 Problemaths : L. PRIEELS (élève de 5ème au Collège Don Bosco), C. BODART (BA3 maths), M. CORNEZ, A. GREEN (profs de maths)
- Ont résolu 07 Problemaths : C. LABIOUSE (MA1 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), T. HAMEL (prof de maths).
- Ont résolu 05 Problemaths : C.KIERE (BA2 polytech), D. LEFEVRE (BA3 maths UMons), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère).
- Ont résolu 04 Problemaths : S. NAOULI (élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), G. MUKENDI (ingénieur) et LADY BELMATH.
- Ont résolu 03 Problemaths : D. CORTILD (élève de 4ème au Collège St Michel), G. GRAMMATICA (élève de Terminale S à l'Ecole Européenne de Francfort), G. PETRELLA (BA1 maths), L. BENIZRI, V. FRANKEN (BA1 physique), M. ABRAHAM, P. GILLET, H. VERMEIREN (profs de maths).
- Ont résolu 02 Problemaths : C. TUDOR (élève de 5ème à l'Athénée Adolphe Max), Q. CLAUS (élève de 5ème à l'Athénée d'Uccle I), U. KODHELI (BA2 maths), M. KITENGE NGOIE (BA3 polytech), S. MASSON (prof de maths), C. DESSAUVAGES (ingénieur).