DANS LA MÊME COLLECTION :

I. *Logique et jeux logiques*
III. *Exploration de l'espace et pratique de la mesure*

A PARAÎTRE :

Les Fractions (avec fiches de travail)
La Géométrie des transformations (avec fiches de travail)
Algèbre linéaire (avec fiches de travail)

Les premiers pas en mathématique

II

ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES

par

Z. P. DIENES et E. W. GOLDING

O. C. D. L.

65, RUE CLAUDE-BERNARD – PARIS 5e

Le texte original de cette initiation à la mathématique a été publié sous le titre *First Years in Mathematics :* Sets, Numbers and Powers, par l'O. C. D. L. pour ESA, Harlow (Essex), Grande-Bretagne et Herder and Herder, New York.
Le texte anglais a été traduit et adapté par Jean Confida.

Première Partie

ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES

1. ENSEMBLES

1.1. *Introduction aux ensembles*

Beaucoup de maîtres doivent encore se demander pourquoi il faudrait étudier les ensembles pour étudier les nombres. Disons alors que cette étude est nécessaire parce qu'en voulant faciliter une meilleure compréhension du concept de nombre dans l'apprentissage de l'enfant, il faut que la voie qui y conduit permette de découvrir les différents aspects de ce concept.

Dans notre monde moderne, il nous faut aider les jeunes à comprendre comment les choses s'emboîtent les unes dans les autres, car le monde augmente très rapidement en complexité et il faut ajuster entre elles des situations de plus en plus complexes. Le nombre n'y fait pas exception. Le nombre est un concept très complexe et, pour apprendre à adapter entre eux les éléments conceptuels qui le constituent, il faut d'abord connaître ces éléments. L'un de ces éléments, c'est la notion d'ensemble. Les nombres sont des propriétés des ensembles. Par exemple, le nombre 2, le nombre 3, ou tout autre nombre, ne peuvent pas être appliqués à des objets uniques. Il est dépourvu de sens de parler d'une table 2 ou d'une maison 3. On peut parler d'une table ronde, d'une maison carrée, pas d'une maison *deux*. On parle de deux maisons. Cela veut dire que *deux* se rapporte à un ensemble de maisons.

Les premières expériences des enfants, à l'école, devraient comporter des expériences à propos d'ensembles. Ils devraient discuter entre eux et avec la maîtresse de ce qu'est un ensemble d'objets. Un bon point de départ pour cette discussion serait de parler des « ensembles » qu'ils peuvent avoir chez eux, mais sans prononcer d'abord le mot d'« ensemble », dont ils ne connaissent pas encore le sens. Très vite, les enfants parleront de leur jeu de cubes, de leur train, d'un jeu de cartes – les Sept Familles –, d'une collection de timbres, et ainsi de beaucoup d'autres choses avec lesquelles ils jouent. On pourra alors discuter avec eux pour découvrir combien il y a de mots pour parler de ces séries, de ces collections, de ces jeux ; on parlera de tas, de piles, et j'ai vu de très jeunes enfants suggérer jusqu'à deux douzaines de mots différents. On leur dira alors que tous ces mots peuvent aussi bien faire l'affaire, mais qu'après tout il vaut mieux n'en prendre qu'un seul ; comme cela, tout le monde saura de quoi on parle. Et comme, dans tous ces cas, il s'agit d'objets, de choses qui « vont ensemble », on peut les amener à comprendre ce dernier terme. En pensant aux ensembles, les enfants penseront d'abord à ceux qui groupent des objets qui ont quelque chose de commun ou à ceux qui ont la même utilisation. Par exemple, l'ensemble train, ou l'ensemble de tables, ou peut-être l'ensemble des enfants de la classe, ou encore l'ensemble des enfants de la classe qui ont les yeux bleus. Dans chacun de ces cas, les éléments de l'ensemble ont ou bien quelque chose de commun en ce sens qu'ils ont la même propriété, ou bien le même usage, ce qui est encore, en fait, une propriété [1].

Ainsi, dans ce cas, nous utilisons le mot « ensemble » pour désigner une collection d'objets ayant la même propriété : nous avons d'abord songé à la propriété, puis nous avons rassemblé les objets qui la possèdent. Mais ce n'est pas là la seule manière dont on peut utiliser la notion d'ensemble. On peut aussi prendre une certaine personne, un crayon, une ville, une boîte, un arbre, une fleur et une pierre, et les considérer comme constituant un ensemble. Les éléments de celui-ci ne possèdent aucune propriété commune reconnaissable, sinon que par un acte de volonté nous avons décidé que dorénavant ils formeraient un ensemble [2]. On se trouve là à un niveau peut-être un peu plus artificiel de la pensée en matière d'ensembles ; aussi est-il sans doute préférable de ne pas aller trop vite. Ce qu'il faut en tout cas que le maître comprenne bien, c'est que la notion d'ensemble n'implique pas nécessairement l'existence préalable d'une propriété commune. Par contre, il est courant de parler d'un ensemble d'objets dès lors que ceux-ci la possèdent.

1.2. *Appartenance et non-appartenance à un ensemble*

On remarquera que déjà la notion d'appartenance s'est glissée dans la discussion. Comment savons-nous qu'un objet appartient ou n'appartient pas à un ensemble ? Qu'une certaine personne, qu'un certain objet *est* ou *n'est pas membre*, *élément* d'un ensemble ? Et, en tout cas, où cherchons-nous ces éléments ? L'univers est très vaste, et si nous cherchons partout, nous ne serons jamais sûrs d'avoir – ou de ne pas avoir – la totalité des éléments d'un ensemble. Aussi réduisons-nous normalement l'*univers* à une petite section de l'univers réel. Par exemple, si nous parlons des enfants blonds, nous pensons généralement aux enfants de l'école, voire à ceux de la classe où nous enseignons. Dans ce cas, ce sont les enfants de l'école ou ceux de la classe qui constituent l'univers restreint. Ou encore, supposons que nous ayons

1. On dit que l'ensemble est « défini en compréhension » ; mais il va de soi que cette terminologie ne sera pas proposée aux enfants de cet âge.
2. Ensemble « défini en extension ».

un certain genre de perles. Nous pouvons dire : « Pensons aux perles rouges ». Nous ne pensons pas à toutes les perles qui existent en ce monde ou qui pourraient même exister dans d'autres mondes, nous pensons seulement aux perles rouges qui sont dans la boîte devant nous. Certaines sont rouges, d'autres ne le sont pas. Nous disons aux enfants : « Pensez à l'ensemble des perles rouges ». Ce que nous voulons dire, c'est : « Pensez à la collection de perles rouges que vous pourriez faire avec les perles qui sont dans la boîte ». Ainsi, l'univers se trouve restreint aux perles qui sont dans la boîte, et l'ensemble que nous avons choisi a pour éléments les perles rouges prises dans cette boîte. Restreindre l'univers à ce qui est pratiquement manipulable est inévitable si l'on parle des ensembles en termes concrets. Mais, bien entendu, si on adopte la seconde méthode de constitution des ensembles, c'est-à-dire celle qui consiste à considérer certains objets comme appartenant à un ensemble par définition, il n'y a plus besoin d'univers. Il nous suffit de dire : « Prenez ceci. Et cela. Et encore cela ». Lorsque nous avons fini de dire ce que nous voulons, notre ensemble se trouve constitué. Ce que nous ne savons pas, c'est l'étendue de ce qui n'appartient pas à notre ensemble. Cela peut nous laisser indifférents, jusqu'au moment où nous en venons à effectuer sur notre ensemble des opérations pour lesquelles nous avons besoin de savoir quels sont les éléments de l'univers qui ne sont pas des éléments de notre ensemble. Et c'est précisément l'une des opérations que nous aurons à examiner au cours de notre étude des ensembles.

Aussi le premier point à aborder, dans notre étude des ensembles, doit-il être celui de l'appartenance et de la non-appartenance à un ensemble. Montrons d'abord clairement aux enfants qu'il faut décider du choix d'un univers. Ainsi, à chaque leçon, il pourra y avoir une petite discussion : quel univers allons-nous prendre aujourd'hui [1] ? Par exemple, on décidera que c'est celui de tous les enfants de la classe. Dans ce cas, on n'y compte pas le maître. Ou encore, c'est celui de toutes les personnes de la classe, et alors le maître y est compris. Ou encore, on peut décider que c'est celui de toutes les créatures de la classe. S'il y a un oiseau, ou quelques souris blanches, ou d'autres êtres vivants, qui ne sont pas des personnes, dans la classe, ils feront aussi partie de l'univers. Puis les enfants vont nommer des propriétés. Par exemple, toutes les créatures lentes, ou tous les garçons, ou tous les animaux mâles pourraient appartenir à notre ensemble. On pourra ensuite les faire tous aller dans un même coin de la classe, et on verra alors clairement que toutes les créatures qui sont dans ce coin appartiennent bien à l'ensemble des « garçons » de la classe et que celles qui ne sont pas allées dans ce coin n'appartiennent pas à l'ensemble des « garçons » de la classe. Puis, un enfant va peut-être suggérer une autre propriété, par exemple « les créatures âgées de six ans ». Dans ce

1. Il est vivement conseillé de coordonner ces discussions avec l'étude d'un « centre d'intérêt » ou la mise au point d'un « texte libre ».

cas, quiconque aura six ans appartiendra à l'ensemble et quiconque, enfant ou animal, n'aura pas six ans n'y appartiendra pas. Selon toute probabilité, il n'y aura pas d'animaux aussi âgés dans la classe, de sorte que l'ensemble se trouvera limité aux humains alors que l'univers contient encore des animaux. Ainsi, ce sont les enfants âgés de six ans qui constitueront l'ensemble, tandis que les enfants de cinq ans, ou de plus de six ans, et les animaux constitueront le reste de l'univers. On donne alors un nom à ce qui reste de l'univers par rapport à l'ensemble choisi, et on apprend le mot aux enfants. Ce mot, c'est *complément*. Le complément de l'ensemble, c'est la partie de l'univers qui ne constitue pas l'ensemble. Par exemple, si on pense à l'ensemble des perles rouges de la boîte, l'univers étant formé par toutes les perles de la boîte, le complément de l'ensemble des perles rouges est l'ensemble des perles qui ne sont pas rouges. Il y en a peut-être des bleues, des jaunes, des vertes ; toutes réunies, elles forment *le complément*, c'est-à-dire *l'ensemble complémentaire* de celui des perles rouges. Ainsi, l'appartenance et la non-appartenance à un ensemble conduisent-elles à l'idée des ensembles et de leurs compléments. On pourra même se demander ce qu'est le complément d'un complément. Prenons l'ensemble complémentaire, des perles non-rouges de la boîte. Quelle est la partie de l'univers, c'est-à-dire la partie de l'ensemble de toutes les perles de la boîte, qui ne fait pas partie des perles non-rouges ? Il ne faudra pas longtemps pour que les enfants disent : « Eh bien, ce sont les perles rouges, tiens ! ». Ainsi, le complément du complément d'un ensemble, c'est cet ensemble lui-même. Les perles non-non-rouges, ce sont les perles rouges, naturellement.

Nous suggérons de faire ces jeux au niveau des attributs quand on utilise les blocs logiques et leur matériel associé. Le jeu de la négation est un de ces jeux où les enfants sont incités à séparer « l'ensemble des choses que j'ai » et « l'ensemble des choses que je n'ai pas ». Et « si un bloc est dans mon ensemble, il ne peut pas être dans celui de mon voisin ». Et encore « s'il n'est pas dans mon ensemble, alors il faut qu'il soit dans celui du voisin. » Ces considérations forment la base du jeu de la négation. Aussi faut-il peut-être associer les considérations relatives aux ensembles et à leurs compléments aux considérations qui émergent pendant qu'on joue à la négation, au jeu de l'objet caché et à tous les autres jeux basés sur l'idée que « ceci appartient à ce lot et par conséquent ne peut pas appartenir au reste de la boîte », et ainsi de suite.

1.3. *Symbolisme des ensembles*

Les maîtres n'ont pas toujours conscience du fossé profond qui existe entre l'expérience des enfants et l'expression symbolique de cette expérience. Certes, lorsqu'un enfant arrive à l'école, il sait parler, mais il le fait inconsciemment. Il ne joue pas effectivement le jeu dont il

parle ; aussi, quand il en parle, le fait-il par l'intermédiaire de symboles, c'est-à-dire de phrases composées de mots qu'il sait utiliser avec beaucoup d'efficacité. Le langage est une forme très complexe de symbolisme par lequel une quantité énorme d'informations peut être transmise d'une personne à une autre. Un enfant de cinq ans est tout à fait versé dans l'art de transmettre cette information, car il s'est entraîné à l'apprendre. Pour satisfaire à ses besoins, il a, si l'on peut dire, été contraint d'apprendre ce langage. L'effort a été payant puisque, grâce à ce langage, il peut dire à sa mère qu'il veut ceci ou cela, ou qu'il n'aime pas telle ou telle chose, et ainsi de suite. Il est évident que c'est pour lui d'une importance capitale. En mathématiques, nous donnons à utiliser à l'enfant un autre langage, qu'il n'a aucune hâte d'utiliser, parce que les expériences que ces symboles décrivent lui sont par trop étrangères. Mais si l'on fournit aux enfants un nombre suffisant d'expériences créatrices et qu'en les vivant ils apprennent le genre de concepts que symbolise le langage mathématique, il est certain qu'ils finiront par acquérir de l'agilité à utiliser ce système de symboles tout comme ils en ont acquis à manier leur langue maternelle. Mais il faut bien se rendre compte que l'acquisition d'un tel système de symboles ne se fait pas en un jour. Le développement du langage chez les enfants s'étale sur plusieurs années. Il est aussi la conséquence de la formation, dans leur esprit, d'un certain nombre de concepts et, une fois cette formation acquise, de l'association, à ces concepts, des expressions correspondantes. Par exemple, des mots comme « avant », « après », « entre », « au-dessus de », « au-dessous de », « et », « si », « à moins que » ne se sont établis dans l'esprit de l'enfant qu'après de nombreuses expériences de situations symbolisées par ces termes. Aussi ne nous faut-il pas nous attendre à ce qu'un système complet de symboles logiques et mathématiques s'y amarre solidement du jour au lendemain. Il nous faut une très grande patience, afin que même les enfants les plus lents aient l'occasion de passer par un nombre suffisant d'expériences variées, qui leur seront indispensables avant que le symbolisme mathématique prenne pour eux toute sa signification. Sinon, ce symbolisme ne leur apportera aucune information profonde sur ce que les mathématiques représentent réellement : ce ne sera qu'une collection de formules soigneusement apprises par cœur en vue de répondre correctement aux examens et d'obtenir de bonnes notes.

Tel est certainement le cas en matière d'ensembles. Supposons que les enfants aient discuté d'ensembles pendant quelque temps et que l'un d'eux dise : « Tiens, celui-là, il était bien ! Si on le faisait encore demain ? ». La maîtresse pourrait alors dire : « Oui, c'est une bonne idée. Mais comment va-t-on s'en souvenir ? » Il s'agit peut-être d'enfants qui ne savent pas encore écrire. « Si on le dessinait ? » dira un des enfants. Supposons qu'il s'agisse de tout l'ameublement de la classe : on va dessiner le bureau de la maîtresse, sa chaise, les tables, les bancs, l'armoire, les étagères, etc... et on aura ainsi une représentation symbolique de l'ensemble de meubles considéré ce jour là. Alors les enfants n'oublieront pas, le lendemain, sa composition exacte ; ils pourront même le regarder le soir à la maison, parce qu'ils l'auront en symboles sur un bout de papier. Mais attention! Ce n'est pas l'ensemble lui-même qui est sur cette feuille, c'est un ensemble de symboles représentant les éléments de l'ensemble étudié. Il est évident que l'image de la table n'est pas la table elle-même. Elle n'a que la valeur d'un symbole destiné à nous rappeler que nous pensions à la table. De même pour les autres éléments. Jusqu'à présent, nous n'avons qu'un conglomérat de symboles correspondant aux divers éléments constitutifs de l'ensemble. Mais nous n'avons encore porté sur le papier aucune indication, aucun signe rappelant que ces éléments sont considérés, dans leur totalité, comme formant un ensemble. Il existe un symbole à cet effet : ce sont les *accolades* { }. Aussi pourrions-nous mettre une accolade à un bout du papier et une accolade à l'autre bout. Entre ces accolades, nous pourrions faire les petits dessins représentant les différents éléments de l'ensemble. Nous voilà donc, peut-être, en présence de notre première représentation, de notre premier système utilisable pour un ensemble. Les enfants seront tout heureux de faire des petits dessins représentant les éléments et de dessiner le symbole de l'ensemble pour marquer le fait que dorénavant nous considérons certains éléments comme constituant un ensemble.

Bien entendu, il n'est pas nécessaire de représenter tous les éléments de l'ensemble. S'ils sont très nombreux, ce ne serait guère praticable. Lorsque les éléments d'un ensemble sont très nombreux, il y a de fortes chances pour que ce dernier ait été défini par un attribut que tous les éléments doivent posséder pour en faire partie. Par exemple, les perles rouges de la boîte. Dans ce cas, nous pourrions, encore, poser nos accolades et, à l'intérieur, tracer une ligne rouge indiquant, par sa couleur, qu'on pense à des objets rouges, et on pourrait même ajouter au dessus le mot « perles » si on sait déjà l'écrire. Mettre un mot, c'est entrer déjà dans un autre système de symbolisation. Une ligne rouge, l'image d'une table sont des symboles parlants immédiats, correspondant immédiatement à l'idée que l'enfant se fait des éléments de notre ensemble. Si on écrit le mot « perles » dans nos accolades, on recourt à un symbolisme qui n'est nullement illustratif au sens où l'étaient la ligne rouge ou les petits dessins, rappelant, par la couleur ou les formes, des perles ou des meubles. Les lettres qui composent le mot p e r l e s ne rappellent en rien des perles, et on entre dans une forme de représentation nettement différente. Cette forme, les enfants l'accepteront parce qu'ils ont déjà un langage. Aussi bien ne s'agit-il que d'un autre mode de communication du langage, le mode *écrit* par opposition au mode *parlé*. La plus grande partie de la difficulté de la transition de la représentation illustrée à la représentation verbale se trouve écartée du simple fait que l'enfant a déjà appris à parler. Et puisque nous voilà prêts à employer, comme représentations symboliques, des mots, il n'y a plus besoin de tracer une ligne rouge. Autant employer le mot « rouge » et écrire entre accolades {perles rouges} ou encore, si on emploie les blocs logiques, {blocs rouges} ou {carrés rouges} ou {triangles bleus minces} ou tout autre attribut qui, dans le

cadre de l'ensemble universel des blocs logiques, permettra de définir un ensemble.

1.4. *Ensembles et attributs*

Les enfants ne sont pas longs à imaginer des attributs de plus en plus compliqués pour définir des ensembles. Bien entendu, soulignons qu'il est indispensable de définir un univers avant de définir des ensembles en fonction d'attributs. Il faut savoir de quoi on parle avant de dire que parmi les choses dont on parle on va penser à un certain ensemble tel que celui des blocs rouges parmi tous les blocs logiques, ou de tous les enfants blonds parmi tous les enfants de la classe, ou de l'école, et ainsi de suite. Ces attributs deviennent progressivement plus complexes. Par exemple, on peut penser non pas simplement aux enfants blonds, mais à ceux des enfants blonds qui ont des chaussures noires et des vêtements rouges, ou aux filles qui ont à la fois les cheveux frisés, les yeux bleus, la chevelure blonde et ainsi de suite. On peut ainsi empiler attributs sur attributs et créer de nouveaux attributs, c'est-à-dire des attributs composés à partir d'attributs simples. C'est là un exercice que les enfants trouveront très amusant, et ils trouveront un grand plaisir à imaginer des attributs toujours plus compliqués. Au bout du compte, si les attributs sont assez compliqués, il peut arriver qu'il n'existe dans l'univers choisi aucun élément y correspondant. Supposons, par exemple, qu'on prenne l'univers des enfants de la classe et qu'on veuille en isoler les filles blondes, bouclées, aux yeux bleus ayant aussi des chaussures noires et un cardigan vert. Il peut très bien se faire qu'il n'y ait dans la classe aucun enfant satisfaisant à toutes ces conditions. Il peut même se faire qu'on n'ait pas besoin d'aller chercher des attributs aussi compliqués pour ne trouver aucun élément. En tout cas, on a un – ou plusieurs – attributs et, en un sens, il faut bien qu'il y ait un ensemble leur correspondant, même s'il ne comporte aucun élément. Un tel ensemble est dit *ensemble vide*. Il est vide parce qu'il ne contient aucun élément. Et l'attribut est tel qu'aucun membre de l'univers ne possède un tel attribut et il définit, par conséquent, un ensemble vide dans un certain univers. Il est tout à fait possible qu'en passant dans un certain univers notre attribut définisse un ensemble qui ne sera pas vide. La notion d'*ensemble vide* est une notion très importante pour les enfants ; il faut qu'ils la possèdent bien, car lorsqu'ils en viendront à l'étude des nombres, c'est le nombre d'éléments dans l'ensemble vide qu'ils désigneront par le nombre zéro. Et c'est parce que les enfants confondent le *nombre zéro* avec *rien* qu'ils se heurtent plus tard à certaines difficultés en mathématique. L'ensemble vide n'est pas lui-même zéro. L'ensemble vide a la propriété zéro. De même qu'un ensemble de deux enfants a la propriété deux. L'ensemble de deux enfants *n'est pas* en lui-même la propriété deux. Il *a* seulement la propriété deux. Un ensemble vide peut être symbolisé par une paire d'accolades sans rien dedans { }. Ainsi, par exemple, nous pourrions dire que, dans l'univers des blocs logiques, les carrés qui sont en même temps des ronds forment un ensemble vide, de même que les rouges qui sont en même temps bleu, ou les épais qui sont minces, et ainsi de suite. Symboliquement, on peut écrire

{carré rond} = { }

et ainsi de suite.

1.5. *L'idée de similitude ou d'égalité*

Qu'est-ce que l'on considère comme semblable ? La question est très difficile. Il est bien évident que deux objets distincts ne peuvent pas être le même objet. Aussi quand on dit que cette assiette est la même que celle-là, on ne veut pas dire qu'il s'agit de la même assiette. Ce qu'on veut dire, c'est que certaines propriétés des deux assiettes sont les mêmes. Elles peuvent avoir la même couleur, la même forme, le même poids, le même dessin, être de la même matière et, en définitive, être semblables de bien des façons différentes. Mais ce sont, tout de même, deux assiettes différentes. C'est peut-être une vérité de La Palisse, mais qu'il faut bien comprendre, si on veut arriver à dégager le sens du mot « même », qu'un objet n'est, et ne peut être identique qu'à lui-même ! Tout pareillement, un ensemble d'objets ne peut être le même ensemble que s'il contient les mêmes objets, c'est-à-dire les mêmes éléments : ceux-ci peuvent être arrangés dans un ordre différent. Un ensemble d'objets demeure, en soi, *le même* si les éléments, sans changer intrinsèquement, ont changé de place ou d'ordre.

Ainsi, un ensemble d'objets, c'est-à-dire un ensemble d'éléments quelconques d'un ensemble quelconque, peut-il seulement être « le même » que l'ensemble constitué par ces mêmes éléments. Il peut ici se produire une légère confusion, du fait que lorsque nous dessinons la représentation d'un ensemble, on ne voit pas toujours clairement quels sont exactement les objets que nous représentons effectivement. Supposons, par exemple, que nous ayons dessiné un arbre et une maison et que nous mettions ces deux dessins entre accolades, puis que nous disions que cet ensemble est égal à un ensemble formé par un arbre et une maison, mis entre accolades. Or, cela peut ne pas être vrai. Ce sera vrai si l'arbre de la première image représente exactement le même arbre que celui de la seconde image, si la maison de la première image représente exactement la même maison que celle de la seconde image (et non une maison *semblable*). Dans ce cas, il sera vrai de dire que

{arbre, maison} = {arbre, maison}

ou encore, bien sûr

{arbre, maison} = {maison, arbre}

étant donné que l'ordre dans lequel les éléments sont énumérés est sans importance. L'absence d'incidence de l'ordre des éléments sur l'identité d'un ensemble est connue sous le nom de conservation des ensembles.

Si, par contre, l'arbre de l'un des dessins représente un certain arbre, et que l'arbre de l'autre dessin représente un autre arbre, même s'ils sont dessinés exactement de la même manière, le premier ensemble n'est plus le même que le second, car la composition du premier ensemble n'est pas la même que celle du second. Il se peut très bien qu'il faille beaucoup de discussions avant que les enfants comprennent clairement que lorsqu'on parle de « même », il ne s'agit pas des images des objets, mais des objets eux-mêmes. Si on dessine un arbre à un bout du papier et un autre arbre à un autre bout, si ressemblants qu'on les fasse, ils ne représenteront le *même* arbre que par un acte de volonté de notre part, clairement manifesté. Si, soudain, nous pensons à l'un des deux dessins comme représentant un arbre de notre jardin et à l'autre comme représentant un arbre du square d'en face, alors le premier des deux dessins n'est plus « égal » au second.

Nous pouvons recourir à l'idée d'égalité des ensembles pour indiquer que certains ensembles sont vides. Par exemple, nous pourrions écrire

{cercles carrés} = { }

Cela signifie que l'attribut « cercles carrés », appliqué à l'univers des blocs logiques, ne s'applique en fait à aucun élément. L'attribut « cercles carrés » définit l'ensemble vide dans notre univers. De même « rouge bleu », et ainsi de suite. Ou encore, on peut employer le signe égale pour marquer l'égalité entre la définition d'un ensemble par certains attributs et la définition d'un ensemble par la notation symbolique de tous les éléments de cet ensemble. Par exemple, à propos de blocs logiques, nous pourrions dire :

{ronds épais rouges} = 

r r

De cette manière, les enfants saisiront que les définitions d'ensembles sous forme d'énonciation du genre de choses qu'ils contiennent peuvent être équivalentes aux définitions d'ensembles sous forme d'énumération exacte de ce qu'ils contiennent. La première est une définition par attributs. Nous disons que nous voulons considérer dans notre ensemble tous les éléments de notre univers qui sont comme ceci et comme cela. Dans la seconde définition, nous disons : « Nous voulons considérer dans notre ensemble tous les membres de notre ensemble ». Si, dans chaque cas, nous réussissons à définir exactement le même ensemble d'objets, nous pouvons mettre un signe égale entre l'ensemble défini par les attributs et l'ensemble défini par énumération des éléments. Par exemple, supposons qu'il y ait juste trois filles blondes aux yeux bleus dans la classe, et qu'elles s'appellent Valérie, Rosine, Catherine. Nous pouvons alors dire

{filles blondes aux yeux bleus} = {Valérie, Rosine, Catherine}

Les instituteurs n'auront pas de mal à imaginer des exercices pour permettre aux enfants de pratiquer ces équivalences. Ils pourront, par exemple, faire des jeux dans lesquels un premier groupe d'enfants énumère certains camarades tandis qu'un second groupe doit deviner quels sont les attributs qui définissent juste ces camarades là et pas d'autres. Ou inversement. Certains enfants proposent un attribut, et les autres doivent découvrir les éléments qui appartiennent à l'ensemble possédant l'attribut proposé par le premier groupe d'enfants.

Les enfants ont parfois besoin de moyens matériels pour séparer les éléments d'un ensemble du reste des éléments de l'univers. Si ce sont les enfants de la classe qui constituent l'univers, on pourra, pour isoler les enfants que nous considérons comme formant un ensemble, par exemple les garçons de la classe, prendre une grande corde qu'on passera autour de tous les garçons. Ou encore, si la classe n'est pas trop importante, on pourra se servir d'un cerceau, ou de marques à la craie. Ces dernières n'ont pas la même efficacité qu'une chose que l'on peut matériellement passer autour des enfants. Les jeunes enfants ont du mal à concevoir que lorsqu'ils ont tracé à la craie un cercle sur le sol et qu'ils entrent dedans, ils sont en fait à l'intérieur de la courbe. Ils pensent probablement qu'ils sont *dessus*, tandis que s'ils sont entourés d'un cerceau ou d'une corde, ils sentiront vraiment qu'ils sont *dedans*. Cette « intériorité » peut constituer l'aide matérielle grâce à laquelle les enfants peuvent être conduits à découvrir l'appartenance à un ensemble. Toute personne qui est dans la boucle est membre, élément de l'ensemble, et toute autre personne qui n'est pas dedans n'en est pas membre.

1.6. *Opérations sur les ensembles*

Réunion et intersection

Supposons que nous prenions l'ensemble de tous les garçons de la classe, puis l'ensemble de tous les enfants vêtus de rouge, ou ayant tout autre attribut quelconque ; les enfants ne demandent pas mieux que d'exprimer – et même bruyamment – leurs désirs sur la manière de se grouper en ensembles. La réunion de deux ensembles n'est rien d'autre que le fait d'assembler les enfants qui possèdent l'un *ou* l'autre attribut. Dans notre exemple, nous réunissons tous les enfants qui sont des garçons avec tous les enfants vêtus de rouge, y compris, bien entendu, les garçons vêtus de rouge. Nous allons trouver ici une petite

difficulté due à la réalisation matérielle de la séparation entre les garçons et les enfants vêtus de rouge. Naturellement, si on dispose de cordes, on en passera une autour de tous les garçons et une autre autour de tous les enfants vêtus de rouge, et les enfants verront vite qu'il faut que les cordes se croisent si tout le monde doit être entouré de la bonne corde ; les garçons en rouge seront dans les deux cordes. La seule manière d'éviter cette difficulté est de considérer des réunions d'ensembles dans lesquelles il n'y a pas d'éléments communs. Évidemment, la formation de réunions s'en trouverait facilitée, mais ces réunions auraient un caractère moins général, et les enfants pourraient en déduire qu'on ne peut faire de réunions que si les ensembles n'ont pas d'éléments communs. Or, il n'en est rien. On risquerait donc de poser dans l'esprit des enfants les fondements d'un concept faux. L'autre manière d'aborder le problème consisterait à considérer les parties communes des ensembles avant de considérer leur réunion. Le terme technique généralement employé en matière d'ensembles, quand on parle de leurs parties communes, c'est *intersection.* Tout comme en matière de routes où, quand deux routes se croisent, l'intersection, c'est cette partie qui appartient aussi bien à l'une des routes qu'à l'autre. L'intersection de chaque ensemble, c'est la partie de cet ensemble qui est aussi dans l'autre. Dans notre exemple, les garçons vêtus de rouge forment l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans l'ensemble des garçons et dans l'ensemble des enfants vêtus de rouge. Si donc nous prenons, pour ainsi dire, le taureau par les cornes et que nous affrontons la difficulté dès l'abord, nous aurons peut-être moins de difficultés plus tard. Nous suggérons donc d'étudier les réunions et les intersections d'ensembles en même temps, et non séparément. Mais, comme nous l'avons déjà dit, on a aussi la possibilité d'avancer à petits pas, d'étudier d'abord les réunions où il n'y a pas de partie commune, pour passer ensuite aux intersections et, enfin, aux réunions d'ensembles avec parties communes non-vides.

Si les enfants se sont déjà familiarisés avec les blocs logiques, ils auront peut-être déjà joué à des jeux comportant des conjonctions et des disjonctions. Un jeu de conjonction, c'est un jeu sur « à la fois... et... », tandis qu'un jeu de disjonction est un jeu sur « ou bien... ou bien ». Dans les jeux conjonctifs, avec les blocs logiques, on apprend aux enfants à considérer des attributs « composés » qui soient tels qu'un bloc puisse les posséder à la fois. Par exemple, rouge et carré. Un bloc qui est à la fois rouge et carré possède l'attribut « rouge » et l'attribut « carré ». Si donc nous voulons former l'ensemble de tous les blocs rouges et l'ensemble de tous les blocs carrés, alors les blocs qui sont rouges *et* carrés seront contenus dans l'*intersection* de l'ensemble des blocs rouges et de celui des blocs carrés. Les jeux conjonctifs, quand ils sont joués avec des attributs, correspondent aux jeux d'intersection joués avec des ensembles. Ainsi les diagrammes de Venn, construits avec les blocs logiques, correspondent-ils exactement au procédé qui consiste à entourer les enfants de cordes et à réaliser ainsi des intersections. De la sorte, il sera naturellement possible de penser à plus de deux attributs, trois par exemple, et, prenant les enfants comme membres de notre univers, de faire un diagramme de Venn à trois cerceaux. Par exemple, on peut prendre comme premier attribut la qualité de garçon et penser à l'ensemble de tous les garçons. Puis on prendra comme autre attribut le fait de porter du rouge et former l'ensemble de tous les enfants qui portent du rouge. Enfin, prenant les cheveux blonds comme troisième attribut, on constituerait l'ensemble de tous les enfants aux cheveux blonds. On peut alors passer des cordes autour de ces ensembles et laisser les enfants déterminer auquel ils appartiennent, car ils savent bien comment ils sont habillés, s'ils sont garçons ou filles, s'ils ont ou non des cheveux blonds. Ainsi, jouer aux intersections, dans le cas d'ensembles, c'est en somme la « même » chose que de jouer au jeu des « et » avec les attributs.

De même, faire des réunions, c'est la même chose que de jouer à « ou... ou » avec les attributs. Prenons, par exemple, la réunion de l'ensemble des garçons avec l'ensemble des enfants vêtus de rouge ; alors la réunion formée par la totalité des enfants considérés de l'un ou l'autre ensemble peut être définie par l'attribut « ou bien être un garçon ou bien être habillé de rouge ». Cela signifie donc que nous considérons tous les enfants qui sont dans l'une ou l'autre corde. Naturellement, dans le cas de trois attributs, nous considérons l'ensemble d'enfants qui est la réunion de l'ensemble des garçons avec l'ensemble des enfants vêtus de rouge, puis la réunion de cette réunion avec l'ensemble des enfants aux cheveux blonds. Alors nous pouvons dire que, dans la réunion totale, nous considérons tout enfant qui a l'un ou l'autre des trois attributs, c'est-à-dire :

il faut que ce soit un garçon, ou qu'il porte du rouge, ou encore qu'il ait les cheveux blonds.

On peut rendre le jeu des « ou... ou » plus réaliste et l'adjoindre au jeu des réunions en disant qu'on va faire un club avec des règles pour y entrer. On dira, par exemple, que tous les garçons ont le droit de faire partie du club, de même que toute personne portant du rouge ou ayant des cheveux blonds. Les enfants verront que si on n'est pas garçon, on peut quand même être admis, pourvu qu'on porte du rouge ; et même si on n'a pas d'habits rouges et si on n'est pas un garçon, on peut quand même être reçu avec des cheveux blonds. On peut, bien entendu, multiplier les exercices et les enfants découvrent les situations « si... alors... » correspondantes. Naturellement, avant d'en arriver là, il faudra faire pas mal de jeux avec les réunions et il faudra établir que tout élément d'une réunion de deux ensembles possède l'un ou l'autre des attributs définissant chacun des deux ensembles qui ont été réunis.

1.7. *Symbolisation des opérations sur les ensembles*

A un certain stade de l'apprentissage, on peut introduire les premiers symboles pour noter les opérations exécutées sur les ensembles.

Les réunions sont généralement désignées par un $\cup$ et les intersections par un $\cap$ renversé. Par exemple, si S et T représentent deux ensembles, leur réunion s'écrira $S \cup T$. L'intersection de S et de T s'écrira $S \cap T$. L'ensemble vide se représentera, comme on l'a déjà suggéré, en ne mettant rien entre les accolades. Ainsi, pour marquer que S et T n'ont aucun élément commun, on écrira

$$S \cap T = \{\ \}$$

Cela signifie que l'intersection des ensembles S et T est l'ensemble vide. En d'autres termes, l'ensemble des éléments qu'ils ont en commun est vide, ou encore ils n'ont pas d'élément commun. Il peut aussi se faire qu'en réunissant deux ensembles, on obtienne tout l'univers. Par exemple, si l'univers est formé des enfants de la classe, et que l'on appelle G l'ensemble des garçons et F l'ensemble des filles, la réunion de G et de F donne l'ensemble des enfants, donc l'univers. On peut vouloir disposer d'une notation pour désigner l'univers. On emploie souvent la lettre majuscule I, pour « identité ». Nous pourrions alors, dans notre exemple, écrire

$$G \cup F = I$$

Cela signifierait que la réunion de l'ensemble des garçons et de l'ensemble des filles est la même chose que l'ensemble de tous les éléments de l'univers. Nous disons, dans ce cas, que G est l'ensemble complémentaire de F et F l'ensemble complémentaire de G, mais (seulement) si G et F n'ont aucun élément commun. Ainsi les deux ensembles G et F sont complémentaires l'un de l'autre *si et seulement si* les deux équations suivantes se vérifient :

$$(1)\quad G \cup F = I$$
$$(2)\quad G \cap F = \{\ \}$$

Ces équations signifient, dans le langage moins concis de tous les jours : « L'ensemble des garçons et l'ensemble des filles, si on les réunit, nous donne l'ensemble de tous les enfants de la classe et il n'y a ni garçons qui soient à la fois des filles, ni filles qui soient à la fois des garçons ». Dans ce cas, il est évident que tout enfant doit être un garçon OU une fille et qu'aucun enfant ne peut être à la fois garçon et fille. Des exemples d'ensembles complémentaires de ce genre se présentent souvent en mathématique, les éléments des ensembles étant les éléments d'autres structures mathématiques. Par exemple, si l'univers est composé de l'ensemble des nombres naturels, c'est-à-dire 1, 2, 3, 4, 5, etc... on peut dire que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs sont des ensembles complémentaires, car tout nombre naturel est pair ou impair, et il n'y a pas de nombre naturel qui puisse être à la fois pair et impair. Ainsi les équations (1) et (2) sont vraies toutes les deux à la fois pour l'ensemble des nombres impairs et l'ensemble des nombres pairs. Ces exemples peuvent aussi servir à illustrer cette théorie, à condition que les enfants aient déjà acquis une connaissance pratique suffisante des nombres. Or, les nombres en tant que tels n'ont pas encore été introduits, à ce stade ; nous nous proposons d'asseoir la notion de nombre sur celle d'ensembles et, à ce stade, nous nous occupons encore des ensembles en tant que tels. Plus tard, quand nous aurons introduit les nombres, nous pourrons considérer les ensembles dont les éléments sont eux-mêmes les nombres ou les ensembles dont les éléments sont des ensembles de nombres, et ainsi de suite. Le ciel est le seul plafond de ce genre de généralisations en mathématique, même au niveau de l'enseignement du premier degré.

1.8. *Ensemble-différence, complément et leurs symboles*

Nous avons vu qu'il est possible de partager l'univers en deux ensembles complémentaires, tels que l'ensemble des garçons et l'ensemble des filles, si l'univers est formé par tous les enfants de la classe. Bien entendu, cette opération peut être exécutée non seulement sur l'univers, mais encore sur n'importe quel autre ensemble. Dans ce cas, les ensembles partiels formés par découpage de l'ensemble d'origine s'appellent des sous-ensembles. Par exemple, si nous prenions encore comme univers tous les enfants de la classe, les garçons constitueraient un ensemble et, comme sous-ensemble, on pourrait prendre les garçons âgés de six ans. L'ensemble des garçons âgés de six ans constitue un sous-ensemble de l'ensemble des garçons. Si maintenant nous voulons considérer les éléments de l'ensemble des garçons qui ne sont pas dans le sous-ensemble, nous allons, naturellement, prendre les garçons qui sont dans la classe mais qui n'ont pas six ans, c'est-à-dire ceux qui ont cinq ans, ou sept ans, ou huit ans, ou tout âge autre que six ans. La partie restante d'un ensemble, qui n'inclut pas un certain sous-ensemble, est dite ensemble-différence de l'ensemble de base et du sous-ensemble. Nous pouvons dire que l'ensemble des garçons qui n'ont pas six ans est l'ensemble-différence entre l'ensemble des garçons et l'ensemble des garçons âgés de six ans. On peut employer une notation pour cette différence, un peu comme le signe moins pour les nombres. On emploie souvent un trait oblique. Admettons, par exemple, que G soit l'ensemble des garçons et S l'ensemble des garçons âgés de six ans. L'ensemble $G \setminus S$ est alors l'ensemble différence, c'est-à-dire l'ensemble des garçons qui n'ont pas six ans. Appelons D cet ensemble différence : on peut alors écrire

$$D = G \setminus S$$

On peut également, bien sûr, utiliser cette notation pour les ensembles complémentaires et, par exemple, écrire :

$$G = I \setminus F$$
$$F = I \setminus G$$

La première égalité signifie que l'ensemble des garçons est l'ensemble des enfants qui ne sont pas des filles. La seconde égalité signifie que l'ensemble des filles est l'ensemble des enfants qui ne sont pas

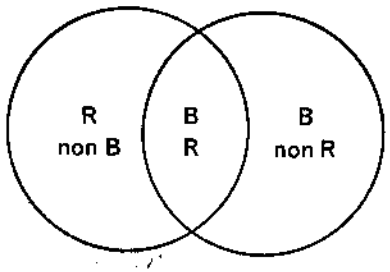
garçons. Ainsi, le signe \ nous permet de désigner les ensembles complémentaires.

Pour commencer, il est bien d'utiliser cette notation avec parcimonie. On finira par l'employer conjointement avec les signes de réunion et d'intersection. Supposons, par exemple, que nous voulions parler de l'intersection d'un ensemble avec un autre ensemble-différence ou avec un ensemble complémentaire. Soit, encore une fois, comme univers l'ensemble des enfants de la classe et un ensemble B formé de tous les enfants blonds ; si l'on appelle R l'ensemble des enfants vêtus de rouge, comment désignerons-nous l'ensemble des enfants habillés de rouge qui n'ont pas les cheveux blonds ? Les enfants qui n'ont pas les cheveux blonds vont former l'ensemble complémentaire de celui des enfants qui ont les cheveux blonds. Ainsi, l'ensemble des enfants qui ne sont pas blonds peut s'écrire $I \setminus B$. L'ensemble des enfants habillés de rouge s'écrit $\{R\}$. Or, ce qui nous intéresse actuellement, c'est la partie commune, ou intersection, de ces deux ensembles. Nous écrivons

$$\{I \setminus B\} \cap \{R\}$$

Cet ensemble est celui dont nous avons parlé, c'est-à-dire l'ensemble des enfants non-blonds qui portent du rouge ou encore l'ensemble des enfants porteurs de rouge qui ne sont pas blonds.

Nous n'insisterons jamais assez sur le fait que ce « calcul » sur les ensembles n'est pas à présenter à tout prix aux enfants. Ce qui compte, c'est de leur communiquer l'idée *d'ensemble*, l'idée de *relation entre un élément et l'ensemble*, les notions d'*ensemble vide*, de réunion, d'intersection et de compléments des ensembles. Si les enfants éprouvent une difficulté quelconque à utiliser le symbolisme, il faut renoncer à s'en servir. Il serait tout aussi facile dans la plupart des cas d'écrire la définition d'un ensemble sous la forme d'une phrase du langage courant, comme nous l'avons souvent fait jusqu'ici. Par exemple, au lieu d'écrire la définition d'un ensemble d'une manière formelle, nous pourrions dire, comme nous l'avons fait : « L'ensemble des enfants qui n'ont pas les cheveux blonds et qui portent du rouge ». Il se peut qu'à certains âges et à certains stades, ce genre de description verbale convienne mieux. Il y a, bien entendu, un autre mode d'expression, ce sont les diagrammes de Venn :



Notre ensemble se trouve à gauche (R non B). Cette notation est très claire et dès que les enfants ont compris que les limites des diagrammes de Venn indiquent les conditions d'appartenance à l'ensemble pour les objets qui sont dedans et de non-appartenance à l'ensemble pour les objets qui sont dehors, il ne devrait y avoir aucune difficulté à tracer le diagramme de Venn d'un ensemble quelconque. En fait, ce diagramme fera comprendre aux enfants la notion d'ensemble, que nous voulons leur faire acquérir, beaucoup plus vite et plus efficacement que toute autre notation formelle. Par contre, il y aura des enfants qui apprécieront la concision et la beauté d'une notation formelle : il ne faut pas les en priver, de sorte que, finalement, on ne peut poser à ce sujet aucune règle rigide. Ce qui n'est pas douteux, c'est qu'il faudra bien recourir ne serait-ce qu'à une notation très simple pour conserver trace de ce qu'on a fait, et certaines abréviations seront probablement nécessaires. Il ne sera ni nécessaire ni souhaitable de tout écrire *in extenso* en langage courant. Les enfants sont prompts à abréger ; quant à savoir dans quelle mesure, ce faisant, ils peuvent progresser vers un langage plus concis et plus formel, c'est la situation concrète en classe qui permettra d'en décider.

Les opérations sur les ensembles qui vont avoir une influence importante sur l'introduction des *opérations arithmétiques* sur les nombres sont :

1) l'opération qui construit l'ensemble-réunion
2) l'opération qui construit l'ensemble-différence.

La réunion de deux ensembles, dans le cas où l'intersection de ces deux ensembles sera vide, constituera le stade préalable à l'opération arithmétique *d'addition*. La découverte de la différence entre deux ensembles conduit à la découverte de la différence entre deux nombres, c'est-à-dire à l'opération arithmétique de *soustraction*. Mais, avant d'aborder ces opérations, il faudra découvrir le concept de nombre en tant que propriété d'un ensemble, comme nous le montrerons au 2e chapitre.

1.9. *Effets d'un changement d'univers*

Pour pouvoir introduire l'opération de multiplication, il faut d'abord que les enfants aient eu quelque expérience non seulement des ensembles d'objets, mais encore des ensembles d'ensembles d'objets. Par exemple, on organisera les enfants de la classe en paires ; on pourra ensuite parler d'un ensemble de paires d'enfants de la classe, et les éléments de cet ensemble ne seront plus constitués chacun par un enfant mais par une paire d'enfants. Ce faisant, nous passons de l'univers des enfants à l'univers des ensembles d'enfants. Il s'agit alors d'un univers beaucoup plus vaste ; avec les trente enfants de la classe on peut constituer littéralement des millions d'ensembles d'enfants. Il existe, en effet, de nombreuses manières de constituer, à partir de trente enfants, des ensembles de trois enfants, de quatre enfants, etc.

Laissons notre lecteur, si cela l'intéresse, calculer combien d'ensembles différents on peut faire avec trente enfants ou trente objets d'un univers. Le lecteur non-mathématicien sera surpris de la réponse. Ce n'est pas seulement la vaste étendue de l'appartenance qui est une source de difficulté à ce stade, mais encore la différence de nature de cette appartenance. C'est souvent parce que les enfants n'ont pas appris à manipuler des ensembles en tant qu'éléments d'autres ensembles qu'ils ne sont pas capables de saisir pleinement tous les aspects du problème de la multiplication. Aussi pensons-nous qu'il faut se pencher sur les ensembles dont les éléments sont des ensembles. On pourrait, par exemple, prendre comme univers non seulement des ensembles d'enfants, mais encore peut-être des ensembles de blocs logiques ou des ensembles de meubles, etc... A tout moment, il sera nécessaire de rappeler aux enfants que ce ne sont plus des objets isolés mais des groupes ou des ensembles d'objets qui sont les éléments de l'ensemble. Les diagrammes de Venn procurent de bons exemples de la différence entre un problème posé dans l'univers des blocs logiques et le même problème posé dans l'univers des ensembles de blocs logiques. Par exemple, si on prend un diagramme de Venn composé de deux cercles, que dans l'un des deux cercles on met les blocs bleus et dans l'autre les blocs rouges, dans l'intersection nous ne pourrons pas mettre de blocs du tout, parce qu'il n'y a pas de blocs rouges qui soient en même temps bleus, ni de blocs bleus qui soient en même temps rouges. Par contre, si l'univers est constitué par des ensembles de blocs, alors nous pouvons avoir des *ensembles de blocs* qui sont rouges et bleus, parce que dans l'ensemble nous pouvons mettre certains blocs bleus et certains blocs rouges. Aussi, dans le diagramme de Venn, dans ce cas, l'appartenance consistera en piles de blocs. Les piles, dans les parties de l'ensemble rouge, qui n'est pas dans l'ensemble bleu, seront composées entièrement de blocs rouges. Dans la partie de l'ensemble bleu, qui n'est pas dans l'ensemble rouge, les piles seront faites entièrement de blocs bleus. Mais dans l'intersection, c'est-à-dire dans la partie de l'ensemble rouge qui est aussi dans l'ensemble bleu, nous ferons des piles contenant à la fois des blocs rouges et des blocs bleus. Ainsi, si l'univers est composé d'ensembles de blocs, l'intersection du diagramme de Venn n'est pas vide ; si l'univers n'est composé que de blocs, l'intersection du même diagramme de Venn est vide.

2. LES NOMBRES

2.1. *Les nombres en tant que propriétés des ensembles. Ensembles équivalents*

On ne répétera jamais assez que le nombre n'est pas du tout une chose. C'est une propriété, tout comme la rougeur des joues ou la noirceur de la nuit ou la rondeur des tours. Ces propriétés ne sont ni des objets réels, ni des événements. La rondeur d'une tour n'est pas la tour elle-même. La noirceur de la nuit n'est pas la nuit. Ce sont des propriétés, elles n'existent pas indépendamment. De même, des nombres comme deux, trois, quatre, n'existent pas « concrètement » : ce sont des propriétés des ensembles d'éléments auxquels ils se rapportent ; « deux » est la propriété de tout ensemble de deux objets, trois est la propriété de tout ensemble de trois objets.

Pour découvrir cette notion de propriété, il faut que les enfants jouent à des *jeux de correspondance terme à terme*. Il leur faut apprendre à classer les ensembles en ensembles équivalents. Par exemple, apportons des chapeaux en papier dans la classe, et demandons aux enfants s'il y en a assez pour que chacun en ait un. Y a-t-il trop de chapeaux, ou d'enfants, ou juste assez ? Une fois la distribution terminée, il y aura peut-être des enfants sans chapeau, ou trop de chapeaux, et il en restera quelques-uns par terre. Ou encore, si on a bien calculé, il y aura peut-être exactement autant de chapeaux que d'enfants. Dans ce cas, nous aurons établi une correspondance terme à terme entre l'ensemble des chapeaux et l'ensemble des enfants de la classe. Quand une telle correspondance se trouve établie entre deux ensembles, on dit que ces deux ensembles sont *équivalents*. Nous disons aussi qu'ils ont la même *propriété numérique*. Par exemple, s'il y a cinq enfants dans le groupe et que nous leur donnons cinq chapeaux, il y a correspondance terme à terme en ce sens que chaque enfant n'aura qu'un chapeau et qu'à tout chapeau correspondra un et un seul enfant. Il n'y aura aucun enfant sans chapeau ni aucun chapeau sans enfant. Cette propriété commune des deux ensembles, qui les rend équivalents par la possibilité d'établir une correspondance d'élément à élément, est appelée la *propriété cinq* [1] ; avant que les enfants commencent à écrire les chiffres qui symbolisent les propriétés numériques, il est indispensable qu'ils jouent à des jeux de correspondances de ce genre, ne serait-ce qu'en se prenant comme éléments d'un ensemble et en utilisant des objets de la classe pour faire des ensembles équivalents, et ainsi de suite.

Il n'est pas nécessaire que les ensembles équivalents appartiennent au même univers. Par exemple, on peut former un *ensemble de tables* dans la classe et former *un ensemble d'ensembles de quatre enfants* de la classe. Supposons qu'il y ait vingt-quatre enfants dans la classe et six tables. Dans ce cas, on peut mettre les ensembles de quatre enfants en correspondance terme à terme avec l'ensemble des tables en mettant un ensemble de quatre enfants autour de chaque table. On remarquera que chaque ensemble de quatre enfants a une table où se mettre et que chaque table a ses quatre enfants autour d'elle. Il n'y a aucune table sans ensemble d'enfants, aucun ensemble d'enfants sans table. Dans ce cas, nous n'avons pas établi une correspondance entre l'ensemble des enfants et l'ensemble des tables, mais entre un ensemble d'ensembles de quatre enfants et l'ensemble des tables. La propriété commune de ces deux ensembles est, bien entendu, *le nombre six*. Le nombre quatre ne pénètre que par la petite porte.

On peut jouer de tels jeux avec les blocs logiques. Par exemple, on remarquera qu'il y a autant de pièces épaisses que de pièces minces, et qu'il est facile d'établir une correspondance terme à terme entre chaque pièce épaisse et la pièce mince correspondante. La plupart des enfants établiront une correspondance entre tous les attributs autres que l'épaisseur de toute pièce épaisse qu'ils joindront à une pièce mince. Ainsi, ils mettront un grand cercle jaune épais avec un grand cercle jaune mince, et ainsi de suite. Il ne faut pas les en empêcher, mais si un enfant suggère de procéder autrement, on le laissera faire ; bien plus, on l'y encouragera ! Il n'y a pas qu'une seule correspondance terme à terme entre deux ensembles, il y en a beaucoup. Il n'est pas obligatoire qu'un certain chapeau aille sur une certaine personne et sur elle seule. Tout chapeau en papier peut aller sur tout enfant, du moment qu'il ne reste aucun chapeau sans enfant ni aucun enfant sans chapeau. On peut faire correspondre un à un tous les blocs bleus avec tous les blocs jaunes et on verra, là encore, que la propriété numérique de l'ensemble des blocs bleus est la même que la propriété numérique de l'ensemble des blocs jaunes, et encore que celle de l'ensemble des blocs rouges. On peut encore faire correspondre les ronds bleus avec les carrés jaunes. Il y a autant de ronds bleus que de carrés jaunes, puisqu'on peut les faire correspondre terme à terme.

On pourra, bien entendu, demander aux enfants de bâtir des ensembles qui ne puissent pas être ainsi mis en correspondance. Par exemple, supposons qu'on leur dise : « Prenons les carrés bleus et prenons les grands rouges ». Il y a, naturellement, plus d'éléments dans l'ensemble des grands rouges que dans l'ensemble des carrés bleus. Les éléments de ces deux ensembles ne peuvent pas être mis en correspondance terme à terme. Au niveau des nombres, nous disons que le nombre d'éléments de l'ensemble des grands rouges est plus grand que le nombre d'éléments de l'ensemble des carrés bleus. La *possibilité* d'établir des ensembles en correspondance conduit à l'*égalité* de leurs propriétés numériques et l'*impossibilité* à l'*inégalité* de ces propriétés.

Il y a trois manières possibles d'exprimer l'inégalité. On peut dire, par exemple, que le nombre d'éléments de l'ensemble grand bleu n'est pas le même que le nombre d'éléments de l'ensemble de carrés rouges. « Pas le même » peut être symbolisé par le signe de l'égalité, mais barré (différent de) :

$$N\,\{\text{grands bleus}\} \neq N\,\{\text{carrés rouges}\}$$

On peut préciser l'information en disant qu'il y a plus d'éléments dans l'ensemble des grands bleus que dans celui des carrés rouges. Cela s'indique par le signe >

$$N\,\{\text{grands bleus}\} > N\,\{\text{carrés rouges}\}$$

De même, si nous voulons indiquer qu'il y a moins d'éléments dans l'ensemble des carrés rouges que dans celui des grands bleus, nous emploierons le signe $<$[1].

$$N\ \{\text{carrés rouges}\} < N\ \{\text{grands bleus}\}$$

Quant à la propriété numérique elle-même, on l'exprime, nous venons de le voir, en mettant la lettre N devant le signe de l'ensemble. Par exemple, nous écrivons l'égalité :

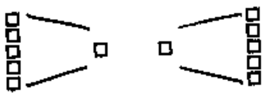
$$N\ \{\text{carrés rouges}\} = N\ \{\text{ronds bleus}\}$$

et cette égalité, c'est celle des propriétés numériques de ces deux ensembles. Il serait, bien entendu, inexact de dire que l'ensemble des carrés rouges est le même que l'ensemble des ronds bleus, tandis qu'il n'est pas inexact de dire que le nombre d'éléments de ces deux ensembles est le même. Ainsi, nous venons de montrer qu'on peut se placer à *deux niveaux différents* quand on parle d'égalité. Quand deux ensembles sont égaux, la signification est toute différente de ce qu'elle est quand le *nombre* des éléments de ces deux ensembles est le même. Ou encore, si nous voulons dire quelque chose de l'inégalité, nous pouvons écrire

$$N\ \{\text{grands rouges}\} > N\ \{\text{triangles jaunes}\}$$

Cette notation traduit le fait que si nous voulons établir une correspondance entre l'ensemble des grands rouges et l'ensemble des triangles jaunes, il va rester dans le premier ensemble un certain nombre d'éléments auxquels ne correspondra aucun élément dans le second ensemble. En présence d'une telle situation, nous disons que la propriété numérique du premier ensemble est plus grande que la propriété numérique du second ensemble. Il est tout aussi important de découvrir des *impossibilités* comme de découvrir des *possibilités*. Le fait qu'il soit *impossible* d'établir une correspondance terme à terme conduit à l'idée d'*inégalité*, c'est-à-dire à la *négation* de la propriété d'*égalité ;* la possibilité d'établir une correspondance terme à terme conduit à l'idée d'égalité entre les propriétés numériques convenables.

1. Les symboles $<$, $>$ seront facilement acquis par la manipulation des réglettes emboîtables :



(N. D. É.)

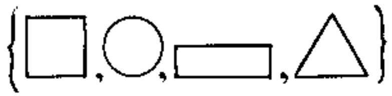
2.2. *Conservation du nombre*

On sait que, pour beaucoup de jeunes enfants, il y a plus d'objets sur une table quand ces objets sont éparpillés et occupent plus de place sur la table que quand ils sont serrés les uns contre les autres, bien que leur nombre soit en réalité le même dans les deux cas. Les enfants, dans les débuts, considèrent les termes « plus » et « moins » comme signifiant « prenant plus de place » ou « prenant moins de place ». Les jeux de correspondance terme à terme contribueront beaucoup à développer en profondeur leurs concepts sur ce point. Il est bon, toutefois, de faire faire aux enfants des « exercices de conservation » pour bien leur faire sentir que les propriétés numériques d'un ensemble ne changent pas avec la disposition de ses éléments. Par exemple, on prendra des perles et on les mettra tantôt dans une flûte à champagne, haute et étroite, tantôt dans une assiette plate. Pour commencer, on mettra une perle dans la flûte et une perle dans l'assiette, puis deux dans chaque, puis trois. Inutile d'exiger des enfants une réponse numérique ; il suffit, à n'importe quel stade, de leur demander s'ils croient qu'il y a plus de perles dans le verre ou dans l'assiette. Certains enfants penseront que ce sont les perles de l'assiette qui sont les plus nombreuses, parce qu'elles sont éparpillées, d'autres croiront que c'est dans le verre parce que la *hauteur* est plus grande. La plupart des enfants, toutefois, conviendront que, puisqu'à aucun moment on n'a mis plus de perles dans l'un des récipients que dans l'autre, le nombre de perles doit être le même dans les deux. Ces exercices fourniront un critère non-perceptuel, c'est-à-dire celui de la correspondance un-à-un, pour décider si des ensembles contiennent ou non le même nombre d'éléments. Qui plus est, l'acquisition de ce critère sera plus efficace dans la mesure où les enfants prendront personnellement part à sa vérification.

Les enfants trouvent beaucoup plus difficiles les exercices analogues intéressant la longueur, la surface et le volume. Beaucoup d'enfants, quand on met côte à côte deux règles de même longueur, mais sans que leurs extrémités coïncident, trouvent que la règle dont l'extrémité est à droite est plus longue. De même, si on prend de l'eau contenue dans un récipient large et peu profond et qu'on la verse dans un récipient étroit et profond, ils croient que la même quantité d'eau, versée dans ce récipient haut et mince, fait « plus d'eau ». On constate souvent qu'en leur disant qu'on n'a pas ajouté d'eau, cela n'ébranle aucunement leur conviction! Certains enfants s'obstinent alors à dire qu'on voit bien qu'il y a plus d'eau. Cela signifie que l'idée de volume (ou de capacité) n'est pas encore fixée dans leur esprit de manière utilisable. Ils n'ont pas encore compris quelles sont les transformations qui, en fait, laissent inchangés les volumes, les longueurs et, en général, toutes quantités. Si, dans ce cas, on obtient des réponses fausses à plusieurs reprises, mieux vaut abandonner l'exercice : il est manifestement prématuré pour ces enfants. Mieux vaut alors continuer à mettre en œuvre de nombreux récipients différents (dans le cas de volumes) et faire confiance au processus de maturation et de développement progressif de la compréhension profonde : la lumière finira par jaillir. Quelques semaines plus tard, il peut fort bien se faire qu'on obtienne des réponses très différentes : la notion de conservation s'est installée.

2.3. *Le concept de succession*

Nous avons vu qu'on peut établir un *ordre* entre les nombres, introduits en tant que propriétés de certaines classes d'ensembles, en prenant pour critère qu'il est impossible d'établir une correspondance élément par élément entre ensembles appartenant à des classes différentes. Par exemple, si on veut établir une relation d'ordre entre 2 et 4, il faut prendre un ensemble appartenant à la classe de tous les ensembles qui possèdent la propriété « deux » et un ensemble appartenant à la classe de tous les ensembles qui possèdent la propriété « quatre ». Par exemple, nous pourrions prendre les ensembles

{Sylvain, Catherine} et 

Si nous essayons d'établir une correspondance terme à terme entre le premier ensemble et le second, il est clair que nous échouerons à tous les coups. Il restera toujours certains éléments du second ensemble qui n'auront pas pu être mis en correspondance avec un élément quelconque du premier ensemble. Dans ce cas, en généralisant à toutes les paires possibles d'ensembles qu'on aurait pu prendre respectivement en classe 2 et en classe 4, on peut dire que 2 est moins que 4 ou que 4 est plus que 2. On dispose ainsi d'un critère toujours utilisable pour déterminer si un nombre est plus grand qu'un autre, ou plus petit qu'un autre, ou si ces deux nombres sont égaux, même si l'on arrive à ce résultat par des voies différentes :

$$2+3=2\times4-3.$$

L'idée d'ordre ne nous donne pas encore celle de *succession* ou de voisinage. Quel est le nombre « voisin », « suivant » d'un nombre donné ? C'est celui qui se rapporte aux ensembles ayant un élément de plus que les ensembles auxquels s'applique notre nombre. Aussi, pour introduire l'idée de succession est-il nécessaire d'introduire celle de « un de plus ». Bien entendu, les enfants peuvent apprendre à « compter » en répétant la série conventionnelle des adjectifs numéraux, des nombres cardinaux. Avec cette série, l'enfant n'a aucun besoin de savoir que pour obtenir le « suivant » de 5 il faut ajouter 1 à 5 et obtenir 6. Il lui suffit de réciter la suite de mots qu'il a apprise par cœur, et celui qui vient après « cinq » sera « le suivant » et il saura que c'est

« six ». Mais cette façon de faire laisse complètement séparées les idées de « un de plus », de « voisin » et de « suivant ». Il a été amplement démontré que tant que les enfants n'ont pas dans une certaine mesure réussi à faire la synthèse entre ces deux idées, tout leur travail sur les nombres risque d'être fait « au petit bonheur la chance », et ils ne sont pas capables de raisonner efficacement sur les situations arithmétiques les plus simples.

Le jeu décrit en 4.2 (p. 47) peut être rendu indépendant de toute base de numération, voire de la connaissance des nombres, en faisant construire aux enfants des piles de cubes de manière récurrente, c'est-à-dire en se référant à la pile précédente chaque fois qu'ils construisent la pile suivante[1].

Le premier exercice est très simple. Prendre un objet. On a la première pile.

Ensuite, construire un ensemble équivalent au premier ensemble (ou à la première pile). Autrement dit, l'enfant doit sortir un autre objet. Puis on lui demande de mettre un autre objet avec cet objet. Il a alors construit son second ensemble (sa deuxième pile).

Ensuite, on construit un ensemble équivalent au second ensemble. Cela fait, on prend un autre objet et on le joint à l'ensemble qui vient d'être construit. On a maintenant réalisé le troisième ensemble.

Ensuite, de nouveau, on « copie » le dernier ensemble, c'est-à-dire qu'on construit un ensemble équivalent au troisième ensemble. On ajoute un objet à ce nouvel ensemble, et voilà le quatrième ensemble.

On continue de la sorte aussi longtemps que possible, de préférence jusqu'à ce que l'enfant ait perdu le compte du nombre d'objets entrant dans la composition des piles successives.

Maintenant, la maîtresse montre les deux premières piles et demande aux enfants qui ont assisté à la construction de la série laquelle a le plus d'objets. La question suivante est : « Combien d'objets en plus y a-t-il dans la plus grande des deux ? ». Poursuivant l'interrogatoire, on remonte la série, en montrant toujours deux piles consécutives. Les enfants ne sont pas longs à saisir que la pile « suivante » a toujours un objet de plus, puisque d'ailleurs c'est ainsi qu'on l'a constituée.

L'étape suivante pourrait consister *à montrer* la première et la troisième piles, puis la seconde et la quatrième, puis la troisième et la cinquième (mais bien entendu sans *prononcer* les adjectifs ordinaux !), et à poser les mêmes questions. Beaucoup d'enfants qui auront répondu avec succès à la série de questions précédente vont commencer par croire :

a) ou bien que la plus grande pile comprend maintenant trois ou quatre éléments de plus que la plus petite, même si elle n'est qu'à deux intervalles de la précédente,

b) ou bien que la plus grande pile a seulement un élément de plus que la plus petite. Si on leur demande pourquoi ils répondent ainsi,

1. Ce jeu est dû à P. Greco, dans une forme légèrement différente. Voir Études, XIII, *sur la construction du nombre*.

ils disent, dans le premier cas, que maintenant les piles sont tellement grandes que les plus grandes doivent être beaucoup plus grandes que les plus petites, et, dans le second cas, que les piles sont tellement grandes qu'elles sont presque pareilles et qu'il n'y a pas tant de différence.

Il est évident que ces enfants n'ont pas encore établi un lien utilisable entre la succession des nombres et les quantités qu'ils représentent. Tout en sachant que un et un font deux, ils ne réalisent pas qu'un de plus et un de plus c'est deux de plus. On verra que lorsque les enfants ont joué avec les *états* et les *opérateurs*, et ont établi des équivalences entre des successions d'opérateurs et des opérateurs isolés, les difficultés que nous venons d'évoquer disparaissent dans une large mesure.

2.4. *Addition et soustraction*

Nous avons vu dans notre section sur les ensembles que l'expérience préalable nécessaire à l'addition des nombres est la réunion d'ensembles qui n'ont pas d'éléments communs. Il est intéressant de demander maintenant aux enfants quelle est la propriété numérique de l'ensemble réalisé par la réunion de deux ensembles dont ils connaissent déjà les propriétés numériques. Cela ne va pas présenter de difficulté particulière, car une fois les deux ensembles réunis, les enfants vont tout simplement compter la totalité des éléments. Réfléchissons un instant à ce que cela signifie. Que font-ils quant ils « comptent » ? Ils établissent, c'est évident, une correspondance terme à terme, entre les éléments de l'ensemble à « compter » et les éléments d'un ensemble de « mots étalons » tenu en réserve dans la mémoire. Dans notre exemple, ils établissent la correspondance entre les éléments de l'ensemble

{un, deux, trois, quatre, cinq, six...}

et les éléments de l'ensemble de tables qu'il s'agit de « compter ». Compter n'est qu'un cas particulier d'établissement d'une correspondance entre ensembles, l'un des ensembles étant un ensemble-étalon, une espèce de monnaie internationale en fonction de laquelle on *mesure* tout ensemble. Il convient de se rappeler que cette mesure est assurée par toute une série d'ensembles dont le premier est {un}, le second {un, deux}, le troisième {un, deux, trois}, et ainsi de suite.

Supposons, par exemple, que l'ensemble des garçons de la classe ait la propriété numérique quinze, et que l'ensemble des filles de la classe ait la propriété numérique seize. La propriété numérique de la réunion de ces deux ensembles sera alors trente-et-un. Or, la réunion de ces deux ensembles constitue celui des enfants de la classe, de sorte qu'au niveau des ensembles on peut dire :

$$\{\text{garçons}\} \cup \{\text{filles}\} = \{\text{enfants de la classe}\}$$

Pour passer au niveau suivant d'abstraction, il nous faudrait dire : N {garçons} + N {filles} = N {enfants de la classe}. Or, le premier terme de cette équation s'écrit habituellement avec les chiffres 15 et le second avec les chiffres 16, tandis que le second membre de l'équation s'écrit 31. En définitive, écrire $15 + 16 = 31$ serait une manière à la fois plus courante et plus « avancée » d'écrire cette relation particulière. Bien entendu, il peut être sage de ne pas commencer par des nombres à deux chiffres, dont la complexité relative peut dérouter les enfants à ce stade : ils risquent fort de ne pas saisir tout ce qui est implicitement contenu dans le « un » et le « cinq » de 15 ou dans le « trois » et le « un » de 31. Naturellement, la plupart des enfants admettent sans difficulté que quinze s'écrive avec un 1 suivi d'un 5, mais ils le confondent parfois avec 51 quand ils n'ont pas encore acquis solidement la notion de valeur positionnelle. Mais si on leur apprend que 15 représente le mot quinze et 16 le mot seize, et qu'on ne fait aucune tentative pour décomposer le symbole en ses éléments, 1 se rapportant à *un* ensemble de dix et 5 à cinq objets, on ne leur aura fait aucun mal. Nous croyons, toutefois, qu'il est plus sûr, dans les débuts, de s'en tenir à de petits nombres ; les enfants acquerront l'idée d'addition aussi efficacement avec des petits nombres qu'avec des grands, et sans doute même plus efficacement[1].

L'opération de soustraction d'un nombre d'un autre nombre est de toute évidence le correspondant numérique de l'opération de recherche de l'ensemble-différence entre deux ensembles. Soit l'ensemble constitué par les garçons et le sous-ensemble formé par les garçons aux cheveux blonds ; on peut enlever ce sous-ensemble, et alors la différence entre l'ensemble des garçons et l'ensemble des garçons aux cheveux blonds est constituée par l'ensemble des garçons qui n'ont pas les cheveux blonds. Supposons maintenant que la propriété numérique de l'ensemble des garçons soit dix et celle de l'ensemble des garçons blonds trois : la propriété numérique de l'ensemble-différence sera alors sept. Le calcul de la propriété numérique de l'ensemble-différence de deux ensembles constitue l'opération de soustraction. De même le calcul de la propriété numérique de l'ensemble formé par la réunion de deux ensembles constitue l'opération arithmétique que nous appelons addition.

2.5. *Multiplication*

On peut introduire la multiplication en faisant appel à une opération assez intéressante touchant aux ensembles et connue sous le nom

1. Il existe actuellement deux systèmes, mis au point aux États-Unis, l'un par Patrick Suppes et l'autre par Paul Rosenbloom, qui permettent de tirer les idées et les techniques de l'addition, voire de la soustraction, de l'expérience antérieurement acquise en matière d'ensembles et d'opérations sur les ensembles.

de *produit cartésien*. Supposons que nous ayons deux ensembles : un ensemble de chapeaux et un ensemble d'enfants. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait autant de chapeaux que d'enfants. Examinons toutes les manières possibles de mettre un chapeau à un enfant et formons un nouvel ensemble avec toutes les paires qu'on peut constituer avec un enfant et un chapeau. Admettons qu'il y ait cinq enfants et trois chapeaux : chacun des cinq enfants peut mettre l'un quelconque des trois chapeaux. Ainsi, le premier enfant aura trois manières de mettre un chapeau ; il en sera de même du second, de même du troisième, de même du quatrième et de même du cinquième. Cela fera, en tout, quinze combinaisons. L'ensemble de toutes les combinaisons possibles entre un chapeau et un enfant est appelé *produit* de *l'ensemble des chapeaux* par *l'ensemble des enfants*.

Prenons un autre exemple. Nous disposons sept haricots en une rangée et constituons ainsi un ensemble de haricots. Disposons en dessous, sur une seconde rangée, un second ensemble de sept haricots, puis, en dessous, une troisième rangée, encore de sept haricots. Nous avons ainsi trois rangées, c'est-à-dire trois ensembles de haricots, et dans chaque ensemble il y a sept éléments. Et maintenant, comment construire le produit certésien entre l'ensemble des haricots d'une rangée et l'ensemble des rangées que nous avons disposées sur la table ? Ce serait le moment de se rappeler les équivalences entre ensembles et de constater que l'ensemble des *colonnes* ainsi formées est un ensemble équivalent de l'ensemble des haricots de l'une quelconque des *rangées*. En d'autres termes, il y a autant de colonnes de haricots dans notre disposition qu'il y a de haricots dans une rangée donnée. On peut donc, pour l'établissement du produit cartésien, remplacer l'ensemble des haricots d'une rangée par l'ensemble des colonnes. Ce sera plus facile parce qu'alors on n'aura pas besoin de choisir une rangée particulière de haricots pour former le produit par l'ensemble des rangées. Formons donc le produit de l'ensemble des colonnes par l'ensemble des rangées. Ce produit va consister en toutes les paires possibles formées d'une colonne et d'une rangée. Autrement dit, on peut faire une paire avec la première rangée et la première colonne, une paire avec la deuxième rangée et la première colonne, une paire avec la troisième rangée et la première colonne, une paire avec la première rangée et la deuxième colonne, et ainsi de suite. En tout, il y a vingt et une paires, ce qui est précisément le nombre de harictots posés sur la table, car chaque haricot se trouve à l'intersection d'une, et d'une seule rangée avec une, et une seule colonne. Nous ne voulons pas dire pour autant que l'introduction du produit cartésien constitue la meilleure manière d'introduire la multiplication. Elle ne l'est peut-être pas, mais ce que nous voulons dire, c'est qu'y recourir constitue peut-être une manière d'occuper les enfants les plus doués pendant que les autres, plus lents, seront en train de rattraper leur retard dans la formation des concepts d'addition et de soustraction.

L'une des difficultés qui ne ressort pas immédiatement de ce qui précède, c'est qu'il faut que les enfants comprennent bien que *l'ensemble de haricots* de l'exemple ci-dessus est un ensemble équivalent de *l'ensemble de paires de rangées et de colonnes*. A chaque paire formée d'une rangée et d'une colonne correspond un et un seul haricot. Et à chaque haricot correspond une et une seule paire formée d'une rangée et d'une colonne. De la sorte, la propriété numérique de l'ensemble de paires de rangées et de colonnes doit être la même que la propriété numérique de l'ensemble de haricots disposés sur la table. C'est la raison, d'ailleurs, pour laquelle cette forme de multiplication est peut-être un peu artificielle.

L'introduction courante consistera à laisser les enfants compter les ensembles équivalents et former des ensembles d'ensembles équivalents, puis compter les éléments de ces ensembles d'ensembles. Autrement dit, dans le cas des haricots, on a fait trois ensembles équivalents de haricots. Ils sont équivalents puisque chacun est composé de sept haricots. Puis il y a un ensemble d'ensembles, c'est-à-dire un ensemble de rangées dans ce cas ; l'ensemble de rangées possède la propriété numérique de trois et chaque ensemble de haricots a la propriété numérique de sept. Si donc nous formons la réunion des ensembles de haricots que nous avons disposés en rangées et si nous calculons la propriété numérique de cet ensemble-réunion, nous obtenons un troisième ensemble dont la propriété numérique est vingt et un. C'est le produit des propriétés numériques de l'ensemble des rangées et de l'ensemble des haricots de chaque rangée.

Appelons R l'ensemble des rangées de haricots et appelons H_1, H_2 ou H_3 ou, encore, en résumé, H, si nous ne souhaitons pas faire de différence entre les rangées, l'ensemble des haricots de chaque rangée. Les propriétés numériques sont alors :

$$N\{H\} = 7$$
$$N\{R\} = 3$$

D'autre part, la réunion de H_1, H_2 et H_3, c'est-à-dire

$$\{H_1 \cup H_2 \cup H_3\}$$

constitue l'ensemble-réunion dont nous voulons calculer la propriété numérique. Cette propriété numérique, c'est le produit des deux nombres 3 et 7. Si on appelle P l'ensemble-réunion, on a

$$N\{P\} = N\{H\} \times N\{R\}$$

et « multiplié par » est l'opération nécessaire au calcul de la propriété numérique de l'ensemble-réunion en cause.

Il est important de saisir que dans cette opération on est allé au-delà de l'idée d'addition. Il est vrai qu'on obtient la même solution au problème en additionnant les trois termes qu'en multipliant par trois. Mais ce n'est pas parce que la réponse est la même que l'opération est la même. La multiplication implique une nouvelle sorte de variable, à savoir le multiplicateur, qui compte des *ensembles*. Le multiplicateur est une propriété des ensembles d'ensembles. Le multiplicande est une propriété des ensembles. Aussi les deux facteurs ne se rapportent-ils pas au même univers. En fait, il n'y a pas de facteurs dans le cas de l'addition, parce que le nombre d'éléments à additionner est sans incidence sur la nature du problème. Les maîtres qui enseignent que la multiplication n'est qu'une addition répétée rendent un mauvais service à leurs élèves. En réalité, ils leur cachent la difficulté et, même, leur assènent une contre-vérité. Il est peut-être utile de se rendre compte de ce que la structure logique de l'arithmétique demeure relativement simple tant qu'il ne s'agit que de l'addition et de la soustraction, alors que l'introduction de la multiplication pose des problèmes tout différents. Il en résulte – et cela, les maîtres ne doivent jamais l'oublier – une difficulté d'un ordre plus grand dans l'acquisition du concept de multiplication, comparée à celle du concept d'addition. Dans la multiplication, on a affaire à deux univers différents à la fois, alors que dans l'addition il ne s'agit que d'un seul univers, celui des ensembles. Dans l'addition, tout nombre se rapporte au même univers, celui des ensembles. Dans la multiplication, au contraire, certains nombres se rapportent aux ensembles et d'autres aux ensembles d'ensembles. C'est là un différence considérable, et les exercices que les enfants auront faits avec des ensembles, et avec des ensembles d'ensembles, et même avec des ensembles d'ensembles d'ensembles, les aideront considérablement, par la suite, à se colleter avec les problèmes que leur posera la multiplication.

2.6. *Division*

Un moment vient où il faut introduire la division. La forme la plus simple de division, c'est le partage. On a un ensemble et il s'agit de le séparer en un certain nombre de sous-ensembles équivalents. Le résultat de la division, c'est le nombre d'éléments qu'il y aura dans chacun de ces sous-ensembles. Supposons, par exemple, un ensemble de 12 noix, qu'il s'agit de répartir en quatre sous-ensembles équivalents : le résultat recherché, c'est la propriété numérique de chacun de ces sous-ensembles. C'est 3, bien entendu. Quand on partage l'ensemble de 12 noix en 4 sous-ensembles, la propriété numérique de chacun de ces sous-ensembles équivalents est 3. C'est assez facile à faire, et les enfants comprennent que c'est en quelque sorte l'opposé de ce qu'on fait quand on multiplie. Quand on multiplie, on a l'ensemble d'ensembles et sa propriété numérique ainsi que la propriété numérique de chacun des ensembles dont est composé l'ensemble d'ensembles. Le problème est de trouver la propriété numérique de la réunion de tous ces ensembles qui sont les éléments de l'ensemble d'ensembles. Dans la division, on part de la propriété numérique de la réunion des ensembles d'ensembles ; on a également la propriété numérique de l'ensemble d'ensembles et on cherche la propriété numérique de chaque ensemble dont l'ensemble d'ensembles est composé.

Première situation :

$N\{E_1, E_2, E_3 \dots\dots\dots E_n\}$.
et $N\{E_1\} = N\{E_2\} = N\{E_3\} = \dots N\{E_n\}$ sont connus

Problème :
Quelle est la réponse à $N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots\dots \cup E_n\}$?
C'est par la multiplication que l'on résout le problème.

Deuxième situation :

$N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots\dots, E_n\}$
et $N\{E_1, E_2, E_3, \dots\dots\dots E_n\}$ sont connus
et on sait que
$N\{E_1\} = N\{E_2\} = N\{E_3\} = N \dots\dots (E_n)$

Problème :
Quelle est la valeur commune de $N\{E_i\}$?
Ce problème a sa solution dans une division.

Troisième situation :

$N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots\dots E_n\}$
et $N\{E_i\}$ est connu.

Problème :
Quelle est la valeur de $N\{E_1, E_2, E_3 \dots\}$?
Ce problème a également sa solution dans la division.

Quant aux moyens de venir à bout des difficultés inhérentes à la structure ci-dessus, nous les avons indiqués ci-dessous p. 114.

3. ÉTATS ET OPÉRATEURS

3.1. *États et opérateurs en mathématique*

Une bonne partie de la mathématique se rapporte à l'étude des états et à l'étude des opérateurs qui entraînent la transformation de ces états en d'autres états. Par exemple, l'addition constitue une situation de ce genre. Il en est de même de la soustraction et de toute autre opération arithmétique. Dans l'addition, on a la situation suivante :

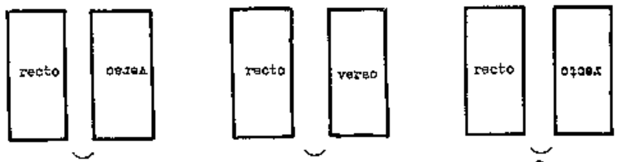
Soit un état d'origine, par exemple la propriété numérique d'un certain ensemble : trois livres posés sur la table. Cet ensemble de trois livres est l'ensemble d'origine et sa propriété numérique, trois, constitue l'état d'origine. Effectuons maintenant une transformation. Elle peut être de réunir cet ensemble de trois livres à un autre ensemble, de quatre livres, qu'on vient de poser sur la table. L'opérateur, c'est la propriété numérique de l'ensemble qui vient d'être posé, et qu'il s'agit de réunir à l'ensemble existant à l'origine sur la table. La propriété numérique de l'ensemble original est trois, et la propriété numérique de l'opérateur est quatre. Bien entendu, une fois que les deux ensembles sont réunis, l'état de la table se trouve modifié. Il y a, dessus, un nouvel ensemble, et sa propriété numérique est constituée par l'état modifié. Elle est de sept. Ainsi, ce qui s'est passé, c'est qu'à l'« état-trois » a été appliqué un opérateur « ajouter quatre », ce qui a donné un « état-sept ». On peut en dire autant de la multiplication. A l'« état-trois » qui est sur la table on applique l'opérateur « multiplier par quatre ». Cela signifie que, sur une autre table par exemple, nous voulons créer un état dans lequel il y aura quatre fois autant de livres. Nous allons considérer un ensemble d'ensembles tel que dans chacun de ces ensembles il y aura trois livres et qu'ainsi cet ensemble d'ensembles comprendra un ensemble de trois livres, un autre ensemble de trois livres, un autre ensemble de trois livres et encore un autre ensemble de trois livres. La propriété numérique de cet ensemble d'ensembles est, naturellement, quatre, et c'est là notre opérateur qui agit maintenant en tant que multiplicateur. Le nouvel état qui a été engendré s'obtient en calculant la propriété numérique de la réunion de tous les ensembles de livres qui viennent d'être posés sur la table. Cette propriété numérique est de douze. Ainsi, dans ce cas, on est parti d'un « état trois » et par une opération de « multiplication par quatre » on a obtenu un « état de douze ». Bien entendu, on peut utiliser les états et les opérateurs à bien autre chose qu'à compter l'appartenance à des ensembles et à modifier cette appartenance en réunissant d'autres ensembles à l'ensemble d'origine. Par exemple, on peut dire de l'état d'un enfant de la classe qu'il est d'être debout dans un coin de la pièce. On peut ensuite lui appliquer un opérateur (par exemple, faire deux pas en avant) qui le place en un autre endroit de la pièce. On peut tout aussi bien lui donner d'autres ordres, comme de faire des pas de côté ou en arrière, ou de s'asseoir, ou de monter sur une chaise, et ainsi de suite. Dans chacun de ces cas, l'état initial est la position dans laquelle se trouvait l'enfant jusqu'au moment où, par un opérateur, cet état a été transformé en un autre état.

On peut jouer à changer les états avec les interrupteurs électriques. Par exemple, l'état de la pièce est « éclairé ». On actionne l'interrupteur : c'est l'opérateur. Ayant actionné l'interrupteur, l'état de la pièce est différent, à savoir « obscur ». Et si on actionne de nouveau l'interrupteur, l'état change encore une fois. Voilà un ensemble de changements très simple. Il n'y a qu'à actionner l'interrupteur. On peut compliquer le jeu avec deux interrupteurs, commandant chacun une lampe différente. On a alors trois sortes de changements – actionner l'un des interrupteurs, actionner l'autre interrupteur, actionner les deux interrupteurs à la fois. On peut même, si on veut, pour compléter le tableau, y inclure l'opérateur qui consiste à n'actionner aucun interrupteur. Mais c'est un peu compliqué, et il ne faut pas aller trop vite. « Ne rien faire » en tant qu'opérateur correspond à zéro dans l'addition et à un dans la multiplication.

Nous avons décrit des jeux de ce genre dans notre II[e] partie. Jouer à prendre un opérateur pour passer d'un état initial à un état final, c'est, si vous voulez, jouer à des jeux état-opérateur-état.

3.2. *Les opérateurs inverses en général*

Après avoir joué à quelques jeux état-opérateur-état, on peut se demander ce qu'il faut faire pour revenir à l'état initial. Par exemple, si on a fait trois pas en avant, que faut-il faire pour se retrouver dans l'état où on était avant l'opération ? Trois pas en arrière, c'est certain. Le déplacement, la transformation, l'opération de faire trois pas en avant sont « annulés » par le mouvement qui consiste à faire trois pas en arrière. De même, deux pas à droite sont annulés par deux pas à gauche, et une intervention sur l'interrupteur est annulée par l'intervention suivante : s'il y avait de la lumière avant qu'on l'actionne, il y en aura de nouveau quand on l'actionnera une seconde fois, et de même si l'obscurité régnait au début, elle régnera encore quand on aura actionné deux fois l'interrupteur. Il n'en est pas tout à fait de même dans le cas des deux pas en avant. Si, après avoir fait deux pas en avant, on en fait encore deux en avant, on ne se trouve nullement ramené au point de départ : on s'en trouve encore plus éloigné, alors que si on veut se retrouver au point de départ, il faut faire deux pas en arrière, c'est-à-dire en sens contraire. Prenons un autre exemple : si on dit « faites demi-tour sur place » deux fois de suite, l'exécutant se retrouve dans sa position initiale ; s'il était face au tableau noir, il est encore face au tableau noir après deux demi-tours. De même, si on retourne un cahier sur son envers, puis si on lui fait faire encore un demi-tour dans le même sens : on est dans le même cas que pour l'interrupteur. On peut jouer ainsi à divers jeux « opérateur-état-opérateur » avec les enfants. On peut, par exemple, reprendre le cahier et voir si on ne peut pas imaginer d'autres mouvements. On peut le faire tourner, en effet, de différentes façons : on peut le basculer en ramenant le haut vers soi (ou en éloignant de soi le bas, ce qui est équivalent), ce qui constitue un premier mouvement ; on peut aussi le faire tourner comme on tourne une page, de droite à gauche (ou de gauche à droite, c'est la même chose), ce qui fait un second mouvement. Si on attache de l'importance au sens dans lequel se trouve le cahier après sa rotation, ces deux mouvements ne sont pas équivalents : dans le premier, la couverture arrière du cahier, où est généralement imprimée une table de multiplication, se retrouve tête-bêche, et la table est à l'envers ; dans le second mouvement, au contraire, elle demeure dans le sens de la lecture. Enfin, on peut faire tourner le cahier à plat sur lui-même sans le soulever de la table, de sorte que le dessus demeure dessus et le dessous en dessous, mais que les inscriptions de la couverture se retrouvent à l'envers :



1 2 3

Il y a donc trois manières de tourner le cahier, et celui-ci peut être dans quatre états différents : recto apparent à l'endroit, verso apparent à l'endroit, verso apparent à l'envers, recto apparent à l'envers. Quant aux transformations, nous en avons considéré trois jusqu'à présent (voir figure). Il y en a une quatrième qui consiste à ne rien faire du tout, qui correspond à l'absence d'action sur l'interrupteur. Il sera intéressant de voir combien d'enfants saisissent que les règles du jeu du cahier sont les mêmes que celles de l'interrupteur.

3.3. *Les opérateurs inverses en arithmétique*

Ayant joué à des jeux qui rétablissent la situation originale, on peut appliquer cette expérience à l'étude des opérations qui rétablissent la situation dans le cas de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division. Par exemple, si on a sur la table un « état-sept » parce qu'on y a mis sept livres, on peut exécuter une opération d'enlèvement d'un ensemble, effectuant par là la soustraction de sept du nombre correspondant ; si on enlève trois livres, c'est-à-dire un sous-ensemble de trois livres appartenant à l'ensemble de sept livres, l'ensemble-différence restant aura la propriété numérique de quatre. Que faut-il faire pour rétablir la situation dans son état initial ? Il est évident qu'il faut remplacer l'ensemble enlevé par un ensemble équivalent quelconque. Si on remplace l'ensemble qui avait été enlevé par un autre ensemble quelconque équivalent à l'ensemble enlevé, on rétablit la situation *arithmétique* dans son état antérieur, même si on n'a pas rétabli la situation matérielle exacte de l'ensemble. En d'autres termes, on aurait pu remettre trois pommes à la place des trois livres. Il y aurait néanmoins un ensemble d'éléments, résultant de la réunion de l'ensemble des quatre livres avec l'ensemble des trois pommes, qui sera équivalent à l'ensemble de sept livres. Ainsi, en ce sens, les opérations de retrancher trois et d'ajouter trois sont des opérations inverses l'une de l'autre. Si on ajoute trois après avoir retranché trois, on se trouve ramené au point de départ. Les maîtres ne se rendent pas toujours compte à quel point c'est peu évident. Il n'est pas immédiatement évident que la soustraction est l'inverse de l'addition, et il n'est pas non plus évident que l'addition est l'inverse de la soustraction. Ces relations, il faut les apprendre, et si on n'a pas prévu cette acquisition, elle peut ne pas intervenir.

Un autre jeu qu'il est essentiel de jouer, c'est celui qui consiste à trouver l'opérateur qui conduit d'un certain état à un autre état. Supposons qu'on ait un état de cinq, et qu'on veuille aboutir à un état de sept, quelle opération faut-il faire ? Ou encore, supposons qu'on ait fait intervenir un opérateur de trois et qu'on soit arrivé à un état de sept, de quel état était-on parti ? On peut, naturellement, combiner additions et soustractions de manière à rendre le jeu plus complexe, et les enfants prennent grand plaisir à compliquer eux-mêmes progressivement ces problèmes.

Pour jouer à ces jeux, on peut concrétiser la situation initiale en disposant un récipient sur la table, destiné à indiquer l'« état » de la table, et mettre dans la main d'un enfant un autre récipient, qui représentera l'« opérateur ». On place un certain nombre d'objets dans le récipient « état » de la table. Quant au récipient « opérateur » il peut servir comme « appareil qui complète » ou comme « appareil qui enlève ». On met un certain nombre de choses dans le « récipient opérateur » puis on fait la réunion de cet ensemble de choses avec l'ensemble de choses qui est sur la table. L'état qui en résulte sur la table est celui qui a été provoqué par l'opérateur qui complète. On peut de même utiliser le « récipient opérateur » pour enlever des sous-ensembles de la table. L'état qui en résulte sur la table est celui qui a été provoqué par l'opération d'enlèvement.

Supposons qu'on ait sur la table un état de 7, c'est-à-dire un ensemble dont la propriété numérique est sept. On peut poser les problèmes suivants :

	État initial		opérateur		second état
(1)	7		+ 3	=	□
(2)	7	+	□	=	10
(3)	10	−	□	=	7
(4)	10	−	7	=	□
(5)	□	−	7	=	3
(6)	□	÷	3	=	7

On pourra ensuite discuter des raisons pour lesquelles les réponses aux problèmes (2), (3) et (4), par exemple, sont constituées par le même nombre, à savoir trois. Si les enfants restent muets, il faut leur procurer de nouvelles expériences de compréhension des propriétés inverses. Ainsi :

État initial 7	Opérateur + 3	
	Second état 10	Opérateur − 3
		Troisième état □
Ou encore État initial 7	Opérateur + 3	
	Second état 10	Opérateur □
		Troisième état 7

Là, il s'agit non seulement de déterminer la valeur de l'opérateur, mais encore son espèce.

Si c'est encore le mutisme, on poussera plus loin les expériences. Par exemple :

État initial	Opérateur			
	□			
	Second état	Opérateur		
	7	+ 3		
			=	Troisième état
				10

Ces exercices finissent toujours par faire découvrir que l'addition et la soustraction sont inverses l'une de l'autre.

3.4. *Combinaison des opérateurs. Propriété associative*

Naturellement, on peut allonger les « chaînes » ci-dessus, et augmenter le nombre des « maillons manquants », ou raccourcir des chaînes plus longues. Par exemple :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	Troisième état	Opérateur	Quatrième état
10	+3	13	−4	9	+2	11

Peut-on « sauter » le second état? Comment peut-on passer du premier état au troisième en n'utilisant *qu'un seul opérateur*? Il est clair que cet opérateur unique sera « ôter 1 » ou « − 1 ». On peut donc raccourcir la chaîne comme suit :

État initial	Opérateur	Etat suivant	Opérateur	État final
10	−1	9	+2	11

Dans cet exercice de raccourcissement, on a remplacé la succession des opérateurs « ajouter trois » et « retrancher quatre » par l'opérateur unique « retrancher un ». Arithmétiquement, on est passé de

$$(10 + 3) - 4 \text{ à } 10 - 1$$

et $+ 3 - 4$ a été remplacé par $- 1$. *Qu'on n'aille surtout pas penser* que nous parlons ici de nombres positifs et de nombres négatifs! Nous ne parlons que d'additions, de soustractions et de leurs interconnexions.

Nous avons, cependant, fait un pas important en avant. Au lieu de combiner des états et des opérateurs et d'obtenir les états qui en résultent, nous avons combiné les opérateurs et obtenu les opérateurs qui en résultent! Avant d'établir ces relations entre opérateurs, il va falloir se servir de la même série d'opérateurs en partant d'états différents. On remarquera qu'une succession d'opérations d'addition et/ ou d'opérations de soustraction équivaut à un seul de ces opérateurs, indépendamment de l'état initial. Par exemple :

« ajouter trois » suivi d'« ajouter quatre » aura *toujours* le même effet que l'opération isolée de

« ajouter sept »

C'est là une situation très différente de celle dans laquelle on prend un état de trois, on opère dessus à l'aide de l'opérateur « ajouter quatre » et on obtient un état de sept. On est passé, en somme des jeux opérateur-état-opérateur à ce qu'on pourrait appeler des jeux

opérateur-opérateur-opérateur

En plus court, on joue à « op − op − op ».

Maintenant que nous avons appris aux enfants à jouer à différents jeux d'addition et de soustraction, il serait peut-être temps de nous occuper des propriétés de ces opérations. Certains d'entre eux se sont peut-être déjà aperçus que l'ordre dans lequel on additionne était sans incidence sur le résultat. Il s'agit de la propriété de *commutativité*. Elle est la conséquence directe de la propriété de commutativité des réunions d'ensembles. La réunion d'un ensemble avec un autre ensemble donne le même ensemble-réunion indépendamment de l'ordre dans lequel on exécute l'opération :

$$\{\square\nabla\} \cup \{\mathrm{O}\} = \{\square\nabla\mathrm{O}\}$$
$$\{\mathrm{O}\} \cup \{\square\nabla\} = \{\square\nabla\mathrm{O}\}$$

De ce fait, la propriété numérique de l'ensemble-réunion ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compte le nombre des éléments des deux ensembles qui sont entrés dans sa composition. On peut faire des exercices sur ce sujet, en posant, par exemple, la question : « Deux et trois, c'est la même chose que trois et quoi? » On voit que l'état et l'opérateur sont interchangeables. Ou encore, on peut demander : « Ajouter cinq et ajouter six, c'est la même chose qu'ajouter six et ajouter quoi? »

Une autre propriété importante, c'est *l'associativité* que possèdent l'addition et la multiplication, mais que ne possèdent ni la soustraction ni la division. Elle est, là encore, la conséquence directe de la propriété d'associativité des réunions, dans le cas de l'addition. Prenons trois ensembles, que nous appellerons A, B et C. La réunion de A et de B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A mis avec l'ensemble des éléments de B, peut être réunie à l'ensemble C. On obtiendra le même ensemble que si on prenait A et qu'on le reunissait à la réunion de B et de C. En notation formelle,

$$\{A \cup B\} \cup C = A \cup \{B \cup C\}$$

Cela étant, il est évident que si, par exemple, le nombre d'éléments de l'ensemble A est de trois, celui de B de quatre et celui de C de cinq, trois plus quatre ajouté à cinq sera égal à trois ajouté à quatre plus cinq, ce que l'on peut exprimer d'une autre manière en disant que sept plus cinq est égal à trois plus neuf. C'est la propriété d'associativité, propriété importante de l'addition. On peut associer les deux premiers nombres, puis ajouter le résultat au troisième ou ajouter au premier le deuxième et le troisième préalablement associés. Au niveau des ensembles, les éléments se trouveront tous réunis dans l'ensemble-réunion et ils consisteront en la totalité des éléments des ensembles réunis. C'est pourquoi l'opération de réunion des ensembles est associative et il en est de même de l'addition.

On peut faire comprendre la propriété associative en jouant à op-op-op avec « raccourcissement des chaînes ». Nous avons vu plus haut que, par exemple, dans la « chaîne » :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	Troisième état	Opérateur	Quatrième état
3	+2	5	+1	6	+4	10

on pouvait court-circuiter le second état comme suit :

État initial	Opérateur	État suivant	Opérateur	État final
3	+3	6	+4	10

Arithmétiquement,
$(3 + 2) + 1$ a été remplacé par $3 + (2 + 1)$, soit $3 + 3$
et dans un cas comme dans l'autre on a abouti à 6.

La soustraction ne bénéficie malheureusement pas d'une situation aussi favorisée. En effet, $(7-5)-1$ est égal à $2 - 1$, ce qui fait 1. Ce n'est pas la même chose que $7 - (5 - 1)$, qui équivaut à $7 - 4$, c'est-à-dire à 3, résultat différent de 1 !

$$(7 - 5) - 1 \neq 7 - (5 - 1)$$

et la soustraction *n'est pas une opération associative*. On ne peut pas grouper n'importe comment les nombres que l'on soustrait les uns des autres... sous peine d'obtenir des résultats différents. Tandis que $(7 + 5) + 1 = 7 + (5 + 1)$.

Mais si la soustraction n'est pas associative, la succession de deux soustractions équivaut quand même à une seule soustraction. Ainsi :

État initial	Opérateur	État suivant	Opérateur	État final
7	−5	2	−1	1

peut être « raccourci » en

État initial	Opérateur	État final
7	−6	1

de sorte que

$$(7 - 5) - 1 = 7 - (5 + 1) = 7 - 6 = 1$$

tandis que

$$(7 - 5) - 1 \neq 7 - (5 - 1).$$

Les propriétés des inverses peuvent aussi être considérées dans l'optique « op-op-op ». Jusqu'à présent, on a parlé d'un opérateur inverse comme d'un opérateur qui, s'il suit le premier opérateur dont il est l'inverse, rétablit l'état initial. Mais on pourrait aussi considérer les propriétés des inverses comme un élément des propriétés des jeux de « raccourcissement de chaînes ». Prenons, par exemple, la chaîne suivante :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	État final
7	−2	5	+2	7

Comment peut-on faire pour passer de l'état initial à l'état final sans passer par le second état ? Soit en ajoutant, soit en retranchant zéro. On obtient ainsi la chaîne raccourcie:

État initial	Opérateur	État final
7	+0	7

et ainsi $-2 + 2$ est remplacé par $+ 0$,
de même $+ 2 - 2$ peut être remplacé par $+ 0$.

Et l'un comme l'autre peuvent être remplacés par $- 0$.

Arithmétiquement parlant, nous avons exécuté le raccourcissement, ou la « simplification »
de $(7 - 2) + 2$ à $7 + 0$ et enfin à 7

L'application consécutive d'un opérateur et de son inverse est équivalente à l'application de l'élément neutre. Voilà une vue pénétrante dont on pourra aussi favoriser l'acquisition par l'emploi d'autres états et d'autres opérateurs, tels que positions et mouvements dans la classe, allumage et extinction de la lumière, et ainsi de suite. Par exemple, un pas en avant, suivi de son inverse — un pas en arrière — équivaut à « rester sur place », qui constitue, dans ce jeu, l'opération neutre. Appuyer sur le bouton, puis appuyer sur le même bouton (cet opérateur étant son propre inverse)[1] équivaut à « ne pas toucher l'interrupteur », ce qui est encore un opérateur neutre.

Les propriétés des opérateurs ci-dessus sont extrêmement importantes, et il est indispensable de les faire acquérir aux enfants dès qu'ils sont prêts à ce genre de compréhension analytique.

Une autre propriété de l'addition a rapport au zéro. Si, à un nombre quelconque,on ajoute zéro, on obtient un total qui est égal à ce nombre. Par exemple :

$$7+0=7 \qquad 6+0=6 \qquad 0+2=2$$

1. Interrupteur-lumière à télécommande. Ou encore, interrupteur tournant à sens unique de rotation.

Cela étant, il est évident que si, par exemple, le nombre d'éléments de l'ensemble A est de trois, celui de B de quatre et celui de C de cinq, trois plus quatre ajouté à cinq sera égal à trois ajouté à quatre plus cinq, ce que l'on peut exprimer d'une autre manière en disant que sept plus cinq est égal à trois plus neuf. C'est la propriété d'associativité, propriété importante de l'addition. On peut associer les deux premiers nombres, puis ajouter le résultat au troisième ou ajouter au premier le deuxième et le troisième préalablement associés. Au niveau des ensembles, les éléments se trouveront tous réunis dans l'ensemble-réunion et ils consisteront en la totalité des éléments des ensembles réunis. C'est pourquoi l'opération de réunion des ensembles est associative et il en est de même de l'addition.

On peut faire comprendre la propriété associative en jouant à op-op-op avec « raccourcissement des chaînes ». Nous avons vu plus haut que, par exemple, dans la « chaîne » :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	Troisième état	Opérateur	Quatrième état
3	+2	5	+1	6	+4	10

on pouvait court-circuiter le second état comme suit :

État initial	Opérateur	État suivant	Opérateur	État final
3	+3	6	+4	10

Arithmétiquement,
$(3 + 2) + 1$ a été remplacé par $3 + (2 + 1)$, soit $3 + 3$
et dans un cas comme dans l'autre on a abouti à 6.

La soustraction ne bénéficie malheureusement pas d'une situation aussi favorisée. En effet, $(7-5) - 1$ est égal à $2 - 1$, ce qui fait 1. Ce n'est pas la même chose que $7 - (5 - 1)$, qui équivaut à $7 - 4$, c'est-à-dire à 3, résultat différent de 1 !

$$(7 - 5) - 1 \neq 7 - (5 - 1)$$

et la soustraction *n'est pas une opération associative.* On ne peut pas grouper n'importe comment les nombres que l'on soustrait les uns des autres... sous peine d'obtenir des résultats différents. Tandis que $(7 + 5) + 1 = 7 + (5 + 1)$.

Mais si la soustraction n'est pas associative, la succession de deux soustractions équivaut quand même à une seule soustraction. Ainsi :

État initial	Opérateur	État suivant	Opérateur	État final
7	−5	2	−1	1

peut être « raccourci » en

État initial	Opérateur	État final
7	−6	1

de sorte que

$(7 - 5) - 1 = 7 - (5 + 1) = 7 - 6 = 1$

tandis que

$(7 - 5) - 1 \neq 7 - (5 - 1)$.

Les propriétés des inverses peuvent aussi être considérées dans l'optique « op-op-op ». Jusqu'à présent, on a parlé d'un opérateur inverse comme d'un opérateur qui, s'il suit le premier opérateur dont il est l'inverse, rétablit l'état initial. Mais on pourrait aussi considérer les propriétés des inverses comme un élément des propriétés des jeux de « raccourcissement de chaînes ». Prenons, par exemple, la chaîne suivante :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	État final
7	−2	5	+2	7

Comment peut-on faire pour passer de l'état initial à l'état final sans passer par le second état ? Soit en ajoutant, soit en retranchant zéro. On obtient ainsi la chaîne raccourcie:

État initial	Opérateur	État final
7	+0	7

et ainsi $- 2 + 2$ est remplacé par $+ 0$,
de même $+ 2 - 2$ peut être remplacé par $+ 0$.
Et l'un comme l'autre peuvent être remplacés par $- 0$.

Arithmétiquement parlant, nous avons exécuté le raccourcissement, ou la « simplification »
de $(7 - 2) + 2$ à $7 + 0$ et enfin à 7

L'application consécutive d'un opérateur et de son inverse est équivalente à l'application de l'élément neutre. Voilà une vue pénétrante dont on pourra aussi favoriser l'acquisition par l'emploi d'autres états et d'autres opérateurs, tels que positions et mouvements dans la classe, allumage et extinction de la lumière, et ainsi de suite. Par exemple, un pas en avant, suivi de son inverse — un pas en arrière — équivaut à « rester sur place », qui constitue, dans ce jeu, l'opération neutre. Appuyer sur le bouton, puis appuyer sur le même bouton (cet opérateur étant son propre inverse)[1] équivaut à « ne pas toucher l'interrupteur », ce qui est encore un opérateur neutre.

Les propriétés des opérateurs ci-dessus sont extrêmement importantes, et il est indispensable de les faire acquérir aux enfants dès qu'ils sont prêts à ce genre de compréhension analytique.

Une autre propriété de l'addition a rapport au zéro. Si, à un nombre quelconque, on ajoute zéro, on obtient un total qui est égal à ce nombre. Par exemple :

$$7+0=7 \qquad 6+0=6 \qquad 0+2=2$$

1. Interrupteur-lumière à télécommande. Ou encore, interrupteur tournant à sens unique de rotation.

C'est là un cas particulier d'un fait important, encore qu'évident, à savoir que si l'on applique l'opérateur neutre, après avoir exécuté un certain mouvement, l'effet total est le même que si on avait exécuté uniquement ce mouvement. Si on agit sur l'interrupteur, et qu'ensuite on n'y fait rien, l'effet est le même que si on s'est contenté d'agir une fois sur l'interrupteur. Il *nous faut obligatoirement* un opérateur ayant un tel effet, c'est-à-dire sans aucun effet, afin de mettre de l'ordre dans la situation des inverses. Toute succession d'opérateurs sera toujours équivalente à un opérateur unique (tout au moins dans le genre de jeux que nous jouons actuellement), de sorte qu'il nous faut, dans notre jeu, un opérateur équivalent à un opérateur suivi de son inverse.

Il ne servirait à rien de faire répéter ces choses mécaniquement aux enfants, dans l'espoir qu'ils en acquièrent la compréhension intime. En particulier, des choses dans le genre de « zéro plus zéro égale zéro ». La compréhension de telles relations est le résultat d'un effort de pensée qui se situe à un niveau très élevé, et il est absolument sans objet de les faire répéter par cœur, comme des slogans publicitaires. Les relations qui existent entre zéro et les autres éléments, dans le domaine de l'addition, sont la conséquence des propriétés de l'ensemble vide. Si l'on réunit un ensemble quelconque avec l'ensemble vide, la réunion qui en résulte n'est autre que l'ensemble dont on est parti. Et c'est pour cela que la propriété numérique demeure, elle aussi, inchangée quand on ajoute le nombre zéro.

Les propriétés d'associativité et de commutativité caractérisent également la multiplication. Mais elles sont plus difficiles à saisir dans les débuts. Aussi vaut-il mieux laisser pour plus tard les expériences qui conduisent à leur compréhension.

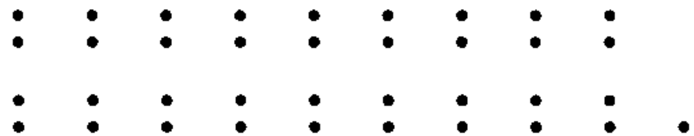
4. LES PUISSANCES ET LEUR NOTATION

4.1. *Introduction aux puissances*

Il arrive un jour où les enfants éprouvent le besoin de communiquer aux autres des nombres relativement importants. Ils veulent se dire combien il y avait d'habitants dans la ville où ils ont passé leurs vacances. Ils ont peut-être vu, dans le journal, des groupes de chiffres assez importants. Ils ont rencontré des centaines, des milliers, des dizaines de milliers, des millions. Ils entendent parler de voyages dans la lune et de distances astronomiques. Ils veulent savoir de quoi il s'agit et pour cela il leur faut se familiariser avec ce qu'on appelle en arithmétique la notation – ou la valeur – de position. Le système de la valeur de position a pour fondement le comptage de groupes ou ensembles de différentes dimensions, ces divers groupes contenant chacun des éléments en nombres (centaines, milliers) qui sont des puissances de la base choisie, dix en numération décimale. Quand nous comptons des objets, nous les comptons soit individuellement, soit

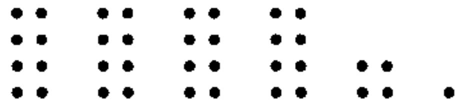
par dizaines s'il y en a plus de dix, soit par centaines s'il y en a plus de cent, soit par milliers s'il y en a plus de mille, et ainsi de suite.

On voit que la notion de puissance est inhérente à celle d'une notation fondée sur la valeur positionnelle. Une notion mathématique comme celle de puissance s'acquiert très facilement quand on manipule toutes les variables qui s'y trouvent contenues. Quelles sont ces variables ? Prenons la puissance trois de dix (10^3). L'une de ces variables, qui a pour valeur trois, est connue sous le nom d'exposant. L'autre variable, qui a ici pour valeur dix, est le nombre de base. Aussi, pour faire acquérir aux enfants la notion de puissances faut-il leur fournir des expériences variées, dans différentes bases formées avec divers exposants. En d'autres termes, il va falloir qu'ils prennent contact avec des ensembles d'objets ayant pour propriétés numériques 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc..., c'est-à-dire des puissances de 2, ou 3, 9, 27, 81, etc..., c'est-à-dire des puissances de 3, ou 4, 16, 64, etc..., c'est-à-dire des puissances de 4, et ainsi de suite. C'est beaucoup plus facile qu'on ne l'imagine en général. Tout ce qu'il y a à faire, c'est de jouer des *jeux de groupement*, avec tout ce qui tombe sous la main. Ce peut être des cailloux, des capsules de bouteilles, des allumettes ou les enfants eux-mêmes. Par exemple, on prend les enfants et on les groupe en puissances de deux. Admettons qu'il y en ait trente-sept dans la classe. On peut alors commencer par les répartir par paires, ce qui fait dix-huit paires et un enfant isolé



Puis on groupe les dix-huit paires en neuf ensembles de quatre

Ensuite, on peut grouper le plus possible de ces ensembles en ensembles de huit, ce qui fait quatre ensembles de huit, un ensemble de quatre et un isolé



Naturellement, on peut transformer les quatre ensembles de huit en deux ensembles de seize, les deux ensembles de seize en un ensemble de trente deux, de sorte que, finalement, on a un ensemble de trente deux, aucun ensemble de seize, aucun ensemble de huit, un ensemble de quatre, aucun ensemble de deux et un enfant isolé, ce que l'on peut noter comme suit :

1 0 0 1 0 1

Le premier 1 représente un ensemble à la puissance cinq, le zéro qui suit signifie qu'il n'y a aucun ensemble à la puissance quatre (aucun groupe de 16), le zéro suivant indique qu'il n'y a aucun ensemble à la puissance trois (aucun groupe de 8), le 1 suivant représente un ensemble à la puissance 2 (un groupe de 4), le zéro rappelle qu'il n'y a aucun groupe à la puissance un, aucun groupe de 2 et, enfin, le dernier 1 se rapporte à un enfant isolé qui ne fait partie d'aucun groupe. Voilà un nombre exprimé en numération binaire ; 1 0 0 1 0 1 désigne le même nombre que 37 et les deux notations se réfèrent au nombre d'enfants de la classe, à cette différence près que dans un cas on a groupé les enfants par puissances de deux tandis que dans l'autre cas on les a groupés par puissances de dix.

On pourrait tout aussi bien grouper les enfants en ensembles dont les propriétés numériques seraient des puissances de trois : douze groupes de trois et un isolé, puis quatre groupes de neuf et un isolé, puis un groupe de vingt-sept, un groupe de neuf et un isolé. Finalement, l'opération serait notée 1 1 0 1. Le premier 1 indique qu'il y a un groupe à la troisième puissance, à savoir vingt-sept qui est la puissance trois de trois, le second 1 marque la présence d'un groupe à la puissance deux, c'est-à-dire un groupe de neuf (trois à la puissance deux), le zéro marque l'absence de tout groupe de trois (trois à la puissance un) et le dernier un désigne un enfant isolé.

Il serait tout aussi facile de faire le groupement en puissances de quatre, trente-sept enfants étant alors représentés par les chiffres 2 1 1.

Ce serait un exercice très utile que de compter chaque matin tous les enfants dans les différentes bases, en le faisant au moins pour les bases 2, 3, 4 et 5. On peut faire des exercices analogues avec une pile d'objets, en demandant aux enfants d'exprimer combien il y en a dans différentes bases. Par exemple, on leur présente sept jetons. En base deux, cela en fait 1 1 1, c'est-à-dire 1 groupe de quatre, 1 groupe de deux et un isolé. Mais ces mêmes sept jetons se marquent 2 1 en base 3, parce qu'il y a deux groupes de trois et un isolé. En base quatre, le même nombre de jetons s'exprimera 1 3 : un groupe de quatre et trois isolés. En base cinq, ce sera 1 2 : un groupe de cinq et deux isolés. Les enfants s'amuseront beaucoup à compter les chaises, les tables, les crayons de leur plumier ou de leur trousse et même le nombre de pièces de leur porte-monnaie. Ils y deviendront vite experts, et ne trébucheront même pas sur le zéro. Ainsi, dix en base trois s'écrirait 1 0 1, puisqu'il y a un groupe de neuf, aucun groupe de trois et une unité isolée.

Mais, il faut souligner qu'il serait sans intérêt de faire apprendre aux enfants à compter *par cœur* dans différentes bases, si on ne leur procurait pas en même temps les expériences qui leur permettent de comprendre les relations de structure entre comptage, groupement et puissances.

4.2. *Établissement de la notion de succession*

L'une des conditions préalables à une compréhension efficace des nombres est l'association de l'ordre dans lequel les nombres se suivent avec les quantités qu'ils représentent en tant que propriétés des ensembles. Les enfants doivent comprendre que le *suivant* représente toujours *un de plus* et que celui qui représente un de plus est toujours le suivant. Un enfant qui sait compter jusqu'à vingt, trente, voire cent, ne se rend pas toujours bien compte de ce que quinze est un de plus que quatorze ou que trente-trois est un de plus que trente-deux. Il sait juste que c'est le suivant. « Ajouter un » n'a pas encore été associé à l'idée de « suivant » de la série.

Pour aboutir à ce résultat, il faut faire compter de façon concrète. On prend soit des groupes d'objets, soit des pièces de l'ensemble des blocs arithmétiques multibases (blocs M.B.) et on les dispose en ordre. Par exemple, en base trois, on va commencer par faire une série d'ensembles comme suit : (fig. 1), p. 48, 49 :

un premier ensemble d'un objet
un second ensemble de deux objets
un troisième ensemble de trois objets.

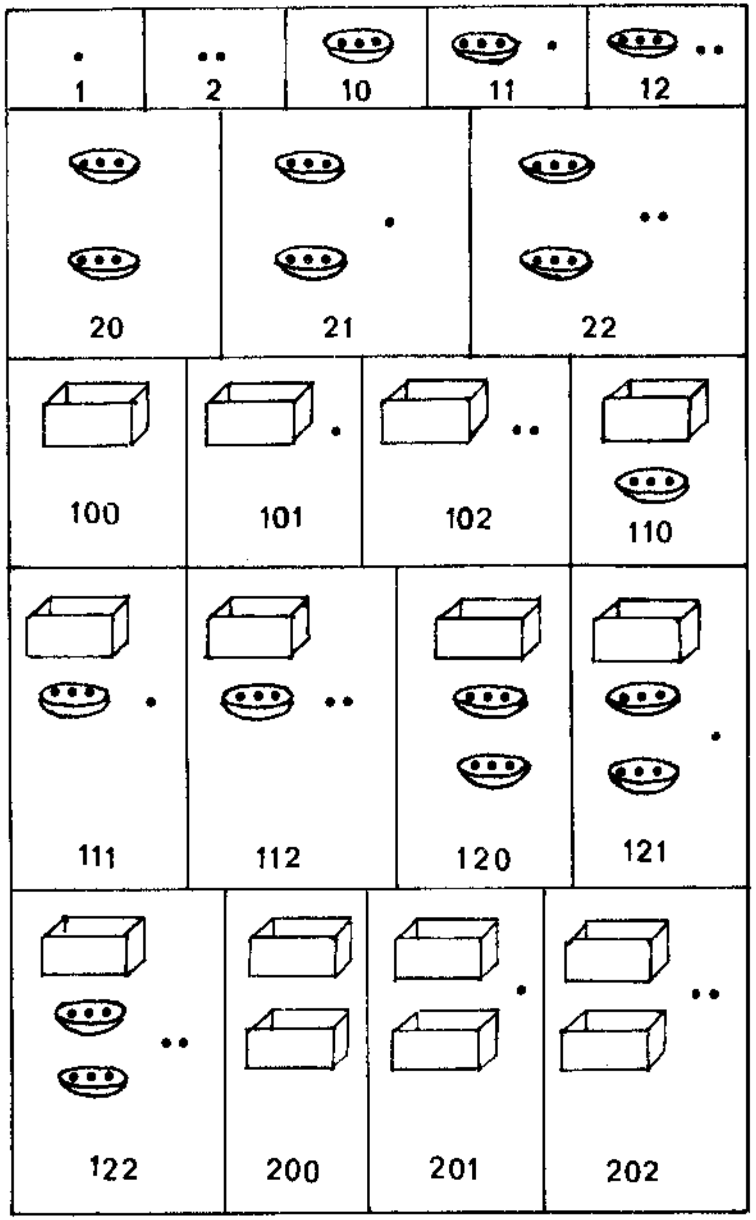
Pour bien marquer qu'il s'agit chaque fois d'un ensemble, on peut, par exemple, prendre de petits objets (allumettes, billes, cailloux, jetons) et les mettre dans une soucoupe, pour indiquer qu'on en a fait un ensemble

le quatrième ensemble sera de trois billes dans une soucoupe et une sur la table
le cinquième ensemble sera de trois billes dans une soucoupe et deux billes sur la table

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on à arrive à trois soucoupes pleines de billes (trois billes chacune). On met alors ces neuf billes dans un récipient différent et plus grand, par exemple une boîte à craie. On construit alors la succession d'ensembles :

le dixième avec une boîte et une bille sur la table
le onzième avec une boîte et deux billes
le douzième avec une boîte et une soucoupe de 3 billes
et on continue jusqu'à arriver au...
vingt-sixième, avec deux boîtes de neuf billes, deux soucoupes de trois billes et deux billes.

Si l'on ajoute alors une bille, il faut mettre les trois billes qui sont sur la table dans une soucoupe et les trois soucoupes dans une boîte. On a alors trois boîtes de neuf billes, et il nous faut trouver quelque chose de plus grand pour les mettre dedans, un carton à chaussures par exemple. Chaque récipient est une place réservée à un ensemble dont la propriété numérique est une puissance de la base trois.



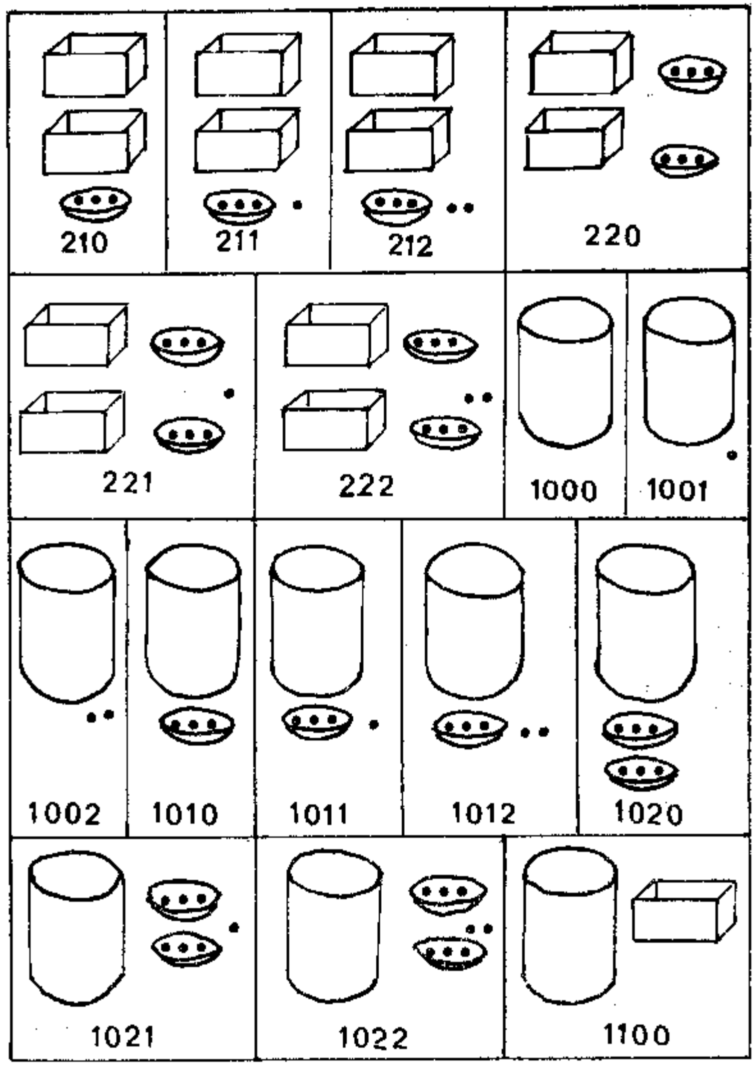


Fig. 1. Exercice de comptage en base 3. On utilise des billes ou des réglettes emboîtables et des récipients divers : la soucoupe reçoit le groupe du premier ordre (3^1), la boîte carrée, le groupe du deuxième ordre (3^2), la boîte cylindrique, le groupe du troisième ordre (3^3).

De la même manière, avec des billes ou des réglettes, il faut compter dans les différentes bases avant d'utiliser le matériel multibase lui-même ; le but de ces exercices est de faire découvrir les concepts de groupement et de groupes de différents ordres, phase préalable du concept de puissance.

4.3. *Encore des bases, encore des matériaux*

Les enfants apprécient beaucoup ce genre d'exercices et il est fréquent qu'ils veuillent changer de base au cours de la même leçon. Parvenus à 1 0 0 0, qui est représenté par la grande boîte contenant vingt-sept billes, ils demandent à compter ces billes en appliquant d'autres règles pour la détermination du nombre de billes à mettre dans les soucoupes et dans les boîtes. Dans le cas des vingt-sept billes, ils vont mettre 24 billes dans six soucoupes de quatre billes chacune et il restera trois billes qui seront sans soucoupe. Puis on redisposera les six soucoupes : le contenu de quatre d'entre elles ira dans une boîte, et il en restera deux avec chacune quatre billes. Ainsi 1 0 0 0, qui exprimait en base 3 la propriété numérique de l'ensemble devient maintenant 1 2 3, qui est une autre manière d'exprimer la propriété numérique du même ensemble. Il est important de bien insister sur le fait que c'est la même propriéte numérique, même si l'on utilise d'autres *chiffres* pour exprimer le même *nombre*. C'est là une acquisition des plus importantes, et l'un des avantages de l'utilisation de différents systèmes de numération pour compter, c'est qu'elle fait voir clairement aux enfants que même s'il y a la même quantité de billes ou de jetons dans la boîte ou dans la pile, ces billes ou ces jetons peuvent être *groupés* différemment. *Selon la manière de les grouper, on donne à la même propriété numérique une appellation numérale différente.*

Avant de pouvoir faire de la multiplication avec les puissances, il faut commencer par apprendre les lois qui régissent les exposants. La méthode généralement utilisée au lycée est la suivante : x^3 n'est que l'abréviation de $x \times x \times x$ et x^4 l'abréviation de $x \times x \times x \times x$ de sorte « que si on multiplie x^3 par x^4, on n'a rien d'autre que $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ que l'on écrit, en abrégé, x^7. Il n'y a qu'à compter les x et « leur nombre constitue l'*exposant* ». A partir de là, on fait apprendre aux élèves que la manière de calculer le produit de deux puissances d'une même base revient à additionner leurs exposants. Mais il est clair que c'est purement mécanique et que cela ne tient aucun compte de la signification de l'opération. On peut faciliter aux enfants de saisir le sens de ces opérations s'ils réalisent la multiplication en manipulant un matériel structuré.

On peut utiliser des billes, des cailloux, tout ce qui tombe sous la main, pour représenter les puissances successives de la base ; alternativement, on peut réaliser un matériel structuré permettant de représenter par une seule pièce, de dimensions appropriées, les ensembles d'objets servant à la constitution des groupes. Supposons, par exemple, qu'on parte d'un cube-unité d'une certaine dimension (1cm de côté). En base 4, on peut assembler 4 de ces cubes de manière qu'ils forment un carré de 4 cm. de côté (et 1 cm d'épaisseur). Chaque fois qu'on a un groupe de quatre cubes-unité, on les remplace par une pièce de $4 \times 4 \times 1$ cm. Chaque fois qu'on a quatre « plaques » de ce genre, on les échange contre une grande plaque de $16 \times 16 \times 1$ cm. Si on se tient ainsi dans un monde à deux dimensions (non compris l'épaisseur), on va bientôt

manquer de place, surtout dans les classes surpeuplées que nous connaissons ! Aussi sera-t-il préférable de se développer dans la troisième dimension et, au lieu de prendre quatre plaques pour en faire une grande à plat, on les empilera les unes sur les autres de manière à obtenir un cube de $4 \times 4 \times 4$ cm contenant 64 cubes-unité, et ainsi de suite. Il existe maintenant dans tous les pays des matériels spéciaux pour les écoles [1]. Il n'est en aucune manière indispensable de les utiliser, mais quand on s'attaque aux opérations plus complexes, comme les multiplications à plusieurs chiffres au multiplicateur, il est très avantageux, pour effectuer matériellement les opérations équivalentes – ce qui aide les enfants les plus lents à acquérir la même compréhension que les enfants mieux doués – de disposer de pièces représentant, d'un seul tenant, chacune des puissances d'une certaine base au lieu d'avoir à les construire chaque fois à partir des unités élémentaires. Cela simplifie les manipulations.

4.4. *Étude des propriétés des puissances*

Nous avons déjà montré que l'étude préalable des puissances, et notamment des propriétés des exposants, est indispensable avant de pouvoir aborder celle des opérations arithmétiques de la multiplication et d'acquérir dans ce domaine une compréhension complète. Nous avons déjà suggéré quelques exercices impliquant la notion de puissance. Ces exercices nécessitent le groupage d'objets en groupes ayant certaines dimensions. Les propriétés numériques de ces groupes doivent être des puissances d'un nombre de base particulier, qui peut être 2, 3, 4, etc. On peut jouer maintes et maintes fois à de tels jeux, en prenant tantôt les enfants, tantôt des objets comme éléments à grouper. Si on se sert de petits objets, on peut mettre les groupes de la première dimension dans des petites boîtes d'allumettes, ceux de la seconde dimension dans des grandes boîtes d'allumettes, ceux de la troisième dimension dans des boîtes à sucre en morceaux, et ainsi de suite. On peut, par exemple, en base 3, collectionner des billes, en mettre dans une petite boîte d'allumettes. Dès qu'il y en a trois, on verse le contenu de la petite boîte dans une grande boîte d'allumettes ; quand trois grandes boîtes d'allumettes sont pleines, on les verse dans une tasse, puis trois tasses dans un bol, et ainsi de suite. Ces divers récipients représentent chacun une puissance du nombre de base, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4… et il n'y a pas de raison, finalement, de ne pas marquer ces notations symboliques sur les récipients correspondants. Il n'y aura plus besoin que les enfants comptent chaque fois laborieusement combien il y a de billes dans chaque boîte, tasse ou bol, d'autant plus qu'ils *sauront* aussi combien il y en a par la manière dont chaque ensemble aura été constitué. Par exemple, dans un récipient de la quatrième

1. Blocs arithmétiques multibases, O.C.D.L., 65, rue Claude-Bernard, Paris V^e.

espèce, il y a 3^4 billes, ce qui s'écrit aussi 10000 et *c'est bien là* le nombre de billes qu'il y a dans ce récipient, mais écrit en numération de base 3, et, en numération ternaire, 10000 représente le même nombre que 81 en numération décimale.

Au lieu de mettre trois billes dans la petite boîte d'allumettes, on peut en mettre quatre, et vider les petites boîtes dans la plus grande quand il y en a quatre, et non plus trois, qui sont pleines, et ainsi de suite. On est alors en numération de base quatre et, par exemple, le nombre de billes de la tasse se représentera par 4^3, puisqu'il est la puissance trois de quatre. On peut tout aussi bien jouer ce jeu avec n'importe quel nombre de base, sauf un. Et même avec un, théoriquement, mais ce serait fastidieux, car il faudrait mettre une bille dans une petite boîte, puis vider la petite boîte dans une plus grande, et ainsi de suite. Il n'y aurait qu'une bille dans chaque récipient et toutes les puissances de 1 sont égales à 1. C'est peut-être un exercice utile à faire plus tard, mais qui est un peu artificiel et qui ne parlera aux enfants que lorsqu'ils auront joué avec les autres nombres de base.

Supposons que nous ayons réalisé plusieurs séries de récipients, chacune selon les puissances d'un certain nombre de base. En base trois, on pourrait avoir par exemple

Isolé	Boîte d'allumettes	Étui à cigarettes	Assiette	Tasse	Casserole	Seau
1	3	9	27	81	243	729
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

le « nombre » de billes étant exprimé, dans la première rangée, en numération décimale, dans la seconde en numération ternaire.

La notation exponentielle serait la suivante :

$$3^0 \quad 3^1 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad 3^4 \quad 3^5 \quad 3^6$$

En base deux, la série serait :

1	2	4	8	16	32	64
1	10	100	1000	10000	100000	1000000
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Comment va-t-on utiliser ce qui précède pour apprendre à multiplier des puissances ? On peut poser une question de ce genre : « Combien de billes y aura-t-il si on en prend autant d'assiettes qu'il y a de billes dans un étui à cigarettes plein ? ». Dans un étui à cigarettes, en base trois, il y a trois boîtes d'allumettes. Dans chaque boîte il y a trois billes. Pour chaque bille de la première boîte d'allumettes, il faut remplir une assiettée de billes. Cela veut dire que pour les billes de la première boîte d'allumettes, on fait trois assiettées, ce qui fait une tasse pleine. Étant donné qu'il y a le contenu de trois boîtes d'allumettes dans un étui à cigarettes plein, on va faire en tout trois tasses pleines de billes, ce qui fait une casserole pleine. Ainsi la réponse à la question est-elle :

« Si on fait autant d'assiettées de billes qu'il y a de billes dans un étui à cigarettes plein, on en a exactement une pleine casserole ». En écrivant ce résultat d'une manière plus classique, on peut dire : « Si on fait 3^2 lots de 3^3 billes, on obtient 3^5 billes. Ou encore, avec plus de concision et de formalisme :

$$3^2 \times 3^3 = 3^5$$

Et maintenant, essayons de faire le problème correspondant avec les récipients de base deux. L'énoncé est encore :
« Combien de billes obtient-on si on en met autant d'assiettées qu'il y a de billes dans un étui à cigarettes plein ? ».

La seule différence, c'est que maintenant on pense à la série des récipients de base deux. En base deux, dans un étui à cigarettes, il y a le contenu de deux boîtes d'allumettes, qui contiennent chacune deux billes. Pour chaque bille, il faut remplir une assiette ; donc, pour une boîte d'allumettes pleine (deux billes) on va faire deux assiettées. Mais deux assiettées font une tasse pleine ; donc pour chaque boîte d'allumettes, on fait une tasse pleine et comme il y a deux boîtes d'allumettes, cela fait deux tasses, donc une casserole pleine de billes. La réponse est donc :
« Si on fait autant d'assiettées de billes qu'il y a de billes dans un étui à cigarettes, on a une casserole pleine de billes ».
On remarquera que la solution de ce second problème est mot pour mot celle du premier. En écrivant la solution d'une manière plus « mathématique » on aurait la phrase :

« Si on fait 2^2 lots de 2^3 billes, on a 2^5 billes, ou encore

$$2^2 \times 2^3 = 2^5$$

Il apparaît que la *règle* pour obtenir le résultat est la même qu'auparavant, bien que le montant du résultat dans le premier problème soit différent du montant du résultat dans le second.

Peu à peu se dégage la notion, quand on exécute une telle « multiplication », que le résultat de la multiplication par le nombre de billes de la boîte d'allumettes est toujours la propriété numérique de l'ensemble des billes contenues dans le récipient qui est au degré au-dessus dans l'échelle, *quelle que soit la base de numération utilisée.*

Par exemple, si on fait autant de contenus de boîtes d'allumettes qu'il y a de billes dans une boîte d'allumettes, on obtient le contenu d'un étui à cigarettes.

Si on fait autant de contenus d'étuis à cigarettes qu'il y a de billes dans une boîte d'allumettes, on obtient le contenu d'une assiette.

Si on fait autant d'assiettées qu'il y a de billes dans une boîte d'allumettes, on obtient le contenu d'une tasse.

Et ainsi de suite.

Chaque « multiplication » conduit d'un récipient au suivant. Exprimées « mathématiquement » ces multiplications peuvent se noter :

$$3^1 \times 3^1 = 3^2$$
$$3^1 \times 3^2 = 3^3$$
$$3^1 \times 3^3 = 3^4$$
$$3^1 \times 3^4 = 3^5$$

expressions dans lesquelles 3^1 n'est jamais qu'un procédé de mathématicien quelque peu « intellectuel » de noter le nombre 3, destiné à rappeler au lecteur, au cas où il l'oublierait, que c'est là la propriété numérique de l'ensemble obtenu après *un groupement*. De même, 3^2 n'est qu'une autre manière d'écrire 9, mais qui rappelle que c'est la propriété numérique d'un ensemble obtenu après *deux groupements*. Il est évident que ces énoncés ne se vérifieraient pas moins si, au lieu de prendre comme nombre de base trois, on avait pris deux, ou tout autre nombre de base. Pour généraliser ce résultat, on peut écrire :

$$b^1 \times b^1 = b^2$$
$$b^1 \times b^2 = b^3$$
$$b^1 \times b^3 = b^4$$

et ainsi de suite, jusqu'à la généralisation complète

$$b^1 \times b^n = b^{n+1}$$

Si on « multiplie » par le nombre de billes contenues dans un étui à cigarettes au lieu d'une boîte d'allumettes, on n'obtient pas le contenu du récipient suivant, mais celui du suivant du suivant. Nous en avons déjà eu un exemple avec

$$3^2 \times 3^3 = 3^5$$

Il est facile de vérifier que toutes les fois qu'on prend autant de contenus d'un même récipient quelconque qu'il y a de billes dans un étui à cigarettes, on « monte » de deux récipients ; si on prend autant de contenus d'un même récipient qu'il y a de billes dans une assiette, on « monte » de trois récipients ; et ainsi de suite. On « monte », en général, d'autant de récipients qu'il faut monter de marches pour passer de la bille isolée au récipient dont la propriété numérique sert de multiplicateur.

Utilisons, par exemple, 5^4 comme multiplicateur et 5^3 comme multiplicande. Bien entendu, nous sommes maintenant en base cinq, et on prend le contenu du récipient de troisième ordre autant de fois

qu'il y a de billes dans le récipient de quatrième ordre. Or, dans ce dernier récipient, il y a

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \text{ billes}$$

C'est le contenu d'une pleine tasse, et chaque tasse contient cinq assiettes, chaque assiette représente cinq étuis à cigarettes, chaque contenu d'étui à cigarettes représente celui de cinq boîtes d'allumettes, qui contiennent chacune cinq billes. Mais nous « multiplions » des assiettes, de sorte qu'il nous faut prendre autant d'assiettées que nous avons de billes, donc $5 \times 5 \times 5 \times 5$ assiettées. Mais 5 assiettées font une pleine tasse, de sorte que 5×5 assiettées font une pleine casserole, et $5 \times 5 \times 5$ assiettées font un plein seau et $5 \times 5 \times 5 \times 5$ assiettées font une pleine caisse de billes (si on verse cinq seaux dans une caisse), et la caisse est un récipient du septième ordre. Ainsi, nous sommes montés du 3^e au 7^e ordre de récipients quand nous avons « multiplié » par la propriété numérique du récipient du 4^e ordre. On voit aussi qu'en fait nous sommes « montés » d'autant de récipients que notre « récipient multiplicateur » est éloigné de la bille unique, à savoir quatre récipients.

Pour nous exprimer d'une manière plus mathématique, supposons que le « récipient-multiplicande » ait la propriété numérique b^r, c'est-à-dire qu'il soit le $r^{\text{ième}}$ récipient de la série b, et supposons que nous voulions « multiplier » par la propriété numérique b^s, c'est-à-dire par le nombre de billes contenu dans le $s^{\text{ième}}$ récipient de la série b : il va falloir réunir autant de lots de b^r billes qu'il y a de billes dans le récipient b^s. Nous savons qu'il nous faut « monter » s récipients à partir de b^r, ce qui donne b^{r+s}. On peut dire que

$$b^s \times b^r = b^{r+s}$$

C'est ce que l'on appelle la *loi des exposants*. L'une des principales difficultés auxquelles on se heurte généralement quand il s'agit de comprendre la signification de cette loi, c'est le manque d'une claire compréhension de ce que chacun des symboles symbolise. Des exercices du genre de ceux que nous avons suggérés avec des séries de récipients organisés à partir de bases différentes permettront de mettre la loi qui précède à la portée de la plupart des enfants. Nous conseillons aux maîtres de « mener l'affaire rondement » quand il s'agira de symboliser les découvertes des enfants à mesure qu'elles se produisent. Il y a, en effet, tout un ensemble de généralisations qui doivent nécessairement intervenir avant que la loi ne soit comprise dans sa totalité. Ces généralisations sont les suivantes :

a) les « lois » fragmentaires découvertes en cours de route s'appliquent quelle que soit la « base » choisie. Il est absolument indispensable, à ce sujet, de donner aux enfants l'occasion d'expérimenter en même temps, ou tout au moins à peu d'intervalle, plusieurs séries de caractéristiques différentes, sinon cette généralisation ne se produira pas.

Si l'enfant n'utilise qu'une seule série, il peut fort bien ne pas se rendre compte que si, en base 3,

$$3^1 \times 3^3 = 3^4$$

en base 4 c'est $4^1 \times 4^3 = 4^4$

ou en base 5 $5^1 \times 5^3 = 5^4$

b) les lois fragmentaires découvertes en cours de route s'appliquent à tous les étages de la série.

Si on ne leur procure pas l'expérience d'une série assez longue, s'il n'y a pas assez de tailles différentes de récipients, la généralisation n'interviendra pas.

c) le nombre de marches qu'il faut « monter » à partir du récipient d'origine que l'on « multiplie » est déterminé exactement par le nombre de marches dont le « récipient multiplicateur » est éloigné de la bille unique à l'origine de la série. Si on ne prend que les deux ou trois premiers degrés de la série des « récipients-multiplicateurs », on risque de priver les enfants de la diversité nécessaire à la généralisation.

Symboliser prématurément au cours de l'une quelconque des étapes ci-dessus, c'est risquer de provoquer dans l'esprit des enfants le blocage complet des concepts qui sont en train de s'y développer. C'est probablement en raison du caractère prématuré et excessif de la symbolisation qui leur a été imposée que tant d'enfants se trouvent empêchés d'acquérir une compréhension approfondie des structures du genre de celles dont nous venons de parler, et même de toutes les structures mathématiques en général. Une fois que le blocage s'est produit, en effet, l'enfant garde l'impression qu'il ne pourra jamais comprendre les mathématiques et qu'il en sera réduit à apprendre par cœur certaines réponses bien déterminées à des questions bien déterminées.

Après avoir joué à des « jeux d'exposants » avec les récipients, les enfants se sentiront plus à l'aise pour exprimer les propriétés numériques des ensembles d'objets dans les différentes bases de numération, y compris, naturellement, la base dix. Par exemple, cent billes peuvent être disposées dans des récipients de base 3 en en mettant quatre-vingt-une dans une tasse, dix-huit dans deux étuis à cigarettes et une, toute seule, sur la table. La désignation numérique, en base trois, de ce nombre de billes sera 1 0 2 0 1. Appelons cette quantité « notre pile ». Si nous recommencions « notre pile » autant de fois qu'il y a de billes dans un étui à cigarettes, combien de récipients de chaque sorte remplirions nous ?

L'étui à cigarettes est à deux degrés de la bille isolée. Le nombre de billes de l'étui à cigarettes constituant notre multiplicateur, chacun des récipients devra être remplacé par le récipient situé deux degrés plus haut. On aura donc

1 seau 2 tasses 1 étui à cigarettes

et l'expression numérique de cette quantité en base 3 est

1 0 2 0 1 0 0

Nous avons multiplié par la seconde puissance du nombre de base, et chaque récipient est « monté de deux degrés » et, naturellement, il en a été de même de l'expression numérique, dont chaque chiffre est monté, lui aussi, de deux degrés, de deux rangs. Tel est le phénomène qui se produit quand on multiplie par la seconde puissance du nombre de base utilisé.

Si nous voulions reproduire notre pile autant de fois qu'il y a de billes dans une assiette, il faudrait que chaque récipient monte de trois degrés, et on aurait, en numération ternaire, 1 0 2 0 1 0 0 0 billes. Les mêmes règles s'appliquent dans les mêmes conditions quand on se sert de la numération décimale et qu'on multiplie par cent ou par mille. Ces règles ne sont que des cas particuliers de la loi des exposants, qui n'offrent aucune difficulté dès lors que la loi générale a été comprise.

Que va-t-il maintenant se passer si au lieu de multiplier le nombre de billes de notre tas par le nombre de billes contenu dans un étui à cigarettes, nous voulons le multiplier par le nombre de billes de deux étuis à cigarettes ? Il est évident qu'il y aura deux fois plus de billes, c'est-à-dire :

2 seaux, 4 tasses, 2 étuis à cigarettes. Mais 4 tasses font 1 casserole et 1 tasse, de sorte qu'en définitive on a

2 seaux, 1 casserole, 1 tasse et 2 étuis à cigarettes, ou encore, en numération ternaire :

2 1 1 0 2 0 0 billes

qui représentent autant de fois 1 0 2 0 1 billes qu'il y a de billes dans deux étuis à cigarettes.

Ces exercices ont pour but de fournir aux élèves les *expériences* à partir desquelles ils pourront comprendre dans le détail les processus de la multiplication tels qu'on les effectue habituellement, serait-ce au détriment de l'élégance et de la beauté des structures dont les propriétés rendent les calculs possibles.

Les exemples qui viennent d'être donnés ci-dessus, ce n'est pas en premier lieu aux enfants qu'ils sont destinés, mais aux maîtres, pour leur montrer les raisons pour lesquelles la compréhension des propriétés des puissances est nécessaire très tôt : c'est par elle que passe la compréhension complète de tous les processus arithmétiques rencontrés plus tard.

5. CLASSES D'ÉQUIVALENCE ET OPERATIONS ARITHMÉTIQUES

5.1. *Échanges de quantités équivalentes de matériel*

Supposons un ensemble d'objets. On peut les grouper en sous-ensembles de différentes dimensions selon les puissances d'un nombre de base donné. On n'est pas obligé, pour autant, d'aller jusqu'au bout en formant tous les sous-ensembles possibles. Ainsi, supposons qu'on ait un ensemble de 416 objets et qu'on décide de les grouper, en base 4, comme ceci :

5 sous-ensembles du troisième ordre, 4 sous-ensembles du second ordre, 6 sous-ensembles du premier ordre et 8 objets isolés.

En langage mathématique, nous avons « compté » :

$5 \times 4^3 + 4 \times 4^2 + 6 \times 4^1 + 8$

Naturellement, nous aurions pu constituer plus de sous-ensembles d'un ordre supérieur. Par exemple, les huit objets isolés auraient pu être groupés en deux sous-ensembles du premier ordre, ce qui aurait donné l'arrangement suivant :

5 sous-ensembles du troisième ordre, 4 sous-ensembles du second ordre, 8 sous-ensembles du premier ordre.

En fait, l'ensemble de tous les éléments ainsi regroupés serait le même que l'ensemble d'origine. On pourrait, même, avoir remplacé certains éléments par d'autres ; on n'aurait, certes, plus le même ensemble, mais, à condition d'avoir exécuté les remplacements nombre pour nombre, on aurait encore un ensemble numériquement équivalent. Il existe, bien entendu, de nombreuses manières possibles de regrouper les éléments de notre ensemble. Par exemple, les huit sous-ensembles du premier ordre donneraient deux sous-ensembles du second ordre, et nous aurions le groupement :

5 sous-ensembles du 3ème ordre, 6 sous-ensembles du 2ème ordre. Quatre des six sous-ensembles du second ordre pourraient être regroupés en un sous-ensemble du 3ème ordre, ce qui donnerait :

6 sous-ensembles du 3ème ordre et 2 sous-ensembles du 2ème ordre et, bien entendu, les six sous-ensembles du troisième ordre pourraient à leur tour être regroupés en un sous-ensemble du quatrième ordre et deux sous-ensembles du troisième ordre, de sorte qu'en définitive nous aurions un ensemble équivalent arrangé comme suit :

1 sous-ensemble du 4ème ordre, 2 sous-ensembles du 3ème ordre et 2 sous-ensembles du 2ème ordre.

C'est cette dernière disposition qui est la plus « économique », car c'est celle qui comporte le plus petit nombre possible de sous-ensembles. C'est la disposition classique.

Si, au lieu de grouper des sous-ensembles d'objets, nous avions décidé de recourir à des objets uniques représentant chacun un de ces sous-ensembles, les opérations que nous venons de décrire, au lieu de s'analyser en opérations de regroupement d'objets de mêmes dimensions en groupes de dimensions différentes, se seraient analysées en opérations d'*échanges* d'un certain nombre d'objets contre des objets de plus grandes dimensions, ou d'objets de grandes dimensions contre un certain nombre d'objets de plus petites dimensions représentant la même quantité totale de matière. Le mot « équivalent » que nous

avons employé quelques lignes plus haut à propos de l'ensemble n'aurait plus alors le même sens : il ne s'agirait plus d'équivalence *numérique*, puisque le *nombre* d'objets ne serait plus le même, mais d'équivalence en quantité de matière, poids ou volume. Supposons, par exemple, que les objets de notre ensemble soient des petits carrés découpés dans du carton. Nous les avions groupés, à l'origine, en

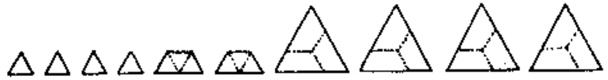
5 sous-ensembles du 3ème ordre, 4 sous-ensembles du 2ème ordre, 6 sous-ensembles du premier ordre et 8 carrés isolés.

Il est évident qu'un sous-ensemble du premier ordre, au lieu d'être formé de quatre petits carrés, peut être représenté par un carré quatre fois plus grand, formé de quatre petits carrés unitaires. Appelons le « carré du premier ordre ». Il est clair qu'on peut assembler quatre carrés du premier ordre en un carré unique, quatre fois plus grand, qu'on appellera carré du second ordre. De même quatre carrés du second ordre peuvent en former un du troisième ordre, et ainsi de suite. Chaque fois, on réalise le carré par découpage dans une feuille de carton, de plus en plus grande et, finalement, au lieu d'avoir des « sous-ensembles », on a des objets uniques, de diverses dimensions. Dans ce cas, la manière la plus « économique » de grouper nos 416 petits carrés consiste à avoir :

un carré du quatrième ordre, deux carrés du troisième ordre et deux carrés du second ordre.

Il est clair qu'en procédant à ces échanges, il y a une caractéristique qui n'a pas été modifiée, c'est l'aire totale de carton, et les deux ensembles sont équivalents quant à la surface de carton utilisée.

Voici quelques exemples d'arrangements équivalents dans différentes bases :



est équivalent à

qui est encore équivalent à

qui est encore équivalent à

cette dernière disposition étant la plus « économique » en ce que c'est celle qui contient le plus petit nombre possible de pièces séparées. Elle contient en effet

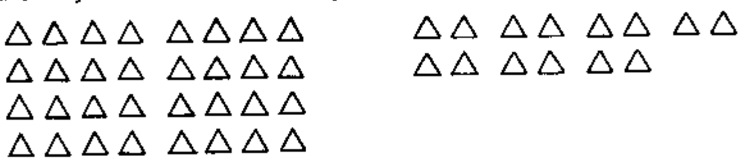
1 pièce du 3ème ordre, 2 pièces du 2ème ordre et 1 objet isolé, soit

si on n'a pas échangé les triangles d'origine contre des pièces équivalentes d'un ordre supérieur. Bien entendu, il est absolument inutile de disposer tous les petits triangles selon l'ordre figuré ci-dessus, ni, d'ailleurs, dans un ordre quelconque : on peut tout aussi bien les mettre en piles, ou les entasser dans des soucoupes ou des boîtes, comme nous l'avons indiqué plus haut.

est équivalent à

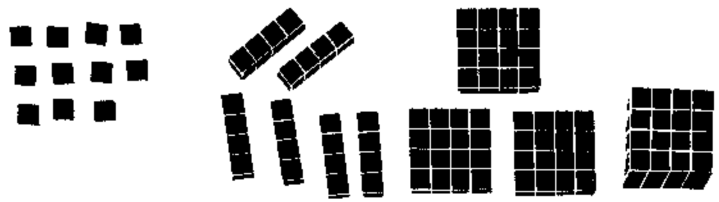
qui est lui-même équivalent à

cette dernière disposition étant en définitive la plus « économique ». On aurait pu, tout aussi bien, disposer les petits triangles comme ci-dessous, sans faire aucun échange :



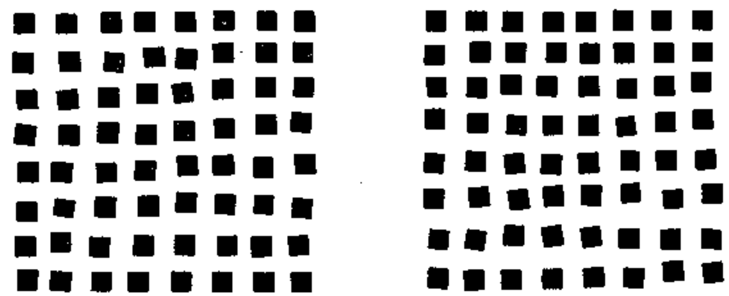
Deux arrangements d'objets sont équivalents s'ils se composent du même nombre d'objets, bien que regroupés en sous-ensembles de dimensions différentes. On peut même dire de ces arrangements qu'ils sont équivalents si certains objets sont remplacés par d'autres objets, du moment que tout remplacement se fait toujours objet pour objet, nombre pour nombre. Si nous considérons l'équivalence de cette manière, les objets sont notre « monnaie de pensée », ils sont les éléments de notre ensemble universel. Tout objet, pour ce qui nous intéresse dans cette situation particulière, fait aussi bien l'affaire que n'importe quel autre objet.

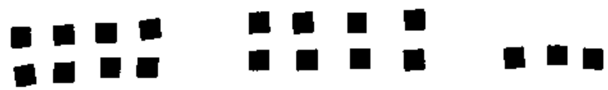
Dans ce cas, on dit d'un sous-ensemble d'objets qu'il appartient à la même *classe d'équivalence* qu'un autre sous-ensemble d'objets, si, et seulement si, le nombre d'objets est le même dans chacun de ces deux sous-ensembles. Dans cette manière d'envisager les choses, les dimensions des objets n'entrent pas en ligne de compte : seul est pris en considération le nombre d'objets de chaque sous-ensemble. Un objet de grandes dimensions compte exactement autant qu'un petit.



est équivalent à

qui est le regroupement le plus « économique ». Mais on aurait pu, naturellement, disposer les cubes comme ceci, par exemple :





sans aucun échange de pièces.

Mais la situation devient différente quand on commence à utiliser des matériaux structurés comme les blocs multibases, car dès lors ce n'est plus au nombre des objets que nous pensons, mais au *volume* occupé par la totalité de ces objets. C'est comme si nos objets avaient été collés ensemble pour en former de plus grands, mais, cette fois, nous décidons de considérer ces objets de plus grandes dimensions comme n'étant pas tout à fait de la même sorte que les objets plus petits. C'est comme si, en quelque sorte, en dépit du collage, nous considérions encore les objets composants comme séparés. Ce n'est jamais là qu'une autre manière de dire que c'est le volume occupé que nous considérons, et non le nombre effectif d'objets de nos ensembles. Par exemple, dans l'assemblage de petits cubes de la figure ci-dessus, nous voyons 147 petits cubes dont le volume total est le même que celui des sept cubes de la figure précédente. Il est évident que 147 objets n'équivalent pas à 7 objets, si on pense « nombre d'objets » mais tout de même les deux ensembles sont équivalents en ce qu'ils occupent le même volume. Il est extrêmement important que les enfants saisissent bien que lorsqu'ils emploient le terme « *équivalent* », il y a quelque chose qui se conserve de l'une à l'autre des deux situations décrites comme équivalentes, mais que ce n'est pas toujours la même chose qui se conserve. Avec les nombres orientés, les fractions, etc., les enfants rencontreront d'autres types d'équivalences, et c'est alors qu'ils tireront tout le profit d'avoir, antérieurement, discuté de ce que signifie une *équivalence*, et d'avoir rencontré sur leur chemin un certain nombre de types différents d'équivalences.

Toute paire quelconque de situations décrites comme équivalentes appartient à la même classe d'équivalence. Quant à savoir si deux situations peuvent, ou ne peuvent pas, être qualifiées d'équivalentes, cela dépend de ce que nous nous estimons autorisés à faire à l'égard de ces situations, c'est-à-dire de la manière dont nous nous permettons de modifier la situation tout en considérant que nous avons toujours affaire à « la même » situation ou à des situations équivalentes. Pour nous en tenir à notre exemple,

(1) dans l'un des cas, nous avons le droit de remplacer tout objet par tout autre objet, de grouper les objets de n'importe quelle manière, et nous disons que nous avons encore une situation équivalente ;

(2) dans l'autre cas, nous avons le droit d'échanger tout objet ou tout sous-ensemble d'objets contre tout autre objet ou sous-ensemble d'objets, du moment que l'échange se fait volume pour volume ; en outre, bien entendu, nous avons le droit de grouper les objets de n'importe quelle manière, et nous disons que nous avons encore une situation équivalente.

Les classes d'équivalence du cas (1) ne sont pas les mêmes que celles du cas (2). Les enfants pourraient inventer d'autres classes d'équivalence, et décider, par exemple, qu'on peut faire n'importe quel échange d'objets du moment que la surface totale demeure la même, ou encore du moment qu'on a toujours le même poids total.

Dans chaque cas, il leur faudrait décider en vertu de quels critères deux situations sont « réellement la même », c'est-à-dire équivalentes. Par exemple, s'ils décidaient que deux situations sont équivalentes quand elles ont la même odeur, ils seraient forcés de convenir qu'il n'est pas facile de se mettre d'accord sur ce qui a « la même odeur ». Autrement dit, l'odeur n'est pas un très bon critère de classement en matière d'équivalences. Tout cela conduirait à des discussions très intéressantes pour les enfants.

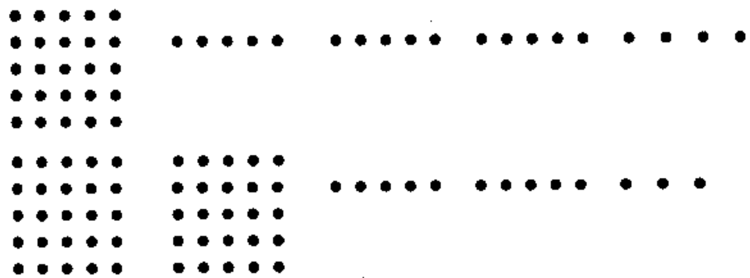
5.2. *Addition*

Nous avons déjà souligné que l'addition est basée sur la réunion des ensembles qui n'ont aucun élément en commun. Pour ce qui est de l'addition en elle-même, peu importe qu'on remplace un ensemble par un autre ensemble qui lui est équivalent. On peut toujours remplacer un ensemble par l'ensemble équivalent du moment que l'on ne s'intéresse qu'à la propriété numérique. Comme nous l'avons vu, la propriété numérique est une propriété de tous les ensembles appartenant à une certaine classe d'équivalence d'ensembles. Il faudra que le maître et les élèves se rendent bien compte de la classe d'équivalence utilisée. Si on se sert d'objets arbitraires, le critère de classification en classe d'équivalence est le nombre d'objets : appartiennent à la même classe tous les ensembles ayant le même nombre d'éléments. Si on se sert de matériel structuré, dans lequel c'est le volume qui représente la quantité, le critère sera la quantité de bois, et seront équivalents tous les ensembles contenant la même quantité, c'est-à-dire le même volume, de bois (ou de tout autre matériau).

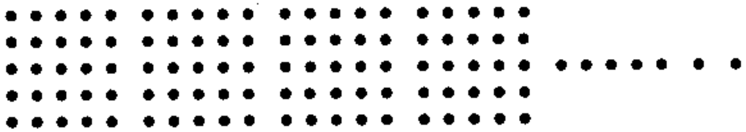
Considérons maintenant la réunion de deux ensembles n'ayant aucun élément commun, et voyons comment on peut passer à la *technique* de calcul de la propriété numérique de la réunion quand on connaît la propriété numérique des ensembles à réunir. C'est ce qu'on appelle l'opération arithmétique de l'addition.

Supposons les ensembles déjà arrangés de la manière la plus économique. S'ils ne le sont pas encore, ce sera chose aisée pour les enfants de faire les regroupements de telle sorte qu'il y ait le plus petit nombre possible de sous-ensembles dans chaque ensemble.

Soit les deux ensembles suivants :



On peut réunir ces deux ensembles et en regrouper les éléments de la manière la plus « économique ». On a alors :



La propriété numérique du premier ensemble est 1 3 4 en base 5
La propriété numérique du second ensemble est 2 2 3 en base 5
La propriété numérique de l'ensemble réunion est 4 1 2 (base 5)
Aussi peut-on écrire l'addition correspondante :

$$134 + 223 = 412$$

Dans le processus d'acquisition de la manière d'exécuter l'opération ci-dessus, il semble qu'on doive trouver au moins les éléments suivants :

(1) connaissance de la manière de grouper un ensemble d'objets conformément au groupement-type.
(2) conscience du fait que chaque chiffre, de droite à gauche, représente le nombre d'ensembles d'un certain ordre, les ordres croissant de droite à gauche, et que s'il n'existe aucun ensemble d'un certain ordre, il faut mettre un *zéro* pour indiquer qu'à cet étage il y a un ensemble vide.
(3) connaissance de la manière de former la réunion de deux ensembles n'ayant aucun élément commun.
(4) si on utilise le matériel structuré, il semble qu'il soit, également, nécessaire de savoir jongler efficacement avec les classes d'équivalence, grâce aux « échanges » entre quantités égales de matériel.

Que nos lecteurs soient persuadés que si les « ingrédients » ci-dessus ne sont pas solidement installés chez l'enfant, il ne servira pas à grand chose de lui faire exécuter un grand nombre d'« additions », même par l'intermédiaire de l'emploi de matériel concret le plus « moderne ».

Bien entendu, on utilisera la base dix, tout comme les autres bases, de sorte que, finalement, on aboutira aux techniques arithmétiques classiques, que l'on perfectionnera par la pratique. Mais on verra qu'il faut beaucoup moins de pratique qu'habituellement pour aboutir à une technique efficace quand les principes ont été correctement compris.

5.3. *Addition complémentaire*

Il se présente, dans la vie des enfants, de nombreuses situations où ceux-ci veulent savoir si une chose est plus grande qu'une autre et, en définitive, de combien. En groupant les objets en sous-ensembles d'ordre de plus en plus élevé, la difficulté s'amenuise. Par exemple, prenons l'ensemble

Photo 1. *Intersection : dans l'intersection les enfants qui ont moins de cinq ans (deux garçons et une fille).*

Photo 2. *Établir une correspondance terme à terme entre les signes ronds, étoiles, de différentes couleurs et des perles de différentes formes et couleurs.* *(Photo Jan Dalman)*

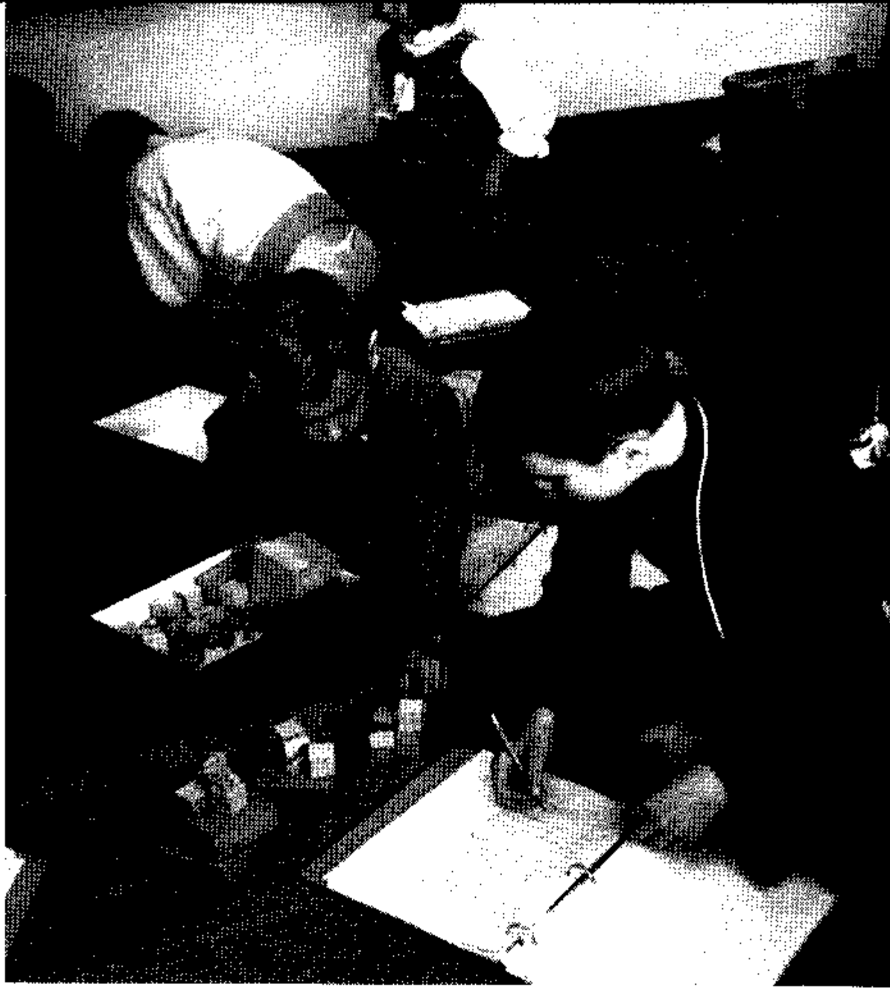
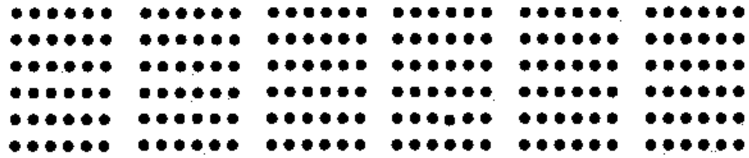
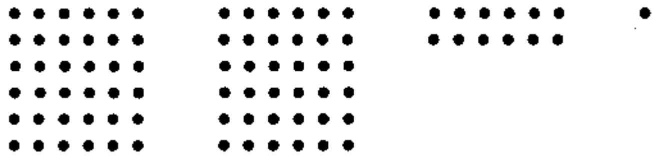


Photo 3. *Addition en base trois allant jusqu'à la sixième puissance de trois* (3^6).



et l'ensemble



En base 6, le premier ensemble a la propriété numérique 1 0 0 0, tandis que le second ensemble a la propriété numérique 2 2 1. Combien d'éléments de plus que le second le premier ensemble comporte-t-il? La plupart des enfants résoudraient ce problème en complétant le second ensemble, c'est-à-dire en y ajoutant des éléments jusqu'à ce qu'il devienne équivalent au premier. Cela signifie que pour rendre le second ensemble équivalent au premier, il faut y ajouter 5 objets isolés, 3 sous-ensembles du premier ordre et 3 sous-ensembles du second ordre. Autrement dit, on aura ajouté, en base six, 3 3 5 objets au second ensemble pour lui donner la même propriété numérique que le premier.

Sous une forme symbolique, on peut poser le problème comme suit :

$$1\,0\,0\,0 = 2\,2\,1 + (\qquad)$$
$$\text{ou } 1\,0\,0\,0 = 2\,2\,1 + N$$

formule dans laquelle N représente le nombre d'éléments qu'il faut ajouter au second ensemble pour le rendre numériquement équivalent au premier, donc le nombre d'éléments que le premier ensemble a en plus par rapport au second. La solution du problème est $N = 3\,3\,5$.

Les enfants sont assez prompts à mettre au point leurs propres techniques de résolution des cas les plus difficiles d'« additions complémentaires ». On peut alors comparer ces techniques entre elles et les discuter en classe avec les enfants qui les ont inventées. Il ne faut pas s'attendre à ce que, dès ce moment, des techniques d'addition complémentaire très efficaces aient été mises au point ; il est préférable de laisser aux enfants le temps de réfléchir au problème sous-jacent et de se faire la main à la résolution progressive des difficultés. Quand ils se seront ainsi essayés, les techniques qui se seront révélées les plus efficaces prendront plus de sens pour eux, et, en outre, ils les apprendront plus vite, car ils en auront mieux compris la portée.

5.4. *Soustraction*

Comme nous l'avons déjà souligné, l'opération arithmétique de la soustraction a pour fondement l'opération qui, dans les opérations sur les ensembles, consiste à chercher l'ensemble-différence entre un ensemble et un de ses sous-ensembles ; tout au moins est-ce là l'expérience de base à partir de laquelle la plupart d'entre nous construisent l'idée de soustraction. Comme auparavant, si nous nous intéressons seulement aux *quantités*, nous pouvons librement échanger les uns contre les autres tous ensembles équivalents, mais, là encore, il faut prendre bien soin d'avoir toujours présent à l'esprit le genre d'équivalence auquel on a recours. Si c'est seulement *combien* on retire qui compte, *ce qu'on retire* n'a aucune importance, du moment que c'est la même quantité. Mais, naturellement, il faut préciser avec clarté en quoi consiste ce *combien :* s'il s'agit de nombres d'objets, de volumes de matériaux, de poids ou de toute autre quantité mesurable qu'on a décidé de prendre comme critère de classe d'équivalence.

Prenons comme critère d'équivalence le *nombre d'objets*, et considérons l'ensemble d'objets suivant, dont chaque objet est représenté par un x :

```
  x x x    x x x    x x x        x x x    x x x
 x x x x  x x x x  x x x x      x x x x  x x x x

 x x x    x x x    x x x    x x x
x x x x  x x x x  x x x x  x x x x        x  x  x  x  x
```

Les éléments de cet ensemble ont été groupés selon les puissances du nombre de base sept. Il y a un sous-ensemble du second ordre, deux sous-ensembles du premier ordre et cinq objets isolés. Cela signifie qu'en comptant nos objets, nous avons trouvé que la propriété numérique de cet ensemble peut, dans la base de numération choisie, s'exprimer par

1 2 5

Supposons que nous voulions trouver l'ensemble-différence résultant de l'enlèvement d'un sous-ensemble de l'ensemble ci-dessus, et supposons que ce sous-ensemble consiste en deux groupes du premier ordre et six objets non groupés, ou isolés. La propriété numérique de ce sous-ensemble, en base sept, est

2 6

Nous retirons 2 6 objets de notre ensemble d'origine, et nous voulons savoir quelle sera la propriété numérique de l'ensemble d'objets restants. Le calcul de cette propriété numérique est connu sous le nom de *soustraction.*

Nous pouvons commencer par enlever deux groupes du premier ordre, ce qui laisse subsister dans le premier ensemble un groupe du second ordre et 5 objets isolés. Mais il y a toujours 6 objets isolés à enlever, c'est-à-dire plus qu'il n'y en a, à l'état isolé, dans le premier ensemble. Force est donc de décomposer un groupe. Or le seul groupe qui reste est un groupe du second ordre : aussi faut-il le scinder de quelque manière. Les enfants se tirent généralement de ce genre de situation de plusieurs façons différentes. Celle qui a le plus de faveur consiste à commencer par laisser intacts les objets isolés et à décomposer le grand groupe, puis de retirer de ce dernier ce qu'on a besoin de retirer. Ce faisant, il reste 6 groupes du premier ordre et 1 objet isolé restant du groupe du second ordre qui vient d'être scindé. Mais, bien entendu, les 5 objets isolés sont encore là, de sorte qu'on reste en présence d'un ensemble dont la propriété numérique, en base sept, s'exprime par

6 6

puisqu'il se compose de 6 groupes du premier ordre et 6 objets isolés.

Certains enfants préfèrent, pour retirer les six objets isolés, commencer par « faire place nette » en se débarrassant des 5 objets isolés, après quoi il ne leur reste plus qu'à retirer un objet isolé du groupe du second ordre restant. Il est clair que le résultat sera le même.

Il est évident qu'il y a bien d'autres manières de résoudre le problème. Par exemple, on peut, manifestement, commencer par retirer les objets isolés, puis retirer les groupes du premier ordre. Si on retire six objets, il faut nécessairement entamer soit un groupe du premier ordre, soit le groupe du second ordre. Dans le premier cas, il ne restera pas assez de groupes du premier ordre pour permettre de retirer les deux groupes du premier ordre du sous-ensemble. Cela signifie qu'au moins un des groupes du premier ordre à retrancher (sinon les deux) devra l'être du groupe du second ordre. Ce qui restera au bout du compte sera enfin regroupé. Il faut souligner que *toutes* ces méthodes de résolution sont *correctes :* les noter comme fausses sur le cahier de l'élève ne peut avoir d'autre résultat que de lui apprendre des idées mathématiquement fausses. Qu'il y ait des manières de procéder plus commodes et d'autres qui le sont moins, c'est une chose que personne ne songe à nier, mais il ne faut pas confondre commodité et vérité ou erreur.

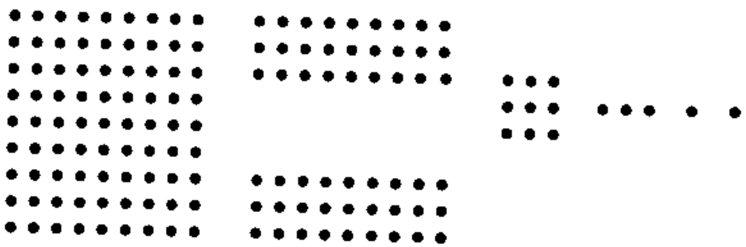
TOUT COMME IL Y A UN GRAND NOMBRE DE MANIÈRES DIFFÉRENTES DE RÉSOUDRE LE PROBLÈME DE LA SOUSTRACTION, il existe un grand nombre de manières de symboliser le processus de la soustraction. Par exemple, on peut suggérer aux enfants de poser

	7^2	7^1	7^0
dans le premier ensemble	1	2	5
retirer		2	6
reste		6	6

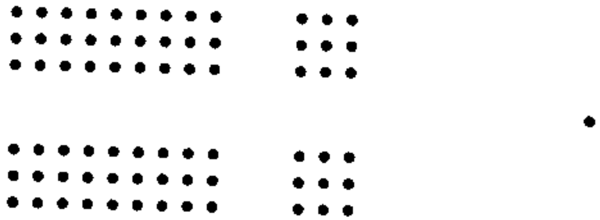
ou, plus simplement : 1 2 5 − 2 6 = 6 6

mais il est préférable d'attendre que les suggestions viennent des enfants : on peut alors les appliquer, les comparer et les discuter.

Il n'y a aucune raison pour ne pas utiliser des groupements d'un ordre plus élevé dès le départ. Par exemple, il ne serait pas trop difficile, pour un enfant qui possède le bagage mathématico-logique nécessaire, de résoudre le problème qui consiste à retirer de l'ensemble suivant (qui, en base trois, se compose de 1 2 1 1 2 objets)



autant d'objets qu'il y en a dans l'ensemble ci-dessous :



ensemble qui compte 2 2 0 1 éléments.

La plupart des enfants, à moins qu'on ne leur ait « fait ingurgiter » la procédure « correcte », s'attaqueront probablement au problème de la manière suivante :

Il est facile de retirer deux groupes du troisième ordre et un objet isolé. Il reste alors 1 groupe du quatrième ordre, 1 groupe du second ordre, 1 groupe du premier ordre et 1 objet isolé ; mais il faut encore retirer 2 groupes du second ordre. On peut les retirer du groupe du quatrième ordre restant : il restera alors de celui-ci 2 groupes du troisième ordre et 1 groupe du second ordre, de sorte qu'il restera, tout compris :

2 groupes du troisième ordre, 2 groupes du second ordre, 1 groupe du premier ordre et un objet isolé.

On a retiré 2 2 0 1 objets de 1 2 1 1 2 objets, et il est resté 2 2 1 1 objets.

On peut donc écrire :

$$12112 - 2201 = 2211$$

ou, peut-être, d'une manière plus complète :

Propriété numérique du premier ensemble	1 2 1 1 2
Propriété numérique du sous-ensemble à retrancher de l'ensemble	2 2 0 1
Propriété numérique de l'ensemble différence	2 2 1 1

Si on utilise le matériel structuré, dans lequel les groupes des différents ordres sont remplacés par des objets uniques, « retirer » est parfois impossible sans remplacer ces objets uniques par des objets équivalents en surface ou en volume. C'est la raison pour laquelle il faut que les enfants soient parfaitement « entraînés » à tranformer des ensembles en ensembles équivalents soit en volume, soit en surface et à faire des regroupements.

Ainsi, aussitôt que le concept de nombre commence à atteindre chez l'enfant le stade où les nombres sont considérés comme des propriétés *permanentes* des ensembles (conservation du nombre), il faut lui présenter des application pratiques de ce concept en cours de développement. Ces applications impliquent soit de compter, soit de mesurer[1].

Les activités destinées à introduire les enfants à la notion de mesure font l'objet de notre 3e fascicule.

1. Les activités de comptage sont décrites en détail dans « La Mathématique moderne dans l'enseignement primaire », O. C. D. L.

Deuxième Partie

LEÇONS ET JEUX CONDUISANT A LA COMPRÉHENSION DES ENSEMBLES ET DES NOMBRES

1.1. *Observations préliminaires*

Cette 2e partie réunit des leçons et des jeux ayant trait à la compréhension des ensembles et des nombres. L'ordre de la présentation devra, dans la mesure du possible, être respecté, mais, en même temps, il faudra se préoccuper des autres aspects de la mathématique enfantine dont il est traité dans les fascicules I et III. En même temps qu'on travaillera sur les ensembles et sur les nombres, on devra songer à la logique, aux exercices de mesure, à la géométrie, etc. A certains moments, il se révélera nécessaire de « marquer le pas » sur un certain aspect jusqu'à ce qu'un autre ait atteint le niveau de développement souhaitable. Par exemple, certains aspects de la logique doivent précéder certains aspects du travail sur les ensembles, de même qu'une certaine compréhension du nombre devra précéder certains exercices de mesure, et ainsi de suite.

Toujours à propos de l'ordre de présentation ici adopté, notons que des enfants plus doués n'auront pas besoin de passer autant de temps sur certaines questions que leurs camarades plus lents ; parfois, ils n'auront pas même besoin de les aborder, le concept en cause étant déjà établi dans leur esprit par les travaux antérieurs. Tout en prenant grand soin de ne pas bousculer les enfants par une hâte excessive, il faut éviter le danger qui consisterait à ennuyer certains par la répétition inutile de leçons déjà comprises. Cependant, comme il y a, dans la plupart des jeux, une possibilité pour les enfants d'en inventer de plus compliqués du même type, c'est dans cette direction qu'il conviendra de pousser les élèves les plus brillants, plutôt que de les orienter vers de nouveaux domaines d'étude.

Étant donné le grand nombre de jeux qui s'offrent au choix du maître, il n'a pas été jugé possible d'exposer chacun en détail, et nous nous sommes contentés de prévoir une assez grand variété de « types de jeux » et d'en expliquer un seul pour chaque catégorie, laissant aux instituteurs la possibilité d'imaginer des centaines d'exemples différents d'application. Quand ils les auront ajoutés aux jeux déjà inventés par les enfants les plus doués, ils souffriront plutôt par excès que par défaut de biens ! Parfois, nous avons même omis toute description, laissant au lecteur le soin de la mise au point, car les conditions varient tellement d'une école à l'autre qu'un développement détaillé serait pratiquement sans objet.

Répétons aussi que ce n'est pas parce qu'on a joué un certain jeu à un certain stade qu'il faut ensuite l'abandonner définitivement. Certains jeux doivent être repris à divers niveaux, à mesure que s'étend l'expérience de l'enfant. Par exemple, il y a des jeux que les enfants joueront avant de savoir compter, ou avant l'introduction des symboles numériques, etc. Il faudra les reprendre par la suite, avec des variantes nécessitées par une meilleure compréhension de la question, mais nous ne les avons pas énoncés à nouveau : c'est au maître de les préparer sous différentes formes et de les réintroduire au moment opportun.

En outre, il y a des cas où les enfants, ayant atteint une meilleure compréhension, désirent revenir sur un jeu et en composer une version compliquée.

* * *

Le terme « ensemble » est difficile à définir, en grande partie parce qu'il n'y a pas de termes plus simples qu'on puisse utiliser pour le faire, mais ce qu'il faut que le maître comprenne, c'est qu'un ensemble n'est rien d'autre qu'un groupe d'objets ou de personnes que l'on considère simultanément. Pour des raisons pratiques, surtout dans les débuts, les éléments de l'ensemble seront souvent rassemblés effectivement, mais ce n'est pas absolument indispensable. Tant qu'on est en mesure de penser à tous les éléments d'un ensemble en même temps l'ensemble est constitué, même lorsqu'il n'est pas possible d'en réunir matériellement les éléments. Les ensembles peuvent être de différentes dimensions, se trouver rassemblés en pensée parce que leurs éléments ont en commun quelque attribut, ou même sans aucune raison spéciale. Il n'y a rien de mystérieux, rien de difficile dans le concept d'*ensemble*, et rien, en tout cas, qui doive effrayer. Quand on aborde les ensembles avec les enfants, il n'y a aucune raison de commencer par expliquer plus ou moins laborieusement ce que c'est qu'un ensemble. Contentons nous d'en faire un mot qui, peu à peu, se glisse dans le langage mathématique à mesure qu'on avance.

1.2. *Introduction de l'ensemble de base ou Univers*

Pour commencer, la maîtresse demande, par exemple, aux enfants sur quoi ils veulent que la leçon porte aujourd'hui, ou encore de quoi on va parler[1]. Il faut les guider un peu, bien sûr, de manière à ne pas se laisser embarquer dans des directions qui n'ont rien à voir avec le but visé, et on en arrivera à des réponses comme : « Si on parlait des enfants » ou « Parlons du mobilier de la classe », et ainsi de suite. L'ensemble des choses dont on va parler ce jour-là, ou pendant cette leçon, s'appellera *l'ensemble de base* ou *l'ensemble universel* ou, simplement, *l'univers*. Si, donc, on a décidé de parler des enfants de la classe, l'ensemble de base sera constitué par les enfants de la classe.

Quel que soit le sujet choisi à un moment quelconque, il y a toujours une limite au domaine dans lequel on prend les objets du discours, et c'est cette limite qui marque l'étendue de l'ensemble de base en question. A l'intérieur de cet univers, les enfants voudront distinguer entre certains objets auxquels ils veulent penser et certains autres auxquels ils ne veulent pas penser pour le moment. Supposons, par exemple, qu'ils décident de parler « des choses pour écrire » en tant qu'ensemble de base. A l'intérieur de cet univers, ils vont peut-être décider de parler de tous les crayons de la classe, qui vont constituer notre ensemble. Puis, à l'intérieur de cet ensemble, ils ne voudront peut-être s'occuper que des « crayons taillés » ou seulement des « crayons rouges », et ainsi de suite. Ces « crayons taillés » ou ces « crayons rouges » seront des sous-ensembles de l'ensemble des crayons. Ainsi se trouveront introduites les notions d'*ensemble* et de *sous-ensemble*.

Supposons, donc, que l'on ait pris comme ensemble de base « toutes les choses qui sont dans la classe et dont on se sert pour écrire » et supposons que, parmi toutes ces choses, on ait décidé de parler des « crayons taillés ». Les « crayons taillés » constituent dès lors l'ensemble. On peut demander aux enfants de présenter un élément quelconque de l'ensemble de base – c'est-à-dire un objet quelconque dont on se sert pour écrire – et voir avec eux s'il fait partie de l'ensemble des crayons taillés. A mesure qu'ils sont présentés, les enfants décident s'il s'agit ou s'il ne s'agit pas d'éléments de cet ensemble. Par exemple, on présente un crayon dont la mine est cassée, et on demande : « Ce crayon fait-il partie, est-il un élément de l'ensemble des crayons taillés ? ». De cette manière, les enfants s'habituent peu à peu à l'idée comme à la terminologie des ensembles.

Naturellement, il se peut que quelqu'un présente une table, ou une chaise. C'est une excellente occasion d'introduire la notion d'*applicabilité* et de *non-applicabilité*, de *significatif* et de *non-significatif*, mais, bien entendu, sans recourir à ces termes. Avec l'aide de la classe, on décide que « ce n'est pas de cela qu'on parle aujourd'hui », que c'est « sans rapport avec la question, » « hors du sujet », que « cela n'a rien à voir avec la question », etc. Évidemment, on peut se servir d'une table pour écrire, mais on n'écrit pas *avec une table*, et, pour le moment, nous ne parlerons ni de tables ni de chaises. Demain, peut-être, ou après la récréation, ou même dans quelques minutes, on parlera du mobilier, et, à ce moment-là, les tables – ou les chaises – pourront constituer un ensemble dans l'univers du mobilier.

Tout compte fait, il est préférable de prendre les enfants comme membres des ensembles. La maîtresse peut peut-être suggérer, si les enfants ne l'ont pas déjà fait, qu'on va parler aujourd'hui des enfants de la classe, ou même des enfants de l'école. Pour commencer, mieux vaut prendre ceux qu'on a sous la main, c'est-à-dire ceux qui sont présents dans la classe. Ainsi prend-on comme ensemble de base

1. Au Cours préparatoire, le choix d'un centre d'intérêt pourra faire en même temps l'objet de la leçon de lecture.

l'ensemble de « tous les enfants qui sont dans la classe ». On peut ensuite décider de constituer un ensemble avec une certaine catégorie d'enfants, par exemple « l'ensemble des garçons » ou l'« ensemble des filles » ou « l'ensemble des enfants qui ont des chaussures noires » et ainsi de suite. Une fois qu'on a décidé de l'ensemble, un enfant, ou la maîtresse, désigne tel ou tel enfant de la classe et demande à toute la classe : « Cet enfant est-il un élément de l'ensemble ? » ou encore : « Cet enfant est-il ou n'est-il pas un élément de l'ensemble ? » En posant la question de la seconde manière, on accoutume les enfants à la fois à l'appartenance et à la non-appartenance à un ensemble. Là aussi, on peut introduire l'inapplicabilité. La maîtresse, par exemple, prend un porte-plume et demande : « Est-ce un membre de l'ensemble ? » ou encore « Ce porte-plume est-il ou n'est il pas un élément de l'ensemble ? » La réponse, naturellement, c'est que le porte-plume n'est ni membre ni non-membre de l'ensemble : il n'a rien à voir avec la question, ce n'est pas de cela qu'on parle.

Bien entendu, on peut former un ensemble avec tous les éléments de l'univers et dans ce cas l'ensemble et l'ensemble de base se confondent. C'est un cas particulier, mais il est possible, et il ne faut pas l'oublier.

En résumé – Ce qu'il est important d'apprendre à partir de ces jeux, c'est :

1. la signification d'« ensemble de base » ou d'« univers » – les choses dont on parle.
2. l'idée d'« ensemble » – qui devra être clairement comprise. Quels sont les éléments de l'ensemble de base qui appartiennent – ou n'appartiennent pas – à l'ensemble.
3. Introduction de l'idée de sous-ensemble.
4. Idée d'applicabilité et de non-applicabilité. Si on parle d'enfants, les crayons n'ont rien à voir avec la question, et si on parle d'instruments pour écrire, les enfants n'ont rien à voir avec la question.

1.3. *Appartenance aux ensembles*

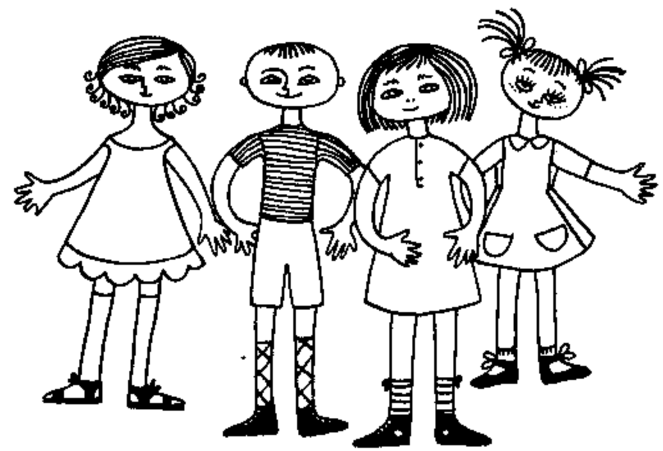
On peut définir un ensemble de deux manières, soit en précisant à quel genre de membres de l'ensemble de base on pense, soit en énumérant, un à un, tous les éléments de cet ensemble. Par exemple, on peut penser à l'ensemble de base des enfants de la classe, et définir comme éléments de notre ensemble « les enfants qui portent du blanc », ou, au contraire, énumérer des enfants un à un, par leur nom : Marie-Claude, Sylvain, Rosine, Catherine, Valérie, Gilles, etc., tous ces enfants étant, en fait, ceux qui portent du blanc.

Pour incorporer ces idées dans un jeu, on pourrait, par exemple, demander à un enfant de la classe de penser à un attribut (par exemple, « avoir les cheveux blonds » ou « porter des chaussures noires »), mais sans l'énoncer, et en se bornant à désigner les enfants qui sont

des éléments de cet ensemble dont on tient l'attribut secret. A la classe de deviner quel est cet attribut caché.

On peut prendre comme ensemble de base celui des blocs logiques. On demande alors à un enfant de penser à un ensemble particulier et

Fig. 2 ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE



Ceci est l'ensemble de {Anne, Jean, Sylvie, Monique}
C'est également l'ensemble de {tous les enfants qui portent des souliers noirs}
Dans ce cas, notre *univers* est formé par tous les enfants de la classe.

d'en mettre tous les éléments en un tas. Supposons qu'il pense aux carrés rouges. Il prend tous les carrés rouges et les met en pile, et ne met que des carrés rouges dans cette pile mais sans dire à quels attributs il a pensé : c'est aux autres enfants de deviner à quelles propriétés il pensait quand il a fait sa pile.

Si la réponse était « rouge », elle serait insuffisante, car s'il est vrai que toutes les pièces présentes sont rouges, il n'en demeure pas moins que certaines pièces rouges sont demeurées en dehors de la pile. De même, si la réponse était « carré », elle serait également inexacte, puisqu'il y a des pièces carrées qui n'ont pas été mises dans la pile.

Il est facile de voir le grand nombre de jeux qui peuvent être imaginés à ce sujet, tant à l'aide des blocs logiques qu'à l'aide de personnes ou de choses diverses. Cependant, il ne faut jamais oublier qu'il y a une autre manière d'indiquer l'appartenance à un ensemble : l'énumération, et il faut aussi la faire pratiquer aux enfants, en veillant, notamment à ce que les choses désignées individuellement n'appartiennent pas nécessairement à la même catégorie ; ainsi, l'ensemble formé par le piano, le bureau de la maîtresse, un crayon, le cochon d'Inde, Alain et Guy.

En résumé – les éléments importants que les enfants devront acquérir au cours de ce genre de jeux sont :

1. La différence entre les deux manières de définir un ensemble – par définition des attributs, par énumération des éléments (définition en compréhension, définition en extension).
2. Le fait que, parfois, ces deux modes de définition peuvent être équivalents. Ainsi, énumérer successivement « les grands carrés épais rouges, les petits carrés épais rouges, les grands carrés minces rouges, les petits carrés minces rouges » équivaut à dire « les carrés rouges », parce que dans un cas comme dans l'autre on a énuméré la totalité des éléments de l'ensemble des carrés rouges, et aucun autre élément de cet ensemble.

1.4. *Sous-ensembles*

Parvenus à ce point, les enfants se seront familiarisés avec l'idée d'ensemble de base, et auront quelques notions sur les ensembles et l'appartenance à un ensemble ; ils auront entendu parler de sous-ensemble, mais ne sauront pas encore grand-chose à ce sujet.

Partons de l'ensemble de base des instruments à écrire de la classe et, dans cet univers, isolons « l'ensemble des crayons ». On aurait naturellement pu choisir n'importe quel autre univers ou on aurait pu, dans l'univers choisi, isoler n'importe quel autre ensemble mais c'est celui des crayons qu'on va prendre pour l'instant.

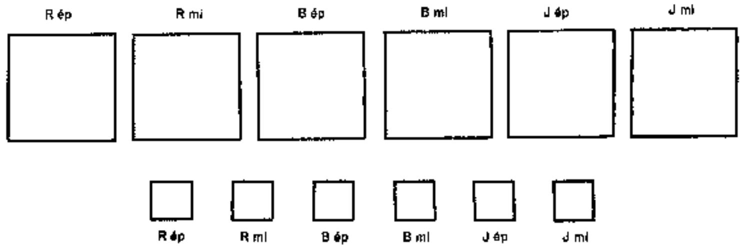
Demandons aux enfants d'extraire de cet « ensemble des crayons » l'ensemble des crayons bien taillés, puis de les remettre en place. Après quoi, on leur fait extraire « l'ensemble des crayons rouges », ou encore « l'ensemble des crayons cassés » ou « l'ensemble des crayons noirs ». Comme on a déjà décidé que ce sont « tous les crayons de la classe » qui constituent l'ensemble, les enfants vont vouloir qu'on leur dise comment appeler « ces petits ensembles à l'intérieur de l'ensemble ». On leur apprendra alors le terme de « sous-ensemble », en leur expliquant qu'un sous-ensemble est inclus dans un ensemble, en fait partie.

Il arrive alors que les enfants les plus éveillés demandent si l'ensemble lui-même n'est pas un sous-ensemble, puisqu'il est inclus dans l'ensemble de base, et c'est vrai, car l'ensemble est toujours un sous-ensemble de l'ensemble de base.

Prenons les blocs logiques. On peut décider que l'ensemble est constitué par « toutes les pièces rouges ». On demande alors à chaque enfant de nommer un sous-ensemble et de le sortir. De l'ensemble des rouges on peut tirer des sous-ensembles tels que « les carrés rouges », « les ronds rouges », « les triangles rouges minces », « les grandes pièces rouges carrées », et ainsi de suite. Pendant ce temps, un autre groupe

peut être en train de travailler avec les pièces bleues, un autre encore avec les jaunes, et ainsi de suite.

Fig. 3 NOTRE UNIVERS EST LA BOÎTE DE BLOCS LOGIQUES



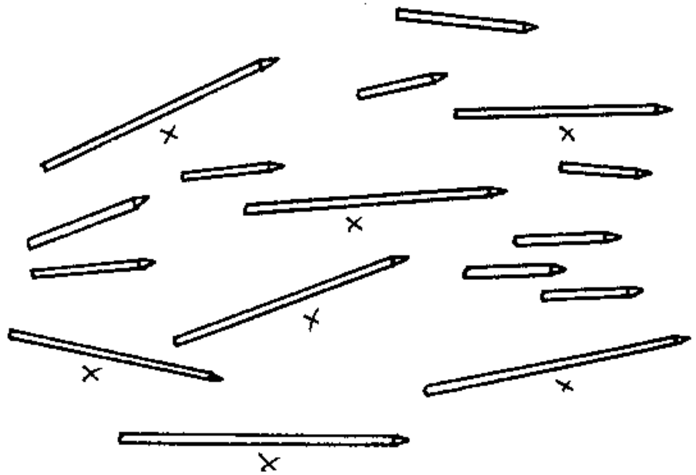
Nous avons choisi comme ensemble tous les blocs carrés. Les six blocs dans la première rangée constituent notre sous-ensemble des grands blocs. Les six blocs dans la deuxième rangée constituent notre sous-ensemble des petits blocs, etc.

Il se peut que les enfants éprouvent déjà un certain sentiment de confusion, puisque « l'ensemble », dans une circonstance donnée, devient « sous-ensemble » dans une autre circonstance, de même que l'« ensemble de base » se change à un autre moment en « ensemble » simple. S'ils posent la question, il faut leur répondre qu'il est tout naturel que cela se produise. Quand on commence à jouer, on décide de ce que sera l'ensemble de base, puisqu'on décide de ce dont on parlera. Aujourd'hui, l'univers, ce peut être la totalité des blocs logiques, mais il se peut que demain on décide de ne parler que des blocs rouges. L'ensemble des blocs rouges, qui était hier notre ensemble, est devenu aujourd'hui ensemble de base. D'un jour à l'autre, d'une heure à l'autre, on a le droit de changer d'univers, pourvu que, dans un même jeu, il demeure constant. Autrement dit, l'ensemble de base choisi pour jouer une certaine partie doit demeurer le même pendant toute cette partie, et il doit en être de même de l'ensemble. A mesure que les enfants avanceront en mathématiques, ils s'apercevront que c'est là une loi que l'on rencontre très souvent.

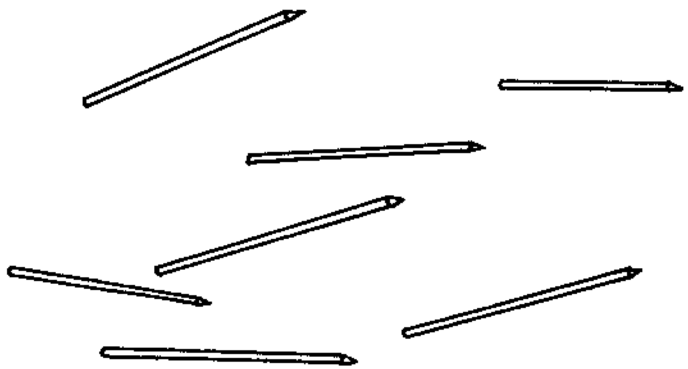
Revenons à nos ensembles et à nos sous-ensembles. Si nous avons choisi notre ensemble en le définissant par des attributs, nous verrons qu'on obtient un sous-ensemble en ajoutant un attribut de plus. Dans notre premier jeu, par exemple, nous avions décidé de prendre comme ensemble de base les instruments servant à écrire, et dans cet ensemble universel nous avions isolé l'ensemble des *crayons*. En ajoutant l'attribut « bien taillés » à notre exigence première que ces instruments fussent des *crayons*, nous avons créé le sous-ensemble des « crayons bien taillés ». Dans le cas des blocs logiques, nous avions choisi les blocs *rouges*. A cet attribut « rouge », nous avions ajouté l'attribut supplémentaire « carré », et avions créé ainsi le sous-ensemble des blocs « rouges carrés ». Il faut encourager les enfants à jouer à ajouter des

Fig. 4 UN SOUS-ENSEMBLE

Notre univers comprend tous les « instruments qui servent à écrire dans la classe ». Voici notre ensemble, il est formé par tous les crayons de l'univers.



Dans notre ensemble nous avons marqué d'une croix tous les crayons longs et nous les dessinons ci-dessous.



Ces crayons longs sont notre sous-ensemble.

attributs et à former des sous-ensembles. Par exemple, nous avons constitué quatre groupes d'enfants, avec chacun un jeu complet de blocs logiques. Chaque groupe isole un ensemble de blocs en choisissant une couleur. On demande ensuite, par exemple, à une fille du groupe qui utilise un « ensemble jaune » « d'ajouter un mot et de prendre pour elle un sous-ensemble ». Si elle dit : « rond », il faut qu'elle sorte tous les ronds jaunes comme sous-ensemble, et ainsi de suite.

De même, nous l'avons vu, il arrive parfois, dans un jeu, que l'ensemble se confonde avec l'ensemble de base, de même il peut se faire, dans un certain jeu, que le sous-ensemble soit le même que l'ensemble. Par exemple, si tous les crayons de la classe sont bien taillés, et s'il n'y en a pas un seul dont la mine est cassée, le sous-ensemble des crayons bien taillés va se confondre avec l'ensemble des crayons. S'il arrive parfois, plus tard, que nous parlions d'un ensemble qui est son propre sous-ensemble, c'est cela que nous voudrons dire.

Ainsi, nous avons vu qu'on peut faire des sous-ensembles en « entassant les attributs », mais il y a d'autres manières de faire des sous-ensembles. Par exemple, si nous avons constitué un ensemble par énumération (Anne-Marie, Françoise, Michel et Jean-Louis) nous pouvons très bien décider qu'Anne-Marie et Michel constitueront un sous-ensemble, ou encore que ce seront Michel, Françoise et Jean-Louis. Si cela se trouve, ces enfants n'ont aucun attribut commun, et il n'y a peut-être pas d'autre moyen d'en faire un sous-ensemble que de les énumérer.

Il faut donner aux enfants de nombreuses occasions de former des ensembles et des sous-ensembles des deux manières – soit en énumérant les éléments d'une certaine sous-section de l'ensemble, soit en « entassant les attributs ». Insistons sur le fait qu'à ce stade ces jeux doivent se jouer avec du matériel concret, que ce sont les enfants eux-mêmes qui doivent souvent être les éléments des ensembles et des sous-ensembles, et qu'en plus des blocs logiques il faut recourir fréquemment à d'autres objets.

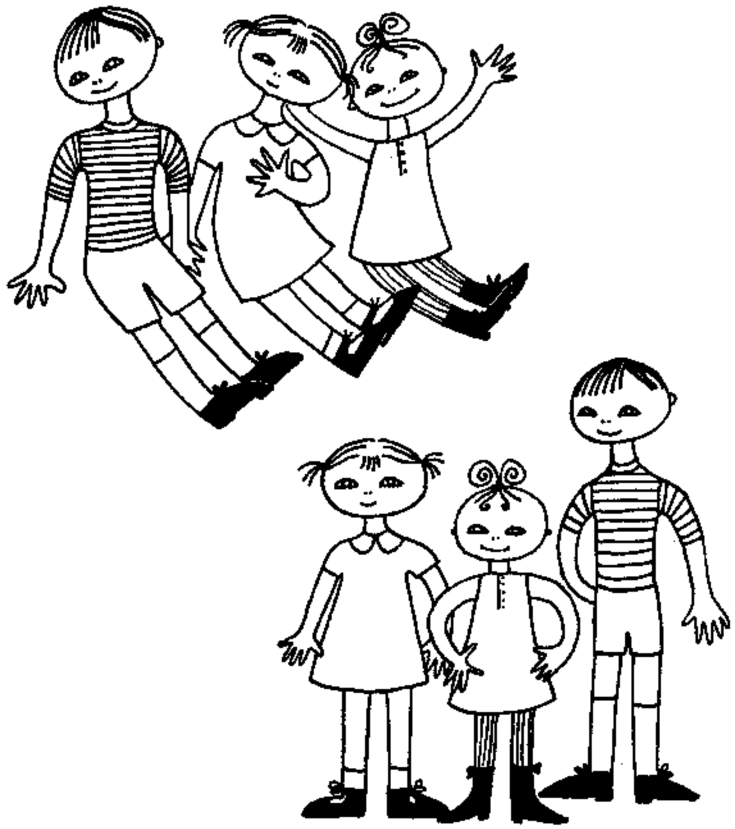
1.5. *Égalité des ensembles*

Nous avons vu déjà qu'il y a au moins deux manières de définir le même ensemble d'éléments de l'ensemble de base, de sorte que deux ensembles peuvent fort bien être égaux tout en ayant été définis par des termes très différents. Rappelons que deux ensembles sont égaux quand ils sont composés exactement des mêmes éléments, et non pas d'élements simplement semblables.

Par exemple, dans un ensemble de blocs logiques, nous pouvons sortir un grand carré rouge épais et un grand carré bleu épais, puis, dans une autre boîte de blocs, prendre également un grand carré rouge épais et un grand carré bleu épais. Pour les enfants, il n'y a pas de différence entre ces deux ensembles, et pourtant ils ne sont pas égaux, puisque leurs éléments sont des morceaux de bois différents. Il faut se rappeler, en effet, qu'il n'y a égalité d'ensembles que lorsque ces ensembles sont constitués des mêmes éléments, que l'égalité concerne ces éléments eux-mêmes, et non les propriétés de ces éléments. Ce qui est égal, entre nos deux ensembles, c'est qu'ils sont tous deux faits de pièces de bois, tous deux composés de pièces carrées, et ainsi de suite, et il ne s'agit là que d'égalité des *attributs*.

L'égalité des ensembles implique une égalité réelle, matérielle, essentielle, une *identité* des éléments de ces ensembles, et la seule manière de « modifier » ces éléments, c'est de les changer de place. Par exemple si un ensemble est composé de deux objets A et B, il est égal à lui-même lorsqu'on met l'objet B avant l'objet A, ou si on prend ces deux objets, qui étaient sur la table, et si on les met dessous, ou si on

Fig. 5 ÉGALITÉ DES ENSEMBLES



Ces trois enfants sont les seuls de notre classe qui portent des souliers noirs. Nous pouvons donc dire que l'ensemble {Jean-Louis, Valérie, Catherine} est égal à l'ensemble {enfants portant des souliers noirs}.
Nous pouvons également dire que l'ensemble {Jean-Louis, Valérie, Catherine} est égal à l'ensemble {Valérie, Catherine, Jean-Louis} et ainsi de suite.

… 4. *…xercice de comptage en base 4.*
« … demande si c'est la pièce suivante. »
… croissent par une barre à la fois. Chaque fois quatre pièces semblables forment une pile, on … pour une pièce plus grande ayant le volume équivalent à celui des quatre pièces semblables … ensembles.
… ici que la pièce qui suit un cube n'est pas formée par deux cubes mais par un cube et … l'enfant est sur le point de découvrir son erreur.

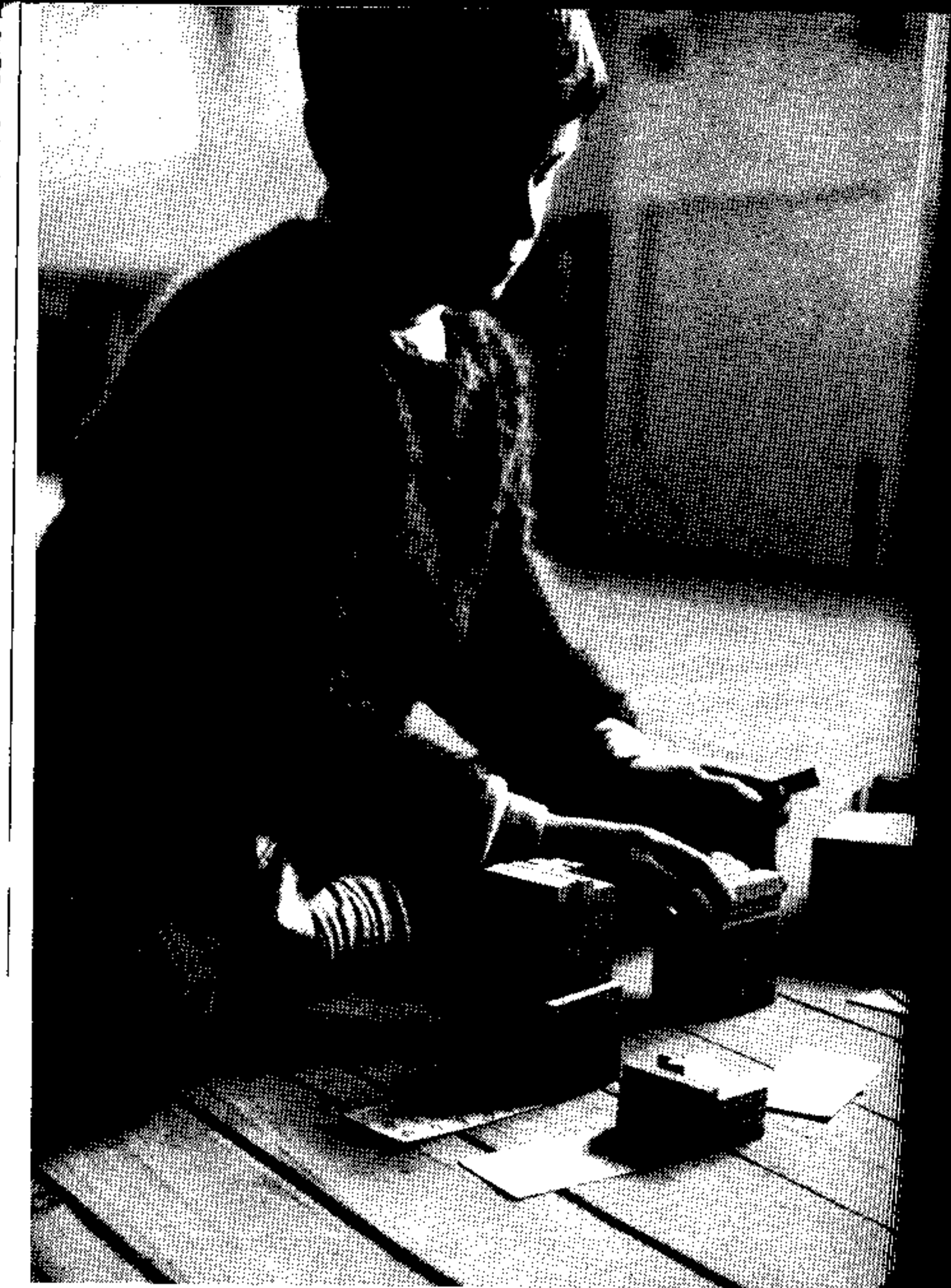


Photo 5. *Compter en base 6.*
L'élève apprend à reconnaître et à noter des combinaisons de différentes puissances de 6.
(Photo Jan Dalman)

les range dans deux boîtes différentes, l'une dans la salle de classe, l'autre dans la cour de récréation, et ainsi de suite.

Aussi l'idée d'égalité entre ensembles ne devient-elle intéressante que quand on se trouve en présence de définitions différentes d'un même ensemble, et c'est pour cela qu'il est utile de l'introduire : c'est pour que les enfants puissent apprendre à comprendre que « L'ensemble des personnes portant des chaussures noires est égal à l'ensemble formé par Catherine, Jean-Louis et Valérie ». C'est en jouant des jeux avec des ensembles formés par les enfants de la classe que les enfants acquerront l'habitude de reconnaître les ensembles égaux.

Si notre ensemble de base était composé des enfants de la classe, et si ces enfants, en fait, portaient tous des chaussures noires, et si personne d'autre dans la classe ne portait de chausures noires, l'ensemble de base et l'ensemble des enfants porteurs de chaussures noires seraient égaux, et nous pourrions ajouter à notre leçon sur l'appartenance aux ensembles cet aspect particulier de la notion d'égalité.

Un jeu très efficace, à ce point de vue, consiste à inviter un groupe d'enfants à constituer, avec quelques-uns de leurs camarades, un ensemble d'enfants en les nommant un par un, puis à inviter un autre groupe d'enfants à reformer le même ensemble en le définissant uniquement par des attributs. Par exemple, le premier groupe appelle « Éliane, Dominique et Gilles », et le second dit « l'ensemble des enfants portant des chandails gris clair » – et si tous les trois portent des chandails gris clair, et qu'aucun autre enfant de la classe n'en porte, la réponse est correcte.

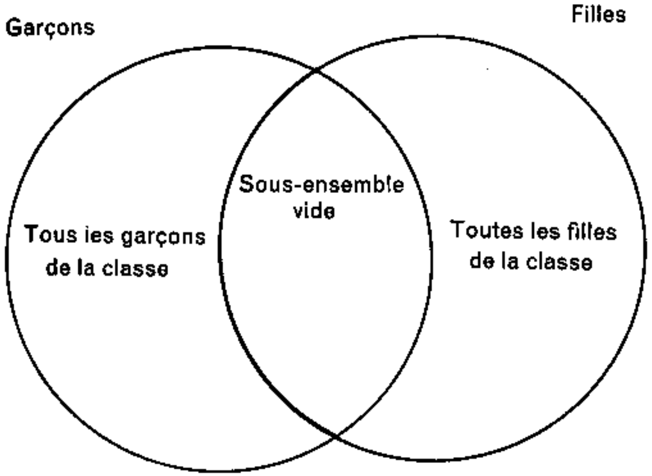
1.6. *Ensembles vides, sous-ensembles vides*

Il peut se faire, évidemment, qu'on ait réuni des attributs tels qu'il n'existe dans l'ensemble de base aucun élément les possédant. Dans ce cas, on a un ensemble vide et, de même, on peut avoir un sous-ensemble vide. L'ensemble vide, c'est celui qui ne contient aucun élément.

Revenons à l'ensemble de base composé de tous les enfants de la classe, et définissons un ensemble composé de « tous les garçons à cheveux blonds portant des chaussures noires ». Comme il peut se faire qu'il n'y ait, ce jour-là, aucun garçon à cheveux blonds qui porte des chaussures noires, l'ensemble des garçons à cheveux blonds portant des chaussures noires est égal à l'ensemble vide.

On peut demander aux enfants de nommer les éléments ou de définir les attributs de l'ensemble vide, et cela peut faire un jeu très amusant. La maîtresse décide, par exemple, que l'univers se compose de toutes les personnes qui sont dans la classe, et l'ensemble vide pourra être celui « de tous les enfants de la classe qui sont dans une poussette » ou « l'ensemble de toutes les personnes qui ont plus de cent ans » ou « l'ensemble de tous les grand-pères de la classe ». Avec d'autres univers, on pourrait avoir « l'ensemble de tous les crocodiles de la pièce », etc. L'absurdité de certaines de ces réponses est à la fois amusante et constructive, car elles conduisent à l'idée de contradiction. L'ensemble vide est l'équivalent, dans le domaine des ensembles, de la notion de contradiction en logique.

Fig. 6 ENSEMBLE VIDE ET SOUS-ENSEMBLE VIDE



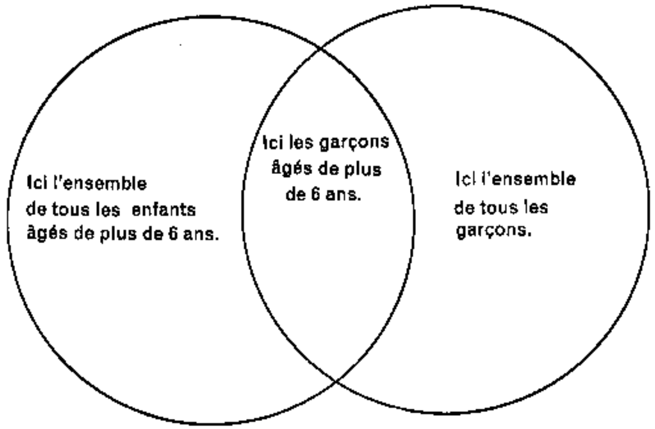
Supposons que notre univers comprenne toutes les personnes qui se trouvent dans la salle de classe. Supposons que notre ensemble comprenne les personnes âgées de plus de 100 ans. Dessinons les membres de cet ensemble dans le carré. Il n'y aura évidemment pas d'éléments dans cet ensemble. C'est un ensemble vide.
Dans l'intersection nous devrions avoir tous les enfants qui sont à la fois filles et garçons. Comme nous n'aurons pas de tels enfants, notre sous-ensemble est vide.

1.7. *Intersection d'ensembles*

Ici encore, le mieux est, pour commencer, de prendre comme éléments de l'ensemble les enfants de la classe eux-mêmes. On commence par demander aux enfants de suggérer deux attributs définissant chacun un ensemble différent. On va, en effet, faire deux ensembles. Les enfants vont faire des quantités de suggestions. Supposons que de tous les attributs proposés on en ait retenu deux – celui d'être un garçon et celui d'avoir plus de six ans. Pour jouer à ce jeu, il nous faut deux cordes assez longues, une par ensemble. On désigne deux capitaines, un par équipe, à chacun desquels on confie une corde. Puis on dit aux enfants qui sont des garçons d'aller dans un coin de la salle, et à ceux qui ont plus de six ans d'aller dans un autre coin. Chacun des « capitaines d'ensemble » s'assure que tous les enfants de l'ensemble sont dans la corde, qu'il tient au niveau de leur taille.

Mais il y a quelques enfants qui sont dans l'indécision, car ils sont à la fois garçons et âgés de plus de six ans. Où faut-il aller? Nous en avons vu qui faisaient jusqu'à vingt fois la navette entre une corde et l'autre avant que la discussion s'instaure. Si elle est trop longue à venir, la maîtresse demandera aux capitaines : « Avez-vous bien tous les garçons dans la corde? » ou bien « Est-ce que tous les enfants de plus de six ans sont bien attachés? » C'est aux capitaines, assistés de camarades de son ensemble, de voir s'il ne manque personne. Il faut parfois un certain temps avant qu'un des enfants se dise, et dise, que certains enfants doivent être dans les deux cordes à la fois.

Fig. 7 INTERSECTION

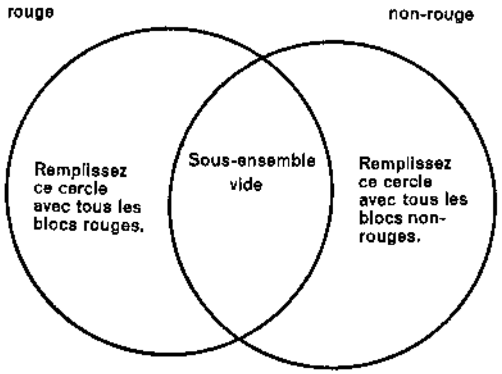


Les enfants qui sont des garçons et âgés de plus de six ans sont à la fois dans les deux cercles : c'est l'intersection.
Formez les cercles avec des cordes que les enfants tiendront sous leurs mentons, afin qu'ils se rendent compte qu'ils sont bien « à l'intérieur ».

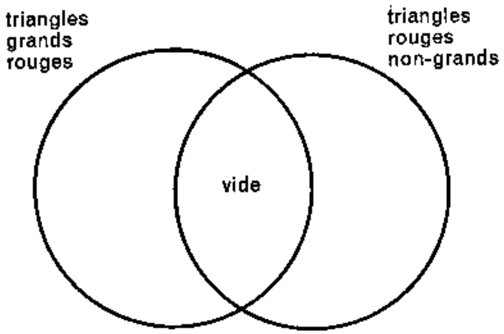
Il est essentiel de ne pas se hâter pour acquérir cette compréhension ; le nombre de fois que les enfants doivent aller d'une corde à l'autre, le nombre de discussions entre capitaines et équipes, tout cela contribue à renforcer l'idée qu'il y a deux attributs auxquels il faut satisfaire en même temps.

Il peut, bien entendu, se faire que l'intersection soit vide. Par exemple, si les attributs avaient été « garçon » et « fille », tous les garçons auraient été dans une corde, toutes les filles dans l'autre, et il n'y aurait pas eu de problème. Il est essentiel que les enfants fassent les deux types d'exercices – ceux dans lesquels l'intersection comporte des éléments, et ceux où elle n'en comporte pas, où elle est vide.

Fig. 8 ENSEMBLE COMPLÉMENTAIRE



Si nous choisissons comme ensemble tous les blocs rouges, les blocs non-rouges, c'est-à-dire ceux qui restent, sont l'ensemble complémentaire. Si nous choisissons les blocs non-rouges comme ensemble, ce sont les blocs rouges qui seront l'ensemble complémentaire.



Ici notre ensemble comprend les grands triangles rouges, l'intersection est vide et l'ensemble complémentaire est formé par les triangles rouges non grands.

Notons bien que « l'intersection de deux ensembles », c'est la section qui est commune aux deux ensembles. Il ne faut pas confondre ce terme avec les points d'intersection de deux limites.

Ces jeux, on le voit, sont équivalents aux jeux décrits dans la section consacrée à la logique, mais dans chaque cas notre intention est de faire apprendre autre chose. Il faut s'assurer que, finalement, les enfants comprennent bien le rapport qu'il y a entre les deux types de jeux.

On peut jouer des jeux analogues avec les blocs logiques, comme nous l'avons indiqué au chapitre « *Logique* ». On peut essayer des jeux avec des croisements de routes, avec deux cerceaux, avec trois, voire quatre cerceaux. Il faudra alors examiner les diverses intersections, décider des sous-ensembles et exprimer verbalement leurs noms, en s'intéressant, aussi, aux pièces laissées de côté, car elles forment également un ou plusieurs ensembles.

Comme ces jeux, souvent joués avec des diagrammes de Venn, sont spectaculaires quand on les joue avec des enfants, on est tenté d'aller trop vite, sans préparation suffisante. C'est à éviter.

1.8. *Complément*

Il est possible de scinder l'ensemble de base en deux sous-ensembles distincts. Par « distincts » nous voulons dire que l'intersection entre les deux sous-ensembles est vide – c'est-à-dire que les deux parties, ou les deux sous-ensembles, n'ont aucun élément commun.

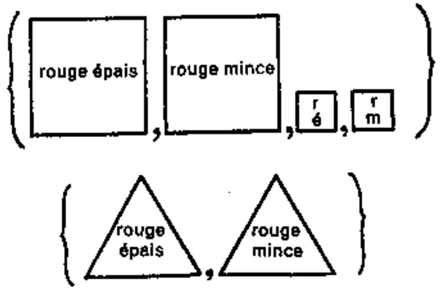
Supposons que nous scindions l'ensemble de base des enfants de la classe en deux ensembles, celui des garçons et celui des filles, ou celui des enfants qui ont des cheveux blonds et celui des enfants qui n'ont pas les cheveux blonds, ou celui des enfants qui portent des chaussures noires et celui des enfants qui ne portent pas des chaussures noires. Si l'attribut de l'un des ensembles est la « négation » de celui de l'autre, on peut être sûr, tout à fait sûr, qu'il n'y a aucun élément dans l'ensemble intersection, car aucun élément ne peut posséder à la fois un attribut et la négation de cet attribut. Aucun enfant ne peut être à la fois garçon et fille, etc.

Un jeu qu'il est manifestement très facile de jouer à propos de compléments, c'est simplement de scinder l'univers de telle manière qu'une partie de l'univers aille dans un coin de la salle et l'autre partie dans un autre coin. Si l'on appelle « ensemble » une de ces parties, l'autre sera le « complément ». Naturellement, on peut inverser les rôles, la seconde partie étant appelée ensemble et la première complément. Une fois un ensemble choisi, le complément, c'est la partie de l'univers qui reste.

Si on prend les blocs logiques, on peut choisir les pièces jaunes comme ensemble, et dans ce cas les pièces non-jaunes forment le complément. Toutes les fois qu'on isole un ensemble dans un univers, on a, de ce fait, son complément.

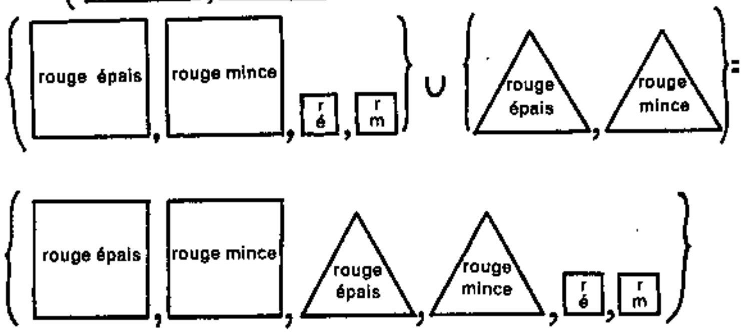
Il est clair que le complément du complément, c'est l'ensemble lui-même. En d'autres termes, si l'ensemble est constitué par les rouges, son complément est formé des non-rouges, et le complément du complément est formé des non-non-rouges, c'est-à-dire des rouges, c'est-à-dire de l'ensemble lui-même. On peut imaginer un jeu dans lequel un enfant divise la classe en deux parties séparées, en pensant à un attribut qui détermine la séparation, mais sans dire quel est cet attribut, et il faut que les autres enfants de la classe devinent quel a été l'attribut qui a été choisi. Par exemple, le premier enfant décide que son ensemble se compose de tous les enfants qui portent quelque chose de blanc, de sorte que le complément consiste en l'ensemble de tous les enfants qui ne portent pas quelque chose de blanc (c'est le reste de l'ensemble de base). A un stade ultérieur, il imaginera, par exemple, l'ensemble des enfants blonds et aux yeux bleus, auquel cas le complément se composera des enfants qui n'ont aucun de ces attributs ou qui n'en ont qu'un seul. Les enfants éprouvent souvent beaucoup de mal à décider de ces attributs... décisifs.

Fig. 9 ENSEMBLE-RÉUNION



Voici notre premier ensemble symbolisé par des dessins. Remarquez les accolades qui l'entourent et qui indiquent qu'il s'agit d'un ensemble.

Voici notre second ensemble symbolisé. Remarquez qu'il s'agit d'ensembles distincts qui n'ont pas d'éléments communs.



L'ensemble des carrés rouges réunis à l'ensemble des grands triangles rouges = l'ensemble des carrés rouges et des grands triangles rouges. Remarquez le signe ∪ dont on se sert pour indiquer la réunion. A une étape ultérieure et à un niveau différent, cette opération correspond à l'addition des nombres.

On peut aussi jouer à ces jeux avec les blocs logiques, en commençant par un seul attribut, puis en en ajoutant deux, trois, à mesure que les enfants acquièrent de la pratique.

1.9. *Réunion d'ensembles*

Il existe une opération importante, c'est celle de la réunion d'ensembles en vue d'en faire d'autres ensembles. Cela n'offre aucune difficulté particulière, car les enfants pensent simplement à un certain ensemble, puis à un autre ensemble, puis enfin ils en réunissent les éléments pour former un nouvel ensemble. Il y a cependant une petite difficulté qui peut se présenter si les deux ensembles ont des éléments communs, mais les enfants admettent assez vite que ces éléments, comme les autres, peuvent aller ensemble. Par exemple, si on a, d'une part, tous les crayons et, d'autre part, tous les instruments servant à écrire et qui sont bleus, (ce qui comprend à la fois les crayons bleus et les porte-plume bleus, mais qui comprend aussi les crayons non-bleus) et si nous les mettons tous ensemble, nous aurons un tas qui comprendra les crayons non-bleus, les porte-plume bleus. Les porte-plume non-bleus ne se trouveront pas inclus.

Il y a le cas particulier des réunions d'ensembles dans lesquels il n'y a pas d'éléments communs. Aussi faut-il que les enfants acquièrent l'expérience de situations dans lesquelles on réunit des ensembles ayant des éléments communs et de situations dans lesquelles on réunit des ensembles qui n'ont pas d'éléments communs. Ce sont ces dernières qui conduisent à l'idée d'addition.

Dans l'exemple donné ci-dessus, tout membre de l'ensemble-réunion est ou bien un instrument à écrire bleu, ou bien un crayon. Dans l'intersection, l'ensemble avait la propriété des deux ensembles (à la fois instrument à écrire et bleu). Dans l'ensemble-réunion, la propriété de l'ensemble-réunion, c'est que les éléments ont l'une ou bien l'autre de ces propriétés. Les enfants trouvent cela difficile à comprendre au début, car ils ne voient pas bien comment l'objet qu'ils ont ramassé serait OU BIEN ceci OU BIEN cela, alors qu'en fait ce qu'ils voient dans leur main, est un seul objet. La meilleure manière de surmonter cette difficulté, ce serait peut-être de leur dire qu'on va tirer une pièce de l'ensemble-réunion, mais sans savoir exactement laquelle, car on ne va pas regarder dans le récipient. Alors, avant de la tirer, qu'est-ce qu'on peut dire de certain sur cette pièce, quelle qu'elle soit, sans se tromper? Très souvent, dans ce cas, les enfants répondront vite : « Ce sera sûrement un crayon ou un truc bleu pour écrire. »

Voyons comment on peut organiser un jeu simple de ce genre. Prenons les blocs logiques, et décidons que le premier ensemble se compose de toutes les pièces bleues, tandis que le second se compose de toutes les pièces rondes. On réunit ces deux ensembles et on les met dans un seau avec un couvercle. Ensuite on demande aux enfants : « Si je tire un bloc du seau sans regarder, qu'est-ce que ce sera sûrement ? » et supposons que la réponse soit : « Un bleu. » On fait alors tirer une pièce à un enfant et, bien sûr, elle sera peut-être bleue, mais il finira bien par en tirer une ronde qui ne sera pas bleue, et on verra alors que la réponse : « Un bleu » n'est pas suffisante. En posant alors la question à nouveau, on obtiendra probablement la réponse « Ou bien bleu ou bien rond », réponse dont l'expérience confirmera l'exactitude.

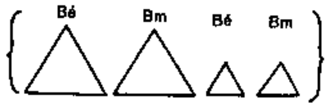
Pour donner un exemple de réunion sans attribut commun, on prendra les formes carrées et les formes rectangulaires.

1.10. *Ensembles-différences*

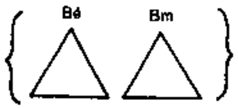
L'ensemble-différence entre un ensemble et un sous-ensemble se compose des membres de l'ensemble qui ne sont pas dans le sous-ensemble. En d'autres termes, pour obtenir un ensemble-différence, on enlève de l'ensemble tous les éléments du sous-ensemble, et ce qui reste constitue l'ensemble-différence.

Les enfants ont besoin de beaucoup de pratique pour former des ensembles-différences. La meilleure façon de commencer est peut-être de leur demander de trouver l'ensemble-différence entre l'ensemble de tous les enfants de la classe et l'ensemble des garçons. On met d'abord tous les enfants au centre de la pièce, puis le sous-ensemble des garçons s'en va. Ce qui reste, bien entendu, c'est l'ensemble-différence,

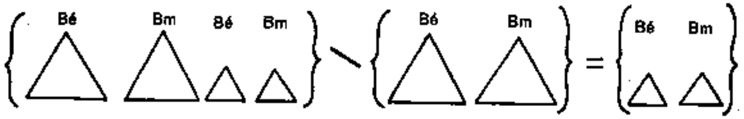
Fig. 10 ENSEMBLE-DIFFÉRENCE



Voici notre ensemble symbolisé. C'est l'ensemble de tous les triangles bleus.



Voici notre sous-ensemble. Nous allons essayer de trouver l'ensemble-différence entre ces deux ensembles.



L'ensemble-différence entre l'ensemble de tous les triangles bleus et l'ensemble des grands triangles bleus = l'ensemble des petits triangles bleus. L'ensemble-différence indique « ce qui a été enlevé ». Remarquez le signe \ utilisé pour la différence. A une étape ultérieure et à un niveau différent cette opération correspondra à la soustraction des nombres.

mais c'est aussi l'ensemble des filles, de sorte que l'ensemble-différence entre l'ensemble de tous les enfants de la salle et le sous-ensemble des garçons, c'est l'ensemble des filles.

Faisons un nouvel exercice, en prenant comme ensemble de base le mobilier de la classe. Supposons qu'il y ait, dans la classe, un piano, quelques tables et quelques chaises. Si on choisit comme ensemble « toutes les tables et toutes les chaises » et qu'on veuille trouver l'ensemble-différence entre cet ensemble et le sous-ensemble des chaises, on voit que c'est l'ensemble des tables.

En jouant avec les blocs logiques, on peut décider que l'ensemble sera celui des blocs grands et rouges et que le sous-ensemble sera celui des grands carrés rouges. Les enfants sortent d'abord toutes les grandes pièces rouges, puis mettent de côté toutes les grandes pièces rouges carrées. On voit alors que l'ensemble-différence est formé des pièces grandes rouges non-carrées. On peut jouer à beaucoup de jeux de ce genre, et demander aux enfants de nommer tour à tour l'ensemble, le sous-ensemble et l'ensemble-différence.

Ensuite, on jouera ces jeux sans toucher aux pièces. On dira aux enfants de « penser au sous-ensemble comme s'il était enlevé » et d'essayer de le nommer. Pour commencer, il faudra que les pièces soient disposées de manière à faciliter cette opération mentale, mais bientôt les enfants pourront faire l'exercice sans changer les pièces de place.

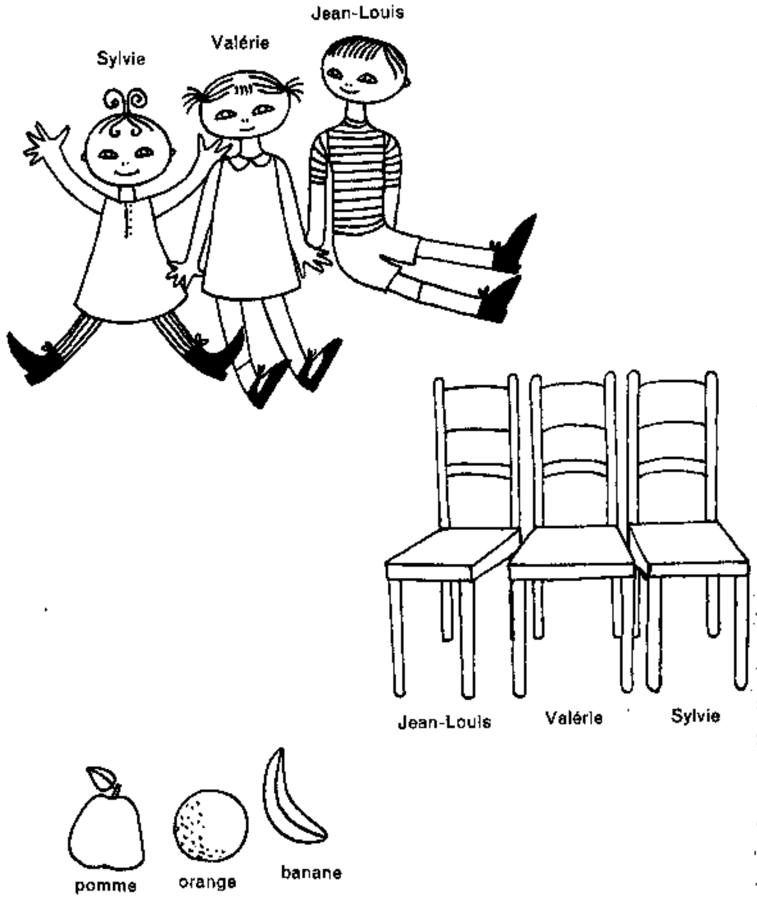
Or, on se rappelle que, dans l'univers, tout ensemble a son ensemble complémentaire – constitué par ce qui reste quand on a enlevé l'ensemble. Si donc nous avons choisi l'ensemble de toutes les pièces bleues, le complément sera constitué par toutes les pièces non-bleues, et ainsi de suite. En revenant au premier exemple choisi, où l'univers était formé par « tous les enfants de la classe », nous avions, comme ensemble, également pris « tous les enfants de la classe ». Lorsque nous avions enlevé le sous-ensemble des garçons, nous avions trouvé que l'ensemble-différence était constitué par toutes les filles. Mais si on y réfléchit bien, on voit que l'ensemble de toutes les filles de la classe était aussi le complément. Il faut donner plusieurs exemples de ce genre, jusqu'à ce que les enfants s'aperçoivent que la recherche du complément n'est jamais qu'un cas particulier de la recherche de l'ensemble-différence.

Donnons un autre exemple dans ce cas particulier, en prenant les blocs logiques. Pour ce jeu, l'ensemble de base sera constitué par l'ensemble de tous les blocs logiques de la boîte, et on décidera également que l'ensemble est constitué par tous les blocs de la boîte. Décidons maintenant d'enlever le sous-ensemble des blocs bleus. On s'aperçoit que l'ensemble-différence n'est autre que l'ensemble complémentaire – l'ensemble de toutes les pièces non-bleues, puisqu'en fait on n'a rien fait d'autre que de diviser l'ensemble universel en deux parts, celle des pièces bleues et celle des pièces non-bleues.

1.11. *Ensembles équivalents. Les propriétés numériques des ensembles et le nombre naturel*

On peut « aparier » les éléments de certains ensembles, c'est-à-dire les « mettre en correspondance terme à terme, un à un ». Par exemple, supposons un ensemble d'enfants composé de Sylvie, Valérie et Jean-Louis, et un ensemble de fruits composé d'une pomme, d'une orange et d'une banane. On peut donner l'orange à Sylvie, la pomme

Fig. 11 ENSEMBLES ÉQUIVALENTS



Établissons une correspondance terme-à-terme entre les éléments de ces ensembles, sans tenir compte de l'ordre.

à Jean-Louis et la banane à Valérie, ou encore donner la banane à Sylvie, la pomme à Valérie et l'orange à Jean-Louis, peu importe, du moment que chaque enfant reçoit un fruit, et que chaque fruit est attribué à un enfant, et qu'il ne reste ni enfant sans fruit ni fruit sans enfant.

On a ainsi établi une correspondance terme à terme, une *application,* entre l'ensemble des enfants et l'ensemble des fruits. Quand on peut le faire, on peut dire que les deux ensembles sont *équivalents,* et on peut dire aussi que chacun de ces deux ensembles « a le même nombre d'éléments ».

Or, à ce point du développement des enfants, on n'a pas encore introduit le nombre « trois » ; tout ce qu'on peut faire, c'est d'attirer l'attention sur le fait qu'il y a le *même* nombre, autant d'éléments. On peut mettre de nombreux autres ensembles en correspondance élément par élément avec celui des enfants qui vient d'être choisi, par exemple l'ensemble formé d'une table, d'une chaise et d'un tabouret, en mettant la table avec Sylvie, la chaise avec Jean-Louis et le tabouret avec Valérie : une fois de plus, on constate l'équivalence entre deux ensembles : celui des enfants et celui des meubles, comme avec celui des fruits.

De même, on peut prendre une pièce jaune, une pièce rouge et une pièce bleue dans la collection des blocs logiques. Mais il faut prendre bien soin de ne pas toujours tomber juste, afin que les enfants voient bien qu'on ne peut pas toujours établir une correspondance un-par-un entre deux ensembles.

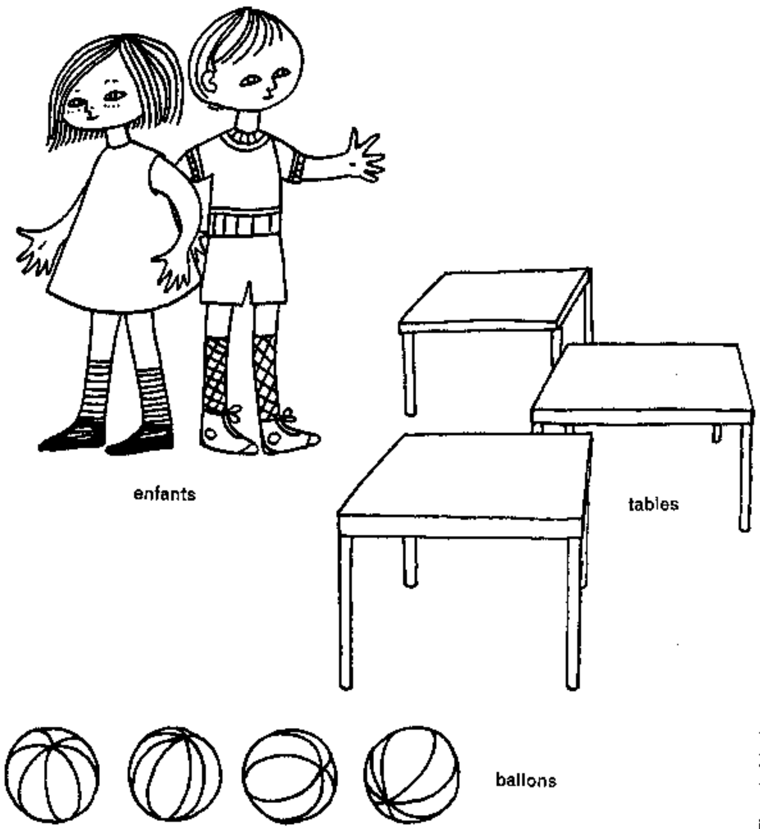
On peut ainsi jouer à des quantités de jeux, notamment en formant entre enfants des ensembles équivalents les uns avec les autres. Au cours d'une leçon, par exemple, on s'arrangera pour ne discuter que d'ensembles ayant la propriété numérique de trois, et on dira aux enfants que tous ces ensembles peuvent être appelés « trois ». Ils ont tous la propriété de trois. Une autre fois, on mettra en correspondance des ensembles ayant la propriété de « deux ». C'est ainsi qu'on fait apparaître les nombres naturels, et il faut toujours bien souligner que ce sont des propriétés des ensembles.

Le maître devra encourager les enfants à jouer ainsi un grand nombre de jeux de correspondances terme à terme, pour qu'ils comprennent bien comment les nombres naturels sont formés à partir des ensembles, c'est-à-dire en mettant des ensembles équivalents en correspondance élément par élément les uns avec les autres. Car en procédant ainsi, on range les ensembles en classes d'équivalence, et on voit mieux que les ensembles appartenant à une même classe d'équivalence ont la même propriété numérique.

1.12. *Non-équivalence*

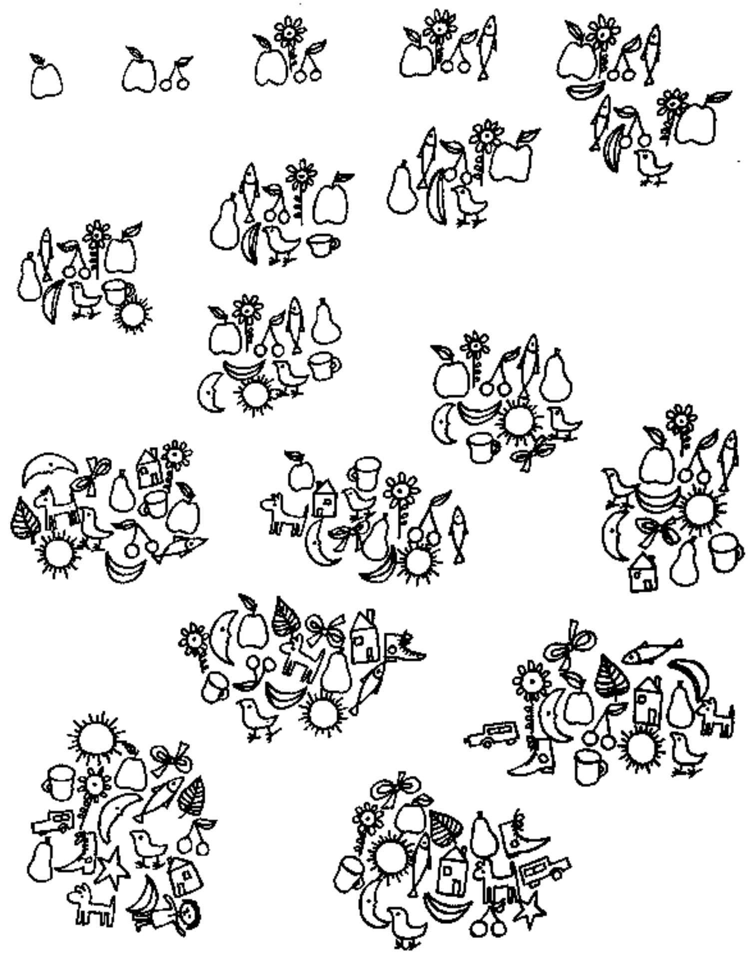
Comme nous l'avons déjà indiqué, il arrive parfois, quand on essaie de mettre un ensemble en correspondance avec un autre, qu'on n'y

Fig. 12 NON-ÉQUIVALENCE D'ENSEMBLES



parvienne pas. Il faut également procurer aux enfants de nombreuses expériences de ce genre. Si, quand on tente d'assortir les éléments d'un ensemble à ceux d'un autre ensemble, il y a des éléments de l'un des ensembles qui restent « en rade », on dit que cet ensemble a *plus* d'éléments que l'autre. De même, on dit que ce dernier a *moins* d'éléments que le premier. Il faudra beaucoup d'exercices de ce genre pour faire bien pénétrer l'idée de « plus », d'une manière mathématique qui soit indépendante de l'aspect visuel des piles d'objets. Les jeux introductifs sont très simples ; ils sont du même ordre que ceux qu'on utilise pour établir la notion d'équivalence ; aussi n'est-il pas nécessaire de les décrire et suffit-il de répéter, encore une fois, qu'il faut beaucoup d'expériences avant que l'idée fondamentale contenue dans « plus » et « moins » ait été comprise par les enfants.

Fig. 13 NON-ÉQUIVALENCE DES TAS QUI AUGMENTENT



Voici un jeu d'une grande efficacité, mais auquel il ne faut pas jouer tant que les concepts qui précèdent n'ont pas été compris.

On fait faire aux enfants un certain nombre de piles d'objets quelconques – jetons, allumettes, capsules de bouteilles, haricots, clous, tout ce qui tombe sous la main. Dans la première pile, il n'y aura qu'un seul objet. Pour faire la seconde pile, les enfants commencent par faire une pile semblable à la première, exactement, puis y ajoutent un objet quelconque, obtenant ainsi une pile dans laquelle il y a un objet de plus que dans la première pile. Ensuite, on copie la seconde pile (avec son ensemble de deux objets) et on y ajoute un troisième objet, ce qui donne une troisième pile, un troisième ensemble. Puis on dispose à côté un ensemble analogue de trois objets, et on y ajoute encore un objet. On obtient ainsi un ensemble de quatre objets. A l'âge où les enfants font ces exercices, il y a des chances pour qu'ils ne sachent pas encore compter, même s'ils ont déjà une vague idée de la « propriété deux », de la « propriété trois », et ainsi de suite, tirée de nos jeux d'équivalences, mais ils seront ravis de jouer à ce jeu presque sans limite, et, de fait, on peut les laisser continuer jusqu'à ce qu'il y ait de trente à quarante objets dans un ensemble.

Il convient de disposer ces ensembles en succession linéaire sur le sol, si possible en ordre croissant de la gauche vers la droite, en mettant l'ensemble composé d'un seul objet le plus vers la gauche, l'ensemble de deux objets plus à droite, et ainsi de suite. En d'autres termes, les ensembles doivent aller en augmentant de la gauche vers la droite. Ce n'est pas indispensable, cependant, et ils peuvent aussi bien aller en augmentant de droite à gauche, ou de haut en bas, ou de bas en haut, ou de toute autre manière commode, du moment que les enfants voient bien dans quel sens se fait la croissance.

Puis on peut jouer le jeu suivant : – On désigne deux ensembles consécutifs quelconques, et on demande aux enfants : « Quel est celui de ces deux ensembles qui a le plus d'objets ? » En général, la réponse est juste, et on peut alors poser la question : « Combien de plus ? » (On conviendra que c'est une question qui peut légitimement être posée même si les enfants ne savent pas compter, puisque la réponse est « un »). On poursuit cet exercice et on vérifie le résultat, non pas en comptant, mais en établissant une correspondance élément par élément, jusqu'aux plus grandes piles. Pour les enfants, ces piles de grandes dimensions ont l'air à peu près pareilles, et il faut donc que le maître leur fasse vérifier que, même là, l'ensemble immédiatement à droite comporte bien un élément de plus que celui qui le précède sur sa gauche. Il sera sans doute utile de faire exécuter matériellement les correspondances sur un certain nombre d'ensembles voisins, jusqu'à ce que les enfants aient bien compris que la différence est toujours de un.

Une fois ces jeux terminés, on peut demander aux enfants : « Quelle est la pile qui en a un de plus que celle-ci ? » ou « Quelle est la pile qui en a un de moins que celle-là ? « et là encore le maître s'assurera que chaque enfant comprend bien tout ce qui est contenu implicitement dans ces recherches et ces découvertes. En particulier, qu'il n'oublie pas que la seconde question est plus difficile que la première pour beaucoup d'enfants.

Une fois qu'on est assuré, aux questions sur « un de plus » ou « un de moins », d'obtenir la réponse « celle de droite » ou « celle de gauche », respectivement, et une fois qu'il est bien établi que, dans le cas de deux piles consécutives quelconques, celle de droite comporte toujours un élément de plus que celle de gauche, on peut aborder un

autre jeu. Tout d'abord, revenant au premier état du jeu, on révise les propriétés numériques des petits ensembles, car les enfants devraient être capables de reconnaître la propriété d'avoir un élément, deux éléments, trois éléments, et ainsi, peut-être, jusqu'à neuf.

On montre alors le premier ensemble et le troisième, et on demande aux enfants lequel a le plus d'éléments, et combien. On voit, plus facilement qu'avant, quel est le plus « nombreux » des deux. Mais il faut vérifier en faisant la correspondance élément par élément, autant que faire se peut, et les enfants ne mettront pas longtemps à reconnaître dans l'ensemble-différence un ensemble ayant la propriété de deux. On notera donc qu'il y a « deux de plus » ou « deux de moins ». Puis on prendra la deuxième et la quatrième pile, en posant toujours les mêmes questions : « Quelle est la pile qui a le plus de pièces ? », puis « Combien de plus ? », puis « Quelle est la pile qui a le moins de pièces ? » et « Combien de moins ? » Continuer cet exercice, en montant de plus en plus le long de l'échelle, et en vérifiant, sans compter, la différence. On s'aperçoit que lorsque les piles deviennent trop grandes pour que les enfants puissent voir d'un simple coup d'œil quelle est la plus grande, ils ne disent plus qu'il y en a deux de plus dans celle de droite. Ils disent parfois qu'il y en a trois de plus ou quatre de plus, car ils voient que les piles deviennent de plus en plus grandes et en déduisent qu'il doit en être de même des différences. Mais nous avons également vu des enfants dire que la différence n'est plus que de un, et quand on leur demande pourquoi, ils répondent que les piles ont l'air à peu près pareilles et que la différence ne doit être que de un. Pourtant, si on ramène ces enfants devant les petites piles, ils répondent à nouveau que la différence est de deux, sans se rendre compte de la contradiction entre leurs deux réponses. Cela prouve que ces enfants n'ont pas encore appris que « un de plus » et « un de plus » font « deux de plus », même s'ils ont déjà compris que « un et un font deux ». Notre lecteur voudra bien se reporter à ce qui est dit dans le corps de l'ouvrage sur les jeux « état, opérateur, état ». Quand les enfants auront joué à des jeux de ce genre, il est probable qu'ils fourniront des réponses plus satisfaisantes.

Quand on aura fait jouer aux enfants les jeux ci-dessus et des jeux analogues, ils auront été convenablement introduits à la notion de nombre naturel, ils pourront compter en comprenant ce qu'ils font et ils auront maîtrisé les propriétés numériques des ensembles. Il faut faire très attention de ne pas précipiter indûment les enfants à ce stade, surtout les plus lents, car il y a bien des erreurs qui se produisent au cours des étapes ultérieures du développement mathématique et qui n'ont pas d'autre cause qu'une mauvaise compréhension des concepts qui s'y trouvent implicitement contenus. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de notre manuel, nous n'y avons pas fait figurer ces « jeux sur les nombres » que les maîtresses des écoles maternelles connaissent et savent utiliser si bien, mais nous pensons que l'introduction de ces jeux devrait être retardée jusqu'à ce que les enfants aient atteint au moins ce stade.

1.13. *Symboles et symbolisation*

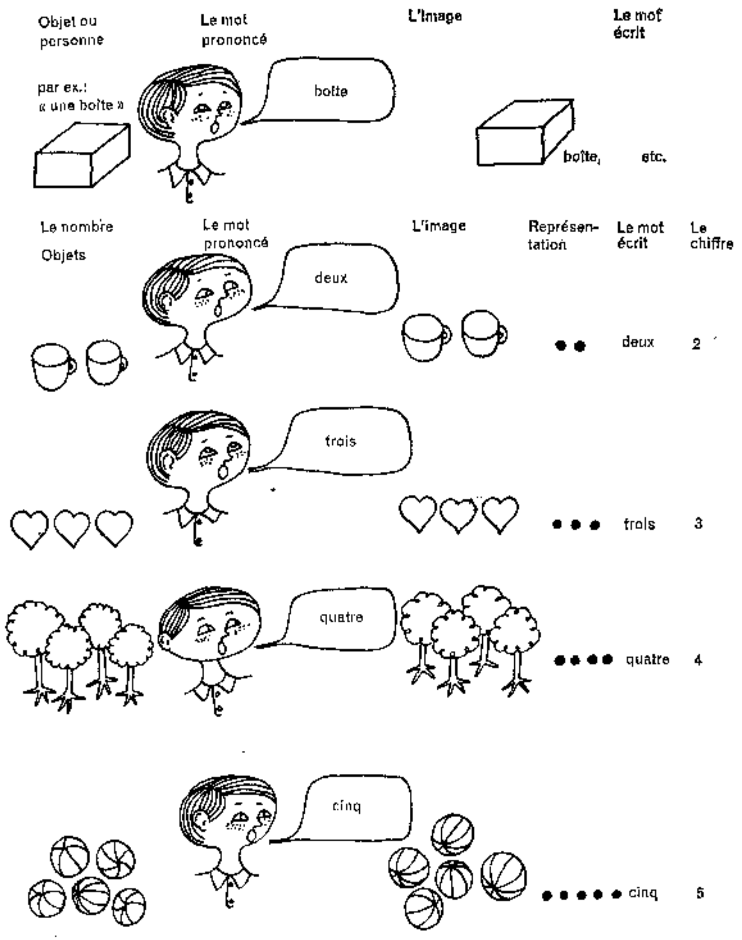
La première expérience de l'enfant, c'est son moi, c'est lui-même. Puis vient l'expérience des « choses qu'il trouve autour de lui » et, parmi ces choses, bien entendu, sa mère, son père, ses amis. Les objets et les personnes sont les premières expériences de l'enfant.

Pendant la seconde année de sa vie, il commence à acquérir des associations de « mots représentatifs de ces objets et de ces personnes » et, pendant la troisième année de sa vie, il apprend à parler. A ce moment de sa vie, la parole est devenue un puissant ensemble de symboles grâce auxquels il peut faire état de ses expériences. (Il ne faut pas oublier, toutefois, que ces mots lui sont véritablement propres, qu'ils sont très solidement ancrés à son expérience personnelle, et qu'il leur faut beaucoup de temps pour se développer correctement. Plus d'un maître, plus d'une mère ont été engagés sur une fausse piste par un mot – mal employé – de l'enfant).

L'étape qui suit celle de la parole est, peut-être, celle du dessin. L'enfant « fait des images ». Au lieu de dire « une maison » il en dessine une. Quand on s'occupe d'ensembles en classe, on est parfois amené à représenter des ensembles par des symboles quelconques (et comme les enfants ne savent pas encore lire, on ne peut pas écrire des mots). On peut alors faire des dessins au tableau ou sur une feuille de papier et, par exemple, représenter l'ensemble composé d'une table, d'une chaise et d'un tabouret par une esquisse grossière de ces trois objets. Il faudra que les enfants comprennent bien clairement que ces images représentent des ensembles d'objets, mais ne sont pas identiques aux objets qu'elles représentent. Il faut les amener à voir qu'ils ne peuvent pas entrer dans la maison, s'asseoir sur la chaise, qui sont représentées au tableau ou sur le papier, que la chaise, la maison, ne sont que des images, qu'on ne peut pas cueillir une orange sur l'arbre dessiné au tableau. Il est capital que les enfants comprennent bien la différence entre l'objet réel et le symbole qui le représente. Des expériences du genre de la suivante y contribueront.

La maîtresse montre aux enfants l'image d'un chat, et demande : « Qu'est-ce que c'est que ça ? ». Les enfants répondent : « C'est un chat. » La maîtresse demande alors : « Venez le caresser » ou encore : « Pourquoi ne s'en va-t-il pas ? ». Les enfants s'en amusent grandement. Elle peut alors dessiner au tableau un oiseau plutôt simplifié et demander : « Qu'est-ce que c'est que ça ? ». S'ils répondent : « C'est un oiseau », elle demandera « Pourquoi ne s'envole-t-il pas ? ». A la suite d'expériences de ce genre, les enfants en viendront à saisir, et surtout à dire, que « ce n'est pas un vrai », que c'est seulement l'image d'un oiseau. Puis on demandera aux enfants de dessiner quelque chose qu'ils ont vu récemment, et la maîtresse leur posera des questions sur leur dessin, jusqu'à ce qu'ils aient appris à dire, par exemple : « C'est l'image d'un arbre » au lieu de « C'est un arbre ». Certains enfants plus lents auront besoin de plusieurs expériences avant d'y parvenir.

Fig. 14 SYMBOLES ET SYMBOLISATION

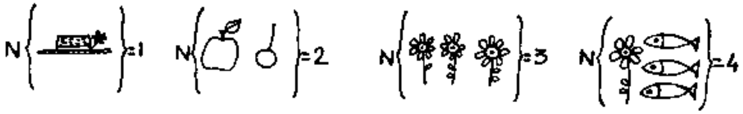


Ce n'est pas du byzantinisme. Il est très important pour les enfants de se rendre compte de la différence qu'il y a entre le symbole et ce qui est symbolisé, car plus tard, quand il s'agira de symboliser des abstractions comme les nombres, cette différence, il faudra la faire, et très nettement.

Quand les enfants se servent pour la première fois des ensembles, ils ont déjà une certaine expérience de l'utilisation des personnes et des choses elles-mêmes sans aucune sorte de symbolisation, mais ils découvrent bientôt le besoin de garder une trace quelconque de leur activité nouvelle, et ce besoin conduit à la symbolisation. Quand ils parlent de leurs expériences, ils se servent, bien entendu, de symboles verbaux, mais ils ne savent pas encore les écrire. Dans un premier temps, on introduit l'emploi des accolades pour désigner la notion d'ensemble, et à l'intérieur de ces accolades les enfants dessinent l'image des éléments de l'ensemble en question. Naturellement, s'il y a un grand nombre d'éléments dans l'ensemble, cela devient rapidement fastidieux. S'il faut, par exemple, dessiner à la suite vingt garçons, cela peut constituer pour les enfants, et même peut-être pour certains maîtres, une difficulté insurmontable, et c'est là qu'intervient le langage. Il permet de dire : « L'ensemble de tous les garçons de la classe » et au bout d'un certain temps, les enfants sauront l'écrire et le lire. Peu à peu, de la sorte, la parole écrite prend la place de l'image comme symbole du sujet dont on parle. Au lieu de mettre des petits dessins entre les accolades, on y fait figurer des mots. Mots et images sont des symboles, tout comme l'expression verbale. Ils représentent les objets réels, les personnes, les éléments de l'ensemble.

Là encore, il est important de rappeler aux enfants que le mot « arbre » n'est pas un arbre. Il nous rappelle un arbre, c'est tout. Le mot « bleu » n'est pas lui-même bleu, et il n'est pas indispensable de prendre de la craie bleue pour l'écrire au tableau. Le *mot « bleu »* peut donc fort bien être blanc. C'est par convention qu'il nous rappelle la couleur bleue.

Fig. 15 LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE



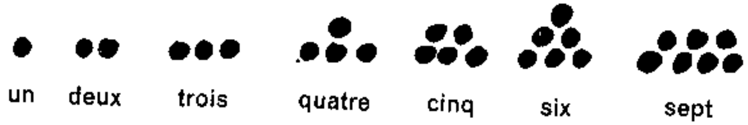
La lettre « N » placée devant l'ensemble désigne « l'attribut nombre » de l'ensemble. La « propriété-nombre » est indépendante du genre d'objets ou de personnes qui constituent l'ensemble ou du genre de symbole que nous utilisons.

En affrontant l'attribut numérique, on passe par les mêmes étapes : tout d'abord, utilisation des objets eux-mêmes, puis, quand les enfants ont commencé à saisir ce qu'est la propriété d'être deux, on recourt au mot « deux ». La symbolisation se fait d'abord à l'aide de deux images dans les accolades, puis à l'aide de bâtonnets ou de points n'ayant plus aucun caractère représentatif des objets de l'ensemble. A partir de là, on peut écrire le mot « deux », puis passer au chiffre « 2 ». Mais ce chiffre « 2 » n'est pas lui-même « deux » – il nous rappelle simplement la propriété commune de tous les ensembles qui ont pour attribut « deux ». Il nous rappelle une certaine catégorie d'ensembles qui ont la propriété de « dualité » (quelle que puisse être la nature des éléments – personnes ou choses – qui les composent), de même que le mot « rouge » nous rappelle une certaine classe d'objets qui ont la propriété de « rougeur ».

1.14. *Aspects cardinal et ordinal du nombre*

Avant de jouer à des jeux relatifs à l'ordre, il faut que la notion d'ordre soit bien associée à celle de quantité ; autrement dit, il nous faut maintenant associer l'aspect cardinal et l'aspect ordinal du nombre. Il faut encourager les enfants à jouer à des jeux qui les amènent à saisir le lien qui existe entre « un de plus » et « le suivant » ou entre « un de moins » et « le précédent ». Une fois qu'ils auront saisi, ils sauront que tout nombre a un précédent et un suivant. Cela les prépare à l'idée de « premier », « second », « troisième », « quatrième », etc. et les habitue à penser en termes d'ordre de succession.

Fig. 16 APPRENDRE A COMPTER



Quand ils sont parvenus à ce stade, on peut leur donner les « mots nombres », par exemple écrits sur des morceaux de carton. Ces « mots » ne doivent pas être représentés par leurs symboles numériques « 1 », « 2 », « 3 », etc., mais par leur expression verbale écrite « un », « deux », « trois », etc. Si la notation d'ordre est bien installée, on peut inviter les enfants à ranger ces cartons dans l'ordre. Ils devront poser d'abord le mot « un », puis le mot « deux », et ainsi de suite. Savoir faire cela, c'est savoir « compter ». C'est en voyant jusqu'où l'enfant peut aller de la sorte qu'on voit jusqu'où il sait compter. Quand un enfant dit qu'il sait compter jusqu'à cent, ce que cela devrait signifier, c'est que, si on lui donne les cent premiers cartons, il est capable de les disposer en ordre. Voilà un jeu qu'il faut toujours avoir sous la main et qu'il faut faire jouer souvent.

On peut se servir de ces plaquettes-nombres pour jouer à des jeux de correspondance terme à terme avec d'autres ensembles. Par exemple, si on a un ensemble composé d'une orange, d'une pomme et d'une banane, on peut jouer en prenant d'abord les trois premiers mots, *dans l'ordre correct*, et les mettre, un par un, en correspondance avec les éléments de l'ensemble de fruits. On peut attribuer le « un » à la pomme, le « deux » à l'orange et le « trois » à la banane, mais, bien entendu, il n'est pas indispensable de s'en tenir à cet ordre. Nous avons vu, en effet, que l'ordre des éléments d'un ensemble est sans importance. Par contre, l'ordre des éléments de l'ensemble des mots-nombres est essentiel. Le tout est de commencer par le « un », mais on peut tout aussi bien l'attribuer à la banane qu'à un autre fruit.

Si on a bien pris les mots-nombres dans l'ordre correct, le dernier mot nombre détermine le « nombre cardinal » de l'ensemble d'objets. C'est cela qu'on veut dire quand on parle de « compter les éléments d'un ensemble ». Il faut multiplier les activités de ce genre, en se rappelant que le fait de se borner à faire compter « un, deux, trois, quatre, cinq... » a beaucoup moins de signification que de faire choisir les mots « un », « deux », « trois », « quatre »... et de les faire mettre en correspondance, terme à terme, avec les éléments d'ensembles matériellement réalisés.

Naturellement, il faut, de même, par la suite, jouer des jeux analogues avec les chiffres « 1 », « 2 », « 3 »,... On peut, par exemple, pour commencer, faire mettre en correspondance avec les éléments de l'ensemble à la fois les plaquettes-mots et les plaquettes-chiffres. Pour commencer, on se limitera aux nombres de un à neuf.

1.15. *Ensemble d'ensembles, et ensemble d'ensembles d'ensembles*

Il convient de consacrer une série de jeux aux changements d'univers qui peuvent se produire au cours d'une même leçon. Par exemple, à un moment donné on pense à l'univers des enfants qui sont dans la classe et, plus tard dans la même leçon, il se peut qu'on pense à *l'univers des ensembles d'enfants*, ce qui est différent. Comme il est peut-être un peu abstrait pour les enfants de penser à l'univers de tous les ensembles possibles d'enfants, on peut se contenter de les amener à penser à des univers d'ensembles particuliers d'enfants.

Pour nous faire mieux comprendre, exposons en détail un jeu à partir duquel on peut en créer de semblables. Faisons asseoir les enfants à des tables ou à des bureaux, à leur place habituelle. Par exemple, mettons quatre enfants autour de chaque table, ou deux enfants par banc, et parlons de « tablées » d'enfants. Dans ce cas, en plus de l'univers des enfants de la classe, il y aura un autre ensemble de base auquel on pourra penser pendant la leçon – l'univers des tables (ou celui des bureaux).

On peut maintenant commencer à jouer à établir des correspondances, terme à terme, entre les ensembles appartenant à ces deux univers. Par exemple, on peut jouer à faire correspondre les tablées d'enfants et les tables, de sorte que dans un univers il y aura des tablées (ce sont des ensembles de quatre enfants qui sont les éléments de l'univers) et dans l'autre univers il y aura des tables (les tables seront les éléments de cet univers). Si, autour de chaque table, il y a quatre enfants assis, s'il n'y a aucune table libre, et s'il n'y a pas d'enfants debout, il y a autant de tables que de tablées d'enfants. Dans ce cas, il y a correspondance terme à terme entre un ensemble des tables et un ensemble des tablées (Ce n'est pas une correspondance terme à terme entre l'ensemble des tables et l'ensemble des enfants).

Considérons le cas suivant. Imaginons (ou disposons) cinq tables et autour de chaque table imaginons quatre enfants. Nous pouvons,

dans ce cas, mettre en correspondance terme à terme l'ensemble des « quatuors » (permettez-nous d'appeler ainsi, pour les besoins de la cause, les groupes de quatre enfants) assis autour de chaque table avec l'ensemble des tables. Il y a autant de quatuors que de tables. Si, par contre, nous tentions de mettre en correspondance, un à un, l'ensemble des enfants avec l'ensemble des tables, nous échouerions lamentablement, parce qu'il y a bien plus de cinq enfants et qu'il n'y a que cinq tables ; quand on arriverait au sixième enfant, il n'y aurait plus de table pour lui. Il y a manifestement plus d'enfants que de tables, mais il y a autant de « quatuors » que de tables.

On peut pousser le jeu plus loin et imaginer que chaque enfant ait trois livres. Dans ce cas, nous pensons à des « ensembles de livres » mais pas à n'importe quels ensembles : à des ensembles de trois livres à des « trios » de livres. Nous disposons donc maintenant d'un plus grand nombre d'univers. Nous avons l'univers des enfants, l'univers des « quatuors » d'enfants, l'univers des « trios » de livres et l'univers des livres. On peut en jouer et, par exemple, demander : « Quels sont ceux qu'on peut mettre en correspondance (faire aller) un à un ? » Ainsi, l'ensemble des trios de livres peut être mis en correspondance avec l'ensemble des enfants. Il y a autant de trios de livres que d'enfants assis autour des tables. Il y a également autant de « quatuors de trios » de livres qu'il y a de « quatuors » d'enfants, et ainsi de suite.

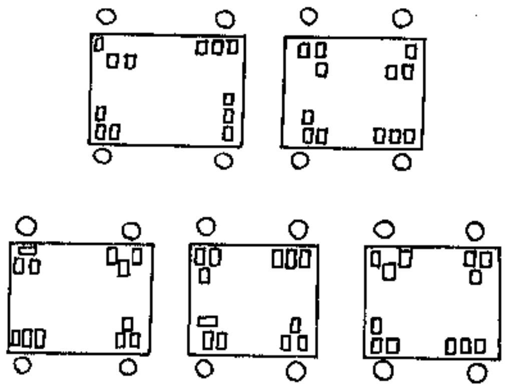
Mais il y a, naturellement, beaucoup plus de livres qu'il n'y a d'enfants. Si on essayait d'établir une correspondance terme à terme entre le nombre des livres et le nombre des enfants, on manquerait d'enfants bien avant de manquer de livres, aussi bien à une table quelconque que dans la totalité de la classe.

On est en présence d'univers aux contenus numériques croissants. L'univers numériquement le plus faible est celui des tables, qui a la même propriété numérique que celui des « quatuors » d'enfants. L'univers des enfants est déjà plus important en nombre, et a la même propriété numérique que l'univers des « trios » de livres. Quant à l'univers des livres, c'est celui qui a le plus grand contenu numérique. Ainsi, l'ordre ascendant est : – tables, enfants, livres. Si on veut calculer le nombre de livres qu'il y a sur toutes les tables, il faut d'abord chercher le nombre de livres de chaque « trio », c'est-à-dire trois, puis le nombre de trios par table, qui est quatre, puis le nombre de tables, qui est cinq. Comment calculer le nombre total de livres, ce n'est pas ici notre propos : c'est du niveau de l'école primaire, non de la maternelle[1].

Il faut faire jouer des jeux de ce type aux enfants les plus avancés de l'école maternelle, pour les familiariser d'abord avec les ensembles

1. Dans les écoles anglaises où la voie abstractive de l'apprentissage mathématique a été mise au point, le Cours préparatoire, la classe de 11e fait partie de l'école maternelle. Les enfants n'entrent à l'école primaire qu'après avoir appris à lire. Il s'ensuit que des exercices décrits comme appartenant à l'école maternelle seront faits au Cours préparatoire.

Fig. 17 ENSEMBLE D'ENSEMBLES D'ENSEMBLES



Nous avons 5 « tablées » (ou ensembles) de chaque fois 4 enfants et chaque enfant a un ensemble de 3 livres.
Nous pouvons établir une correspondance terme à terme entre les tables, les « tablées » (ensembles d'enfants) et entre les enfants et les ensembles de livres, *mais non* entre les tables et les enfants individuellement ou entre les tables et les livres ou entre les enfants et les livres pris individuellement. A une étape ultérieure ces expériences conduiront à la multiplication des nombres.

d'ensembles, puis avec les ensembles d'ensembles d'ensembles. Il existe de nombreux exemples dans la vie de tous les jours où l'on voit de petits récipients aller dans des récipients plus grands, eux-mêmes contenus dans des récipients encore plus grands. Il faut à toute occasion examiner la possibilité de les mettre en correspondance biunivoque, et faire découvrir les relations entre les propriétés numériques de chaque ensemble et ensemble d'ensembles.

1.16. *Emploi des attributs mathématiques appliqués aux ensembles d'ensembles*

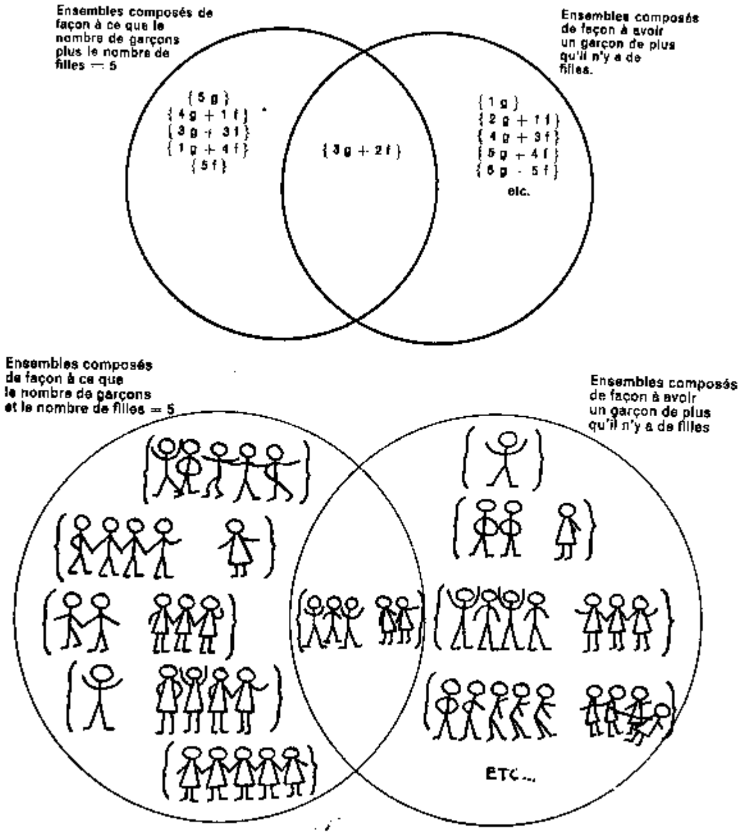
Considérons deux sortes d'objets quelconques, que ce soient des jetons verts et des jetons rouges, des garçons et des filles, des tasses et des soucoupes, des couteaux et des fourchettes, et ainsi de suite. Décidons de prendre les garçons et les filles. Nous avons donc l'univers des enfants, l'ensemble des garçons et son complément l'ensemble des filles ou, si vous préférez, l'ensemble des filles et son complément l'ensemble des garçons. Puis décidons que notre univers va se composer de n'importe quels ensembles formés de garçons et de filles, ou seulement de garçons ou seulement de filles. En d'autres termes, ce sont des *ensembles d'enfants* qui sont les éléments de notre nouvel univers, et

tout ensemble d'enfants qu'il sera possible de construire dans la classe sera un élément de cet univers.

Et maintenant, pour constituer un ensemble à partir de tels éléments, il faut énoncer un attribut. Quel genre d'attributs de tels ensembles peuvent-ils avoir? Admettons que la somme de leurs éléments soit toujours égale à cinq – que le nombre total des enfants composant l'ensemble soit dans chaque cas de cinq. De cette manière, on peut constituer un ensemble de cinq enfants de plusieurs manières possibles à partir de garçons et de filles. On peut avoir un ensemble de cinq filles, ou un ensemble de quatre filles et un garçon, ou un ensemble de trois filles et deux garçons, et ainsi de suite. Tous ces ensembles auront le même attribut, celui d'avoir cinq éléments.

Prenons un autre exemple. On peut décider de penser à des ensembles d'enfants dans lesquels il y aura toujours un garçon de plus que

Fig. 18 ENSEMBLES D'ENSEMBLES



de filles. Dans ce cas, un ensemble composé uniquement d'un garçon répondrait à notre exigence, puisqu'un est plus que zéro, et qu'il suffirait qu'il n'y ait pas de fille. De même, on pourrait avoir deux garçons et une fille, trois garçons et deux filles, quatre garçons et trois filles, etc. Tant qu'il y a assez d'enfants dans la classe, on peut faire beaucoup plus d'ensembles en appliquant cette dernière règle qu'en appliquant la précédente, puisqu'on peut faire autant d'ensembles qu'il y a d'enfants.

Et maintenant, on peut poser la question de savoir s'il y a des ensembles d'enfants qui possèdent ces deux attributs à la fois. On peut faire un ensemble d'enfants dans lequel, à la fois, il y ait cinq enfants et un garçon de plus que de filles. Les enfants ne sont pas longs à découvrir qu'il suffit d'avoir trois garçons et deux filles. Cela fait un garçon de plus et cela donne un total de cinq enfants.

Pour faire l'exercice de découverte de l'intersection de ces deux ensembles, on peut tracer à la craie, dans la cour, un grand diagramme de Venn. On dispose des ensembles de cinq enfants, formés de diverses manières, dans le premier cercle, et des enfants comprenant un garçon de plus que de filles dans le second cercle. Dans l'intersection des deux cercles ne peuvent prendre place que les ensembles possédant les deux attributs à la fois, c'est-à-dire se composant de trois garçons et de deux filles. Bien entendu, on pourrait également former des ensembles ne possédant ni l'une ni l'autre de ces deux propriétés, n'ayant ni cinq enfants ni un garçon de plus que de filles, et voir où ils devraient se placer. Les quatre manières de grouper les enfants en fonction des deux attributs choisis se trouveraient ainsi concrétisées.

On voit qu'on est en présence de la réplique exacte des diagrammes de Venn que les enfants ont formés précédemment avec des attributs immédiatement perceptibles (couleur, forme, etc.). Cette fois, les attributs sont, en un sens, « abstraits », puisqu'on ne *voit* pas cinq, qui n'est qu'une propriété numérique des choses qu'on voit.

1.17. *Jeux d'addition*

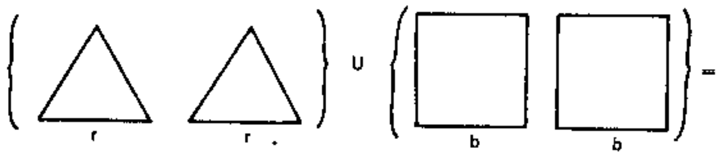
A chaque réunion d'ensembles distincts correspond l'addition de leurs propriétés numériques. On peut donc faire des jeux d'addition parallèles aux jeux de réunion d'ensembles, en prenant les nombres correspondants. Mais il faut bien expliquer aux enfants la différence de terminologie.

Quand on additionne deux nombres, on calcule la propriété numérique de la réunion de deux ensembles dont on connaît les propriétés numériques. Par exemple, dans un ensemble il y a deux garçons et dans l'autre trois : « deux » et « trois » sont les propriétés numériques de ces ensembles. Puis on effectue la réunion de ces ensembles, en réunissant les deux garçons aux trois garçons, et on calcule la propriété numérique en additionnant « deux » et « trois ». On n'additionne pas « deux garçons » et « trois garçons », on additionne « deux » et « trois ».

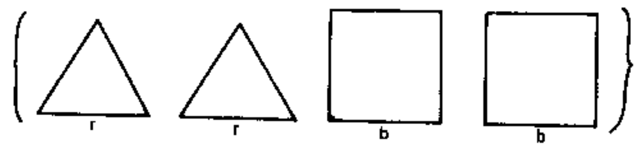
On réunit un ensemble de garçons à un autre ensemble de garçons, et on additionne le *nombre* de garçons de l'un des ensembles au *nombre* de garçons de l'autre ensemble.

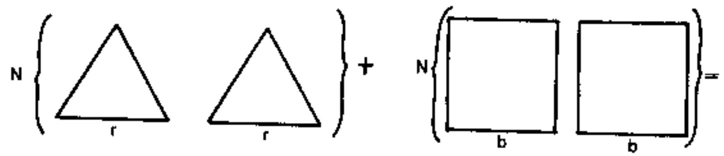
Il faut pratiquer de nombreux exemples de ces jeux d'addition, aux deux niveaux – celui des réunions d'ensembles et celui de l'addition des propriétés numériques des ensembles. A force de pratique, les enfants comprendront réellement de quoi il s'agit et la voie sera libre pour l'acquisition ultérieure des « faits numériques » concernant l'addition, puis, plus tard, pour aborder des exemples analogues mais plus complexes.

Fig. 19 L'ADDITION CORRESPOND AU NIVEAU DU NOMBRE A LA RÉUNION D'ENSEMBLES DISJOINTS



La réunion de l'ensemble des petits triangles rouges et de l'ensemble des petits carrés bleus nous donne :





deux	plus	deux	est égal	quatre
2	+	2	=	4

« L'attribut nombre » de l'ensemble des petits triangles rouges est « deux » (ou « 2 ») et « l'attribut nombre » de l'ensemble des petits carrés bleus est « deux » (ou « 2 »). Si nous additionnons « l'attribut nombre » 2 à l'autre « attribut nombre » 2 nous aurons « l'attribut nombre » de l'ensemble-réunion, c'est-à-dire « 4 ».

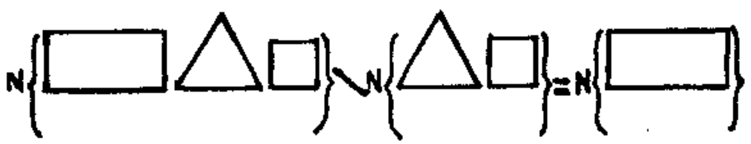
1.18. *Jeux de soustraction*

Toutes les fois que l'on trouve un ensemble-différence entre un ensemble et l'un de ses sous-ensembles, cela correspond à l'opération arithmétique de soustraction. Si, par exemple, on a un ensemble d'enfants de la classe, et que le nombre de ses éléments est de trente, et qu'on a un sous-ensemble de garçons contenant quatorze éléments, l'ensemble-différence entre l'ensemble des enfants et le sous-ensemble des garçons, c'est-à-dire l'ensemble différence des filles, va avoir une propriété numérique qu'on pourra calculer à partir des propriétés numériques, connues, de l'ensemble des enfants et du sous-ensemble des garçons. Ce calcul, c'est une soustraction. Toute formation d'un ensemble-différence correspond à une soustraction.

On trouve les ensembles-différences entre ensembles et sous-ensembles en enlevant un sous-ensemble, mais on soustrait le *nombre* d'éléments du sous-ensemble du *nombre* d'éléments de l'ensemble pour trouver la différence entre ces *nombres*. Là encore, il faut soigneusement expliquer aux enfants qu'il y a deux niveaux, le niveau des ensembles et le niveau des nombres. Il faut bien faire la distinction et bien expliquer la terminologie.

Fig. 20 LA SOUSTRACTION CORRESPOND A L'ENSEMBLE-DIFFÉRENCE

L'ensemble-différence entre l'ensemble qui comprend le grand rectangle jaune, le grand triangle bleu et le petit carré rouge et le sous-ensemble constitué par le grand triangle bleu et le petit carré rouge est l'ensemble constitué par le grand rectangle jaune.



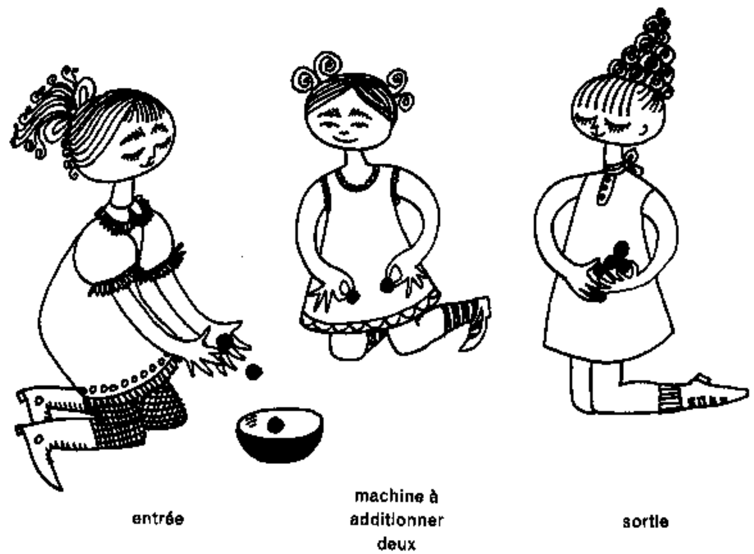
Si nous prenons la propriété nombre du sous-ensemble (2) de la propriété nombre d'un ensemble (3) nous trouvons la propriété nombre de l'ensemble-différence : 1.

1.19. *Jeux « état-opérateur » avec l'addition*

Tout élément d'addition peut être considéré comme un opérateur, qui « opère » sur un nombre et produit un autre nombre. C'est un peu comme une machine, qui opère sur ce qu'on y a introduit « à l'entrée » et qui donne autre chose « à la sortie ». Par exemple, on peut imaginer une « machine à ajouter deux », et chaque fois qu'on y introduit quelque chose, elle produit, à la sortie, quelque chose qui est « deux de plus » qu'à l'entrée.

On peut organiser beaucoup de jeux de ce genre à la maternelle. Pour commencer, les « machines » ne seront pas représentées symboliquement sur du papier ou au tableau, mais incarnées par des enfants. On prendra trois enfants, l'un chargé de l'« entrée », l'autre de la « sortie », et un troisième enfant, entre les deux, jouant le rôle de la machine à additionner deux. On peut même imaginer que cet « opérateur » soit associé à un « fournisseur » chargé de le réapprovisionner. L'enfant « entrée » décide, par exemple, de mettre cinq jetons, et on les compte un à un. L'opérateur de la machine les prend et y ajoute deux jetons venant du fournisseur, puis passe le tout à l'enfant « sortie », qui compte et trouve qu'il y a sept jetons.

Fig. 21 JEU ÉTAT — OPÉRATEUR — ÉTAT AVEC ADDITION



Chaque jeton ou objet est placé séparément et compté.
On fait de même à la sortie et toute l'opération est notée par le groupe d'élèves : $3+2=5$.
De la même manière on réalise des jeux état — opérateur — état avec la soustraction.

On répétera souvent ce jeu, avec plusieurs sortes de « machines », et en intervertissant les enfants chargés des différents rôles, afin qu'ils puissent tous voir les divers aspects de l'opération : réunion d'ensembles, addition des propriétés numériques, rôle de la machine en tant qu'opérateur, changeant chaque fois l'« état-entrée » en « état-sortie ». On pourra, dans ces jeux, baptiser ces machines « Machines à Additionner ».

1.20. *Jeux « état-opérateur » avec la soustraction*

Toutes les fois que l'on trouve un ensemble-différence, à cette opération correspond la recherche de la différence entre deux nombres. Au sous-ensemble qu'on enlève correspond le nombre qu'on soustrait. Là encore, on peut imaginer une « machine », avec une « entrée », une « sortie », et un « mécanisme ». Là encore, on met un enfant à l'entrée, un enfant au mécanisme et un enfant à la sortie, et un quatrième enfant comme fournisseur.

Supposons qu'on décide de faire une « machine à ôter trois ». On met cinq jetons à l'entrée, mais cette fois l'opérateur prend trois jetons et les passe au fournisseur, puis donne le reste à l'enfant-sortie. On voit que, dans ce cas, la tâche de l'opérateur est d'enlever de ce qui a été introduit le nombre voulu d'objets.

Mais il peut se poser un petit problème, si la quantité introduite à l'entrée est trop faible. Supposons, toujours avec notre « machine à ôter trois », qu'on n'ait mis que deux jetons à l'entrée. Une telle entrée est impossible avec cette machine, et sera refusée, c'est-à-dire que l'opérateur-machine va rendre les jetons à l'opérateur-entrée, n'étant pas en mesure de fournir à la sortie. Cependant, il faut que les enfants sachent qu'il y a un cas où la machine peut fonctionner : c'est celui où la quantité introduite à l'entrée est suffisante mais où il ne sort rien de l'autre côté. Dans notre exemple, si on met trois à l'entrée, la machine accepte de fonctionner, l'opérateur-mécanisme enlève les trois jetons et passe à l'enfant-sortie un récipient dans lequel il n'y a aucun jeton, ou, encore, fait le geste de passer « rien », puisque la production de la machine est égale à « aucun objet ».

Ici aussi, il faut jouer de nombreux jeux, en y introduisant toutes les conditions particulières possibles, afin que les enfants y acquièrent une grande pratique.

A mesure que les enfants s'habituent aux « machines à ajouter et à ôter », il va falloir mettre au point un système de notation pour conserver trace des opérations, d'abord avec des jetons, puis à la craie au tableau ou sur le sol de la classe ou de la cour, et ainsi de suite. On développera la symbolisation, d'abord en représentant la machine par un dessin, avec des croquis représentant les jetons ou autres objets introduits, puis avec les noms des nombres, et enfin avec les chiffres – mais il ne faut attendre des enfants aucune forme de symbolisation tant qu'ils ne sont pas absolument « rodés » avec la machine-jeu.

1.21. *Chercher ce qu'on a mis dedans*

La première chose à faire avec une « machine » comme celle que nous venons de décrire, c'est de jouer avec elle. Il est clair que toute machine de ce genre, qu'elle soit à additionner ou à soustraire, comporte un côté entrée, un mécanisme opérateur et un côté sortie, et si on sait ce qu'on met dedans et ce que la machine fait, on peut demander : « Qu'est-ce qu'on reçoit à la sortie ? » C'est à cela qu'on a joué jusqu'à présent, mais on peut faire autre chose.

Si on nous dit ce qu'on trouve à la sortie, et ce que la machine fait, nous pouvons demander : « Qu'a-t-on mis dedans à l'entrée ? »

Ou encore, si on connaît ce qui a été mis à l'entrée et ce qui se retrouve à la sortie, on peut demander : « Que fait la machine ? »

Ces deux questions sont plus difficiles pour les enfants que la première, et il ne faut pas les poser trop tôt. Cependant, les enfants finissent par les trouver faciles, et cela les aide à comprendre certains problèmes ultérieurs.

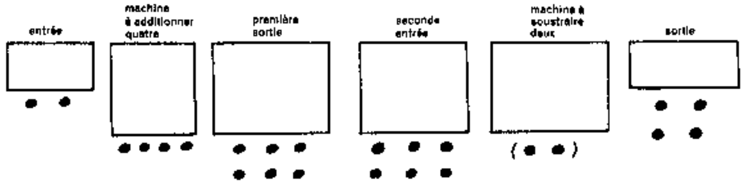
Ainsi, quelle que soit la « machine », on peut poser trois types de questions, aussi bien pour l'addition que pour la soustraction. On peut même arriver à les symboliser, mais attention de ne pas le faire trop tôt, avant que les enfants aient compris ce que représentent ces problèmes et comment la machine fonctionne.

1.22. *Machines doubles*

Les machines décrites jusqu'à présent peuvent être mises « bout à bout ». Autrement dit, le produit de la première machine peut être introduit dans une seconde machine, qui, à son tour, sortira un produit qui sera le produit de la machine double. On peut, de cette manière, combiner deux machines à additionner, ou deux machines à soustraire, ou une machine à additionner et une machine à soustraire. Supposons que l'on constitue une machine double, en juxtaposant une « machine à ajouter quatre » avec une « machine à retirer deux ». L'enfant chargé de l'entrée décide du nombre de jetons à introduire, par exemple trois, qu'il place dans un couvercle ou tout autre récipient analogue, passant ensuite le tout à l'opérateur de la première machine Celui-ci « ajoute quatre » fournis par le fournisseur et pose le premier résultat dans un plateau intermédiaire, pour que tous les joueurs puissent le voir. Puis le plateau intermédiaire est ramassé par l'opérateur de la seconde machine, qui retire deux jetons et les remet au fournisseur, puis pose ce qui reste dans un autre plateau, qu'il donne à l'enfant chargé de la sortie. Ce dernier le montre à tous les joueurs. Pendant toute la partie, un « enregistreur » est chargé de noter ce qui se passe sur une ardoise.

Là encore, il peut y avoir des incidents qui « font tomber la machine en panne », par exemple s'il n'y a pas assez de jetons pour faire fonctionner l'une des parties de la machine. Il faut prévoir des exemples de ce genre.

Fig. 22 MACHINES DOUBLES. IL FAUT UN ENFANT POUR CHAQUE SECTION



1.23. *Variantes de ces machines*

Nous avons également imaginé des jeux dans lesquels la machine était simplement une « machine à ajouter » ou une « machine à retirer » et non plus une « machine à ajouter quatre » ou une « machine à retirer trois », laissant au hasard de décider du nombre qu'il fallait ajouter ou retrancher. C'est là une variante que l'on peut introduire avec toutes les « machines » décrites jusqu'à présent, car elle a l'avantage de présenter des problèmes de difficultés variables dans le temps. De même, on peut laisser au hasard le soin de décider si la machine sera à additionner ou à soustraire.

On joue ce genre de jeux avec un paquet de cartes, posées à l'envers, et sur chacune desquelles est porté un nombre, sous forme d'un mot ou d'un chiffre, et un autre paquet sur les cartes duquel sont inscrits les mots « ajouter » ou « retirer ». On bat les cartes et les enfants tirent.

Supposons maintenant que l'on joue une partie sur « machine double » avec ce système. L'enfant chargé de l'introduction des données tire une carte – « trois » par exemple. Le premier opérateur de machine tire à son tour une carte du tas « quelle machine » et du tas « nombres ». Supposons qu'il ait tiré « ajouter » et « trois » : il fait donc marcher une machine à ajouter trois. L'opérateur prend la donnée (3), y ajoute trois, et pose le produit sur le plateau intermédiaire. L'opérateur de la seconde machine tire à son tour deux cartes : supposons que ce soit « retirer » et « quatre ». Il prend le plateau intérmédiaire, avec ses six jetons, en retire quatre et passe le plateau à l'enfant chargé de la sortie. On peut, de la sorte, avec un nombre relativement peu élevé de cartes, mettre en pratique beaucoup d'exemples. On y ajoutera la symbolisation et la notation selon le degré de développement atteint par les enfants.

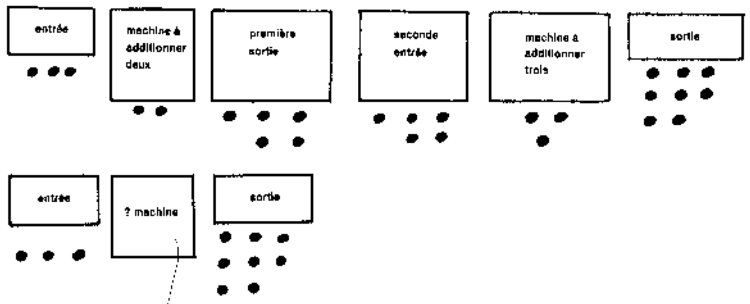
1.24. *Machines équivalentes*

Lorsqu'on a mis bout à bout deux machines, on peut se demander « s'il serait possible de remplacer ces deux machines par une seule machine faisant le même travail ? ». Par exemple, si, au bout d'une « machine à ajouter deux » on mettait une « machine à ajouter trois »

pourrait-on les remplacer par une seule machine produisant le même résultat global ? Pour nous, il est évident que c'est possible et qu'il faudrait une « machine à ajouter cinq », car, quel que soit le nombre introduit, on y ajoute toujours deux, puis trois, et c'est l'ensemble de ces deux opérations qui détermine la somme. Si on remplaçait, donc, les deux machines par une seule, ajoutant cinq, on obtiendrait toujours le même résultat pour une même donnée introduite. La « machine à ajouter cinq » équivaudrait à une « machine à ajouter deux » suivie d'une « machine à ajouter trois ».

Une fois les enfants rompus à l'utilisation de ces « machines », il faut les encourager à rechercher des machines équivalentes, car cette recherche ne les aidera pas seulement à apprendre et à se rappeler les tables : elle leur facilitera la compréhension ultérieure des lois d'associativité et de commutativité de l'addition. On pourra d'ailleurs leur faire chercher, aussi, quelle est la machine équivalant à une machine à ajouter suivie d'une machine à retirer, ou à une machine à retirer suivie d'une machine à ajouter. Par exemple, une machine à ajouter deux suivie d'une machine à retirer trois va toujours être équivalente à une machine à retirer un. Mais, attention ! C'est assez difficile pour des enfants de cet âge, et il ne faut pas vouloir aller trop vite. Il leur sera beaucoup plus facile de trouver l'équivalence de deux machines à additionner consécutives, que de découvrir celle d'une machine à additionner suivie d'une machine à soustraire, ou vice-versa.

Fig. 23 MACHINES ÉQUIVALENTES : UNE MACHINE FAIT LE TRAVAIL DE DEUX MACHINES



Parvenus à ce point, certains enfants voudront peut-être aller au delà de neuf. Il faut les laisser faire, et même les y encourager, du moment que le concept de valeur de position ne vient pas s'y surajouter. Ce que nous voulons dire par là, c'est que la notation numérale « 15 », par exemple, ne devra pas être considérée autrement que comme une notation abrégée du mot « quinze », et qu'il ne faudra pas surcharger la cervelle des enfants en essayant de leur faire voir « quinze » comme étant « une fois dix et cinq unités ». Cette découverte viendra, ainsi que d'autres, plus tard, quand on étudiera les puissances.

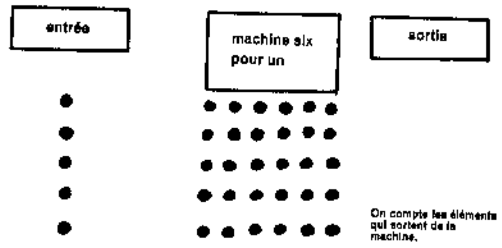
1.25. *Machines à ensembles d'ensembles, à disposition géométrique*

Nous avons déjà vu quelques jeux dans lesquels on établit une correspondance terme à terme entre des ensembles d'objets et des ensembles d'ensembles d'objets. On peut les jouer avec la planchette à trous [1]. Supposons qu'on invente une « machine à six pour un » et qu'on y introduise un nombre de cinq unités.

On disposera, à un bout de la planchette, une colonne de cinq fiches, de préférence un peu espacées, mais d'une manière régulière. En face de chacune de ces cinq fiches, mais en laissant également un espace, on plantera une rangée de six fiches. On a donc, d'abord, la colonne, verticale, de cinq fiches représentant la donnée introduite dans la machine, puis cinq rangées, horizontales, de six fiches chacune, c'est-à-dire, en définitive, un ensemble de cinq ensembles de six fiches chacun, représentant le « produit » de la machine.

Car on peut, en effet, considérer ce dispositif, au niveau des nombres, comme une machine dans laquelle on introduit les fiches de la première colonne, et qui va « moudre » cette denrée de base et « sortir » le nombre total de fiches de toutes les rangées construites. Dans cet exemple particulier, on a introduit le nombre « cinq » dans une « machine à six pour un », et on retrouve à la sortie le nombre « trente ».

Fig. 24 MACHINES D'ENSEMBLES D'ENSEMBLES. EXERCICE COMPRENANT UN « PATRON »



Ce jeu se joue sur la planche à trous.

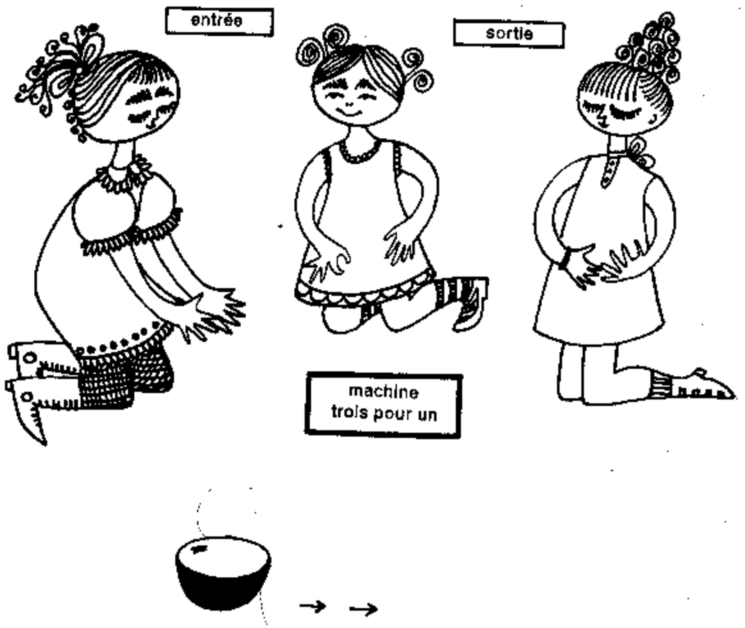
D'ailleurs, cinq et six sont peut-être un peu grands pour commencer. La maîtresse trouvera sans doute qu'il vaut mieux commencer avec deux, trois ou quatre, le nombre total de fiches de la planchette étant alors plus facile à compter. En tout cas, ces machines à « deux pour un », « trois pour un » ou « quatre pour un » intéressent énormément les enfants, car les nombres y croissent beaucoup plus rapidement que dans les machines à additionner.

1. Laboratoire de mathématique O. C. D. L.

1.26. *Machines à ensembles d'ensembles, mais sans disposition géométrique (machines « à gonfler »)*

Il s'agit du même genre de jeu, à la différence qu'il ne se joue pas sur la planchette à trous et que, par conséquent, il ne se présente pas sous un aspect géométrique. On revient aux machines du premier type, avec un enfant à l'introduction des données, exécutant le même travail. La machine est étiquetée « deux pour un », « trois pour un », et ainsi de suite.

Fig. 25 MACHINES D'ENSEMBLES D'ENSEMBLES, SANS « PATRON »



Supposons qu'il s'agisse d'une machine à « deux pour un » et que l'enfant chargé de l'introduction y mette quatre unités quelconques. Il est indispensable, tout au moins au début, de traiter séparément chaque jeton introduit, car à ce point du développement l'opérateur n'a pas besoin encore de savoir combien font « deux fois quatre ». Nous avons utilisé, avec succès, des billes [1], en insistant pour que chaque bille soit introduite séparément, et de telle manière que tout le monde la voie bien, et l'entende bien, entrer (nous la faisions tomber dans un plat en métal). L'opérateur de la machine prend la bille et met aussitôt

1. A Paris, nous utilisons les éléments des réglettes emboîtables O. C. D. L.

deux jetons dans le plateau de sortie, en s'arrangeant, là encore, pour que tout le monde voie et entende bien ce qui se passe. On traite de même la seconde bille, et ainsi de suite, de sorte qu'à l'entrée on entend « un », « deux », « trois », « quatre » et à la sortie « un, deux », « trois, quatre », « cinq, six », « sept, huit », encore que cette manière de compter ne soit pas obligatoire. Ainsi, les enfants voient qu'avec une machine à « deux pour un », à toute entrée de quatre correspond une sortie de huit. Avec ces machines, on peut laisser dans la machine les données introduites, et faire sortir des jetons d'un autre modèle, empruntés à un « fournisseur », afin que les enfants ne confondent pas cette opération avec une addition.

Quelquefois, pour nous mettre à la portée des enfants, nous avons parlé ici de « machines à gonfler », car, en effet, on « gonfle » ce qui est fourni à l'entrée et pour chaque unité introduite on en obtient deux, trois, quatre, etc., à la sortie. Il est clair qu'on est en train d'ouvrir la voie à la multiplication, mais cependant on ne multiplie pas encore effectivement pour l'instant.

1.27. *Machines à rétrécir*

Voilà l'inverse des machines à gonfler. Au lieu de machines à « deux pour un », « trois pour un », etc., on a maintenant des machines à « un pour deux », « un pour trois », etc. Par exemple, avec une machine à « un pour deux » ou « machine à couper en deux », il est convenu que pour deux jetons qui entrent dedans, il n'en sort qu'un. Nous avons appelé ces machines « machines à rétrécir » par opposition aux « machines à gonfler ».

En jouant avec ces machines, les enfants peuvent tomber sur une difficulté analogue à celle qui s'était présentée pour la soustraction : la machine ne fonctionne pas toujours. Il n'y a pas toujours un nombre entier de « deux », de « trois » ou de « quatre » dans le nombre introduit. Il est donc préférable, dans les débuts, de veiller à ce que cela ne se produise pas, afin que la machine à rétrécir fonctionne aussi simplement que la machine à gonfler. Si, par exemple, on joue avec une machine à « un pour deux », il faut amener les enfants à n'y introduire que des nombres pairs de jetons ou de billes. Ils les introduiront deux par deux, et la sortie se fera un par un. Tout le monde entendra, côté entrée, « un, deux », « trois, quatre », « cinq, six », « sept, huit » et, côté sortie, « un », « deux », « trois », « quatre ». On continuera avec des nombres pairs jusqu'à ce que les enfants aient bien compris ce qui se passe, puis on décidera d'introduire, par exemple, « cinq ». On entendra : « un, deux », « trois, quatre » et : « un », « deux » à la sortie, puis, du côté entrée « une bille », que la machine rejettera parce que ce n'est pas un groupe de deux, et que la machine ne « traite » que « par deux ». Parvenus à ce point, la route conduisant aux restes est toute tracée.

1.28. *Machines fractionnaires*

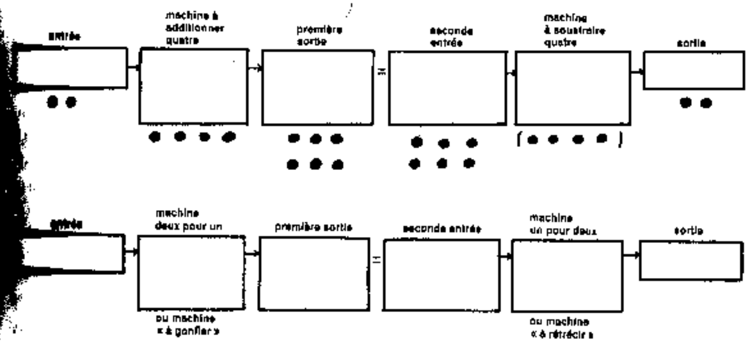
Il est très probable que certains enfants voudront généraliser jusqu'à des machines de ce genre, en demandant : « Pourquoi on ne ferait pas une machine où on mettrait trois, et qu'il n'en sortirait que deux ? » et ainsi de suite. Laissez les faire : les idées qu'ils en tireront seront intéressantes à exploiter par la suite (voir le manuel *Fractions*).

1.29. *Machines inverses*

Il est évident que quelqu'un demandera qu'est-ce qu'il faudrait comme machine pour revenir au nombre introduit au début. Par exemple, si on a une introduction de deux et une sortie de cinq, c'est qu'on a employé une machine à ajouter trois. Si, maintenant, on prend ce nombre de cinq comme donnée d'entrée, quelle machine faut-il prendre pour retrouver, à la sortie, deux, qui était la donnée d'origine ? Il ne faut pas longtemps aux enfants pour voir qu'il s'agit d'une machine à soustraire, à « retirer trois ».

Il ne faut pas beaucoup d'exemples de ce genre pour conduire les enfants à la généralisation selon laquelle, quand on inverse l'entrée et la sortie, on crée une « machine inverse », la machine à soustraire étant l'inverse de la machine à additionner, et la « machine à rétrécir » l'inverse de la « machine à gonfler » et inversement. Il ne faut négliger aucune de ces relations, traiter chacune séparément, et les pratiquer assez longtemps, pour que la généralisation se fasse même chez les enfants les plus lents.

Fig. 26 MACHINES « INVERSES » — MACHINES QUI NE FONT RIEN



Bien entendu, on arrive, en avançant, à des machines combinées encore plus compliquées que celles qui ont été décrites jusqu'ici. Au lieu d'avoir des machines doubles intéressant seulement l'addition et la soustraction, on aura combiné des machines à gonfler et des machines à rétrécir, ou encore des machines à additionner avec des machines à gonfler ou à rétrécir. On aura pu aller jusqu'à cinq machines et les enfants, si on les y encourage, sont capables d'imaginer des machines assez compliquées en vérité[1].

Dès lors, on peut se poser le problème de trouver les machines inverses de ces machines combinées. Avec un peu de pratique, les enfants découvriront que pour les réaliser, il n'y a qu'à remonter à l'envers et inverser chaque machine à son tour. Et cela leur sera d'autant plus facile qu'ils savent maintenant que l'inverse d'une machine à additionner est une machine à soustraire, et l'inverse d'une machine à gonfler une machine à rétrécir.

Prenons, par exemple, la machine à gonfler qu'est une machine à « trois pour un » – chaque fois qu'on y introduit un, il en ressort trois, et si on y introduit deux, il en ressort six. Supposons qu'on veuille maintenant trouver la machine qui, si on y met six, rend deux. Il est clair qu'il s'agit d'une machine à rétrécir à « un pour trois » : si on y met « trois » puis « trois », ce qui fait « six », il en sort « un » puis « un », ce qui fait « deux ». On découvre ainsi que l'inverse de la machine à « trois pour un « est la machine à « un pour trois ». Par un cheminement assez semblable, les enfants découvriront que l'inverse d'une machine à « un pour trois » est une machine à « trois pour un », mais il ne faut pas s'imaginer qu'il leur suffira d'avoir joué au jeu précédent pour faire cette nouvelle découverte : ils auront besoin de l'expérience même. Ils découvriront de même que l'inverse d'une machine à « deux pour trois » est une machine à « trois pour deux », et ainsi de suite.

Bientôt, les enfants découvriront que si on met bout à bout une paire de machines de ce genre, elles restituent, à la sortie, exactement ce qu'on y a mis à l'entrée. Par exemple, si on associe une machine à « trois pour un » à une machine à « un pour trois », et qu'on y introduise deux, il y apparaît d'abord « six » dans le plateau intermédiaire. Ce premier produit de six est alors introduit dans la seconde partie de la machine, qui réduit de trois à un. Comme on y introduit « trois » et « trois », il en ressort « un » et « un », c'est-à-dire « deux », et on se retrouve avec ce qu'on avait mis à l'entrée.

C'est là la propriété générale des inverses – si on met bout à bout deux machines inverses, on obtient à la sortie exactement ce qu'on avait mis à l'entrée. Ces machines combinées sont des « machines neutres » ou, mieux encore, dans cette phase du développement des concepts, des « machines à ne rien faire ».

1.30. *Encore des jeux état-opérateur*

En jouant tous ces jeux de machines, on joue des jeux « état-opérateur » : on part d'un *état d'entrée*, la machine constitue l'opérateur, et on obtient un *état de sortie* qui est le *nouvel état*.

1. On traite de ces machines plus complexes dans « Arithmétique et Algèbre du nombre naturel ».

On peut, avec la lumière, jouer un jeu « état-opérateur » très simple. Les « états » de la classe sont « éteint » et « allumé » et les opérateurs sont « appuie sur le bouton » et « ne touche pas au bouton ». Par exemple, supposons que la pièce est « éteinte ». On applique l'opérateur « appuie sur le bouton » et la pièce est « allumée ». On applique à nouveau l'opérateur « appuie sur le bouton » et la pièce est « éteinte ». Si on applique l'opérateur « ne touche pas au bouton » (« ne fais rien ») la pièce demeure dans l'état où elle se trouvait. Dans ce jeu, il n'y a que que deux opérateurs, « appuie » et « laisse », mais on peut construire une chaîne d'états et d'opérateurs, puis l'allonger ou la raccourcir comme il est expliqué dans le manuel (supposons, par exemple, qu'on ait deux lampes et un interrupteur pour chacune).

On peut aussi jouer à tourner sur place ; c'est assez simple. Un enfant se tient debout au milieu de la classe, et il peut faire face au tableau noir, à la porte, à la fenêtre et au fond de la classe, soit, en tout, quatre positions à angle droit, c'est-à-dire quatre états. Quant aux opérateurs, ils seront « à droite », « à gauche », « demi-tour » et « reste ». On peut d'ailleurs y ajouter « un tour complet ». Supposons qu'il soit, à l'origine, face au tableau. Si on lui dit « à droite », il se retrouve face à la porte. Si on lui dit alors « demi-tour », il se retrouve face à la fenêtre et si on lui dit « à gauche », il est face au fond. Un nouveau « demi-tour », et le voilà de nouveau face au tableau. Si on lui dit « reste » il sera encore face au tableau, et ainsi de suite.

Une fois que les enfants ont bien compris, on commence à jouer des « jeux de raccourcissement ». Par exemple, s'il est face au tableau et qu'on dise au sujet de tourner à droite, puis encore une fois à droite, il se retrouve face au fond. On peut raccourcir, ramasser ces deux mouvements en un seul, équivalent, qui est celui de « demi-tour » (c'est-à-dire « tourne-toi de l'autre côté »). On peut de même condenser toute combinaison de mouvements et la ramener à un seul – ce qui est l'objet des jeux de raccourcissement. On découvre ainsi que « tourne à gauche » + « demi-tour » = « tourne à droite » ou que « tourne à droite » + « tourne à gauche » = « reste », et ainsi de suite. Pourquoi ces jeux? Plus tard, l'étude des mathématiques comportera des structures de ce genre.

Il est indispensable de jouer à ces jeux de raccourcissement à partir de chacun des états différents, afin que les enfants découvrent, par exemple, que « tourne à droite » + « tourne à droite » = « demi-tour » quel que soit le point de départ, que ce soit face au tableau ou face à la porte. Deux rotations à angle droit successives équivalent à une rotation dans le sens opposé à celui auquel on fait face. Ces jeux provoquent des réflexions sans nombre dans l'esprit des enfants.

On peut jouer un jeu semblable en inscrivant une série de lettres sur le sol – a, b, c, d, e, f, g, h, etc. On peut le faire en ligne, ou en cercle si on veut que les lettres reviennent sur elles-mêmes. On définit un sens de mouvement « en avant » et un autre « en arrière ». Le joueur se tient sur une lettre quelconque, et toujours tourné dans le même sens. Il n'a pas le droit de faire demi-tour. Il a seulement le droit de faire des pas en avant ou des pas en arrière, chaque mouvement d'une lettre à la suivante ou à la précédente comptant pour un pas. Supposons qu'il parte de la lettre « A » et qu'on lui dise « deux pas en avant! ». Il aboutit en « C ». Si on lui dit ensuite « un pas en arrière », il se retrouve en « B ». On peut alors poser la question : « Comment aurait-il pu aller de « A », dont il était parti, en « B », où il a abouti au bout de deux mouvements, en un seul mouvement? » La réponse est, naturellement : « En faisant un pas en avant ». On voit que ce jeu possède une structure analogue à ceux d'addition et de soustraction, l'addition correspondant à des pas en avant et la soustraction à des pas en arrière.

On peut jouer un grand nombre de jeux semblables, inventés si possible par les enfants, jusqu'à ce que les notions abstraites d'état et d'opérateur soient bien installées dans l'esprit des enfants. Mais si on ne prend que des opérateurs arithmétiques, les enfants trouveront beaucoup plus difficile, plus tard dans leur carrière scolaire, de comprendre les opérateurs non-arithmétiques qu'ils auront l'occasion de rencontrer.

1.31. *Jeux de commutativité*

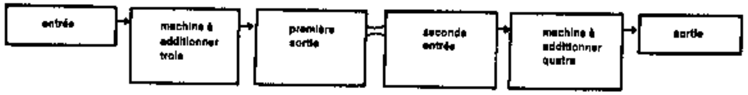
Revenons maintenant aux « machines » pour les quelques jeux qui vont suivre.

On sait qu'on peut mettre bout à bout une machine à ajouter trois et une machine à ajouter quatre, comme précédemment. Les enfants ont compris, dans l'intervalle, que ces deux machines équivalent à une « machine à ajouter sept », mais cela ne veut pas nécessairement dire qu'ils ont saisi que la commutativité s'appliquait. Ce qu'il faut que les enfants comprennent, c'est que si on met une machine à ajouter trois après une machine à ajouter quatre, on obtient le même résultat qu'en mettant une machine à ajouter quatre après une machine à ajouter trois. Le résultat est le même, quel que soit l'ordre des deux machines.

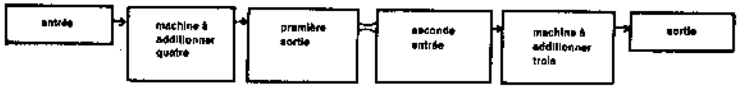
De même, une machine à « soustraire trois » suivie d'une machine à « soustraire quatre » donne le même résultat qu'une machine à « soustraire quatre » suivie d'une machine à « soustraire trois ». De même encore, une machine « à ajouter trois » suivie d'une machine à « retrancher quatre » donnera le même résultat qu'une machine à « retrancher quatre » suivie d'une machine à « ajouter trois ».

Bien entendu, il faut d'abord faire jouer ces jeux aux enfants sous forme concrète, en leur faisant tenir à chacun un rôle, avant d'introduire la forme symbolique. On prendra donc, comme d'habitude, un enfant chargé de l'entrée, un enfant opérateur, un enfant chargé de la sortie intermédiaire, un autre enfant chargé de la seconde entrée, un second opérateur et un enfant chargé de la seconde sortie. Il s'est révélé commode, à l'expérience, de « montrer » côte à côte les deux groupes de deux machines, le premier groupe comportant une « machine à ajouter trois » suivie d'une « machine à retirer quatre » et le second groupe l'inverse, c'est-à-dire une machine à retirer quatre suivie

Fig. 27 COMMUTATIVITÉ



Jeu à deux machines joué par le premier groupe.



Jeu à deux machines joué par le second groupe.

Dans chaque cas l'entrée sera la même et la sortie sera comparée. On essayera d'autres combinaisons similaires, y compris des machines à « gonfler » et à « dégonfler ».

d'une machine à ajouter trois. Les deux enfants chargés de l'introduction initiale conviennent d'introduire, chaque fois, le même nombre de jetons ; tous les enfants suivent le déroulement des opérations, et on constate que le résultat est le même à la fin sur les deux machines.

On peut étendre ce jeu à toutes les autres machines utilisées jusqu'ici, pour permettre aux enfants de voir le résultat de toutes les combinaisons possibles. Si l'on songe à toutes les combinaisons qui, précisément, sont possibles, et à la possibilité qu'il y a, chaque fois, de jouer d'abord avec des matériaux concrets, puis à chacune des étapes de la symbolisation, on voit qu'on ne manquera pas de ressources.

N'oublions pas, à ce stade, que lorsqu'on associe une machine avec son inverse, on obtient une « machine neutre » ou « machine à ne rien faire ». Il se peut que certains enfants souhaitent associer une de ces « machines à ne rien faire » à une autre machine, ou à une combinaison d'autres machines, et découvrent que c'est sans effet, le résultat final demeurant le même que si on n'avait rien associé du tout. Cependant, ce qu'il faut surtout, là comme ailleurs, c'est se borner à les encourager à essayer eux-mêmes, plutôt que de le leur dire, car ce qui compte essentiellement, c'est que l'enfant fasse ses découvertes lui-même.

1.32. *Commutativité de trois opérations*

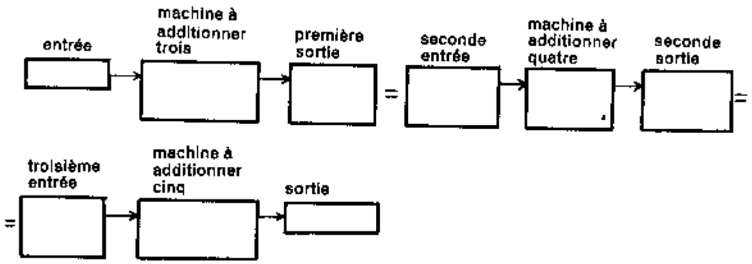
Poursuivons avec nos machines. On peut – les enfants l'ont sans doute déjà découvert – associer bout à bout plus de deux machines. Supposons que nous en ayons trois : « ajouter trois », « ajouter quatre » et « ajouter cinq ». Répartissons les enfants en groupes et essayons d'assembler ces trois machines de toutes les manières possibles, à condition que le résultat soit toujours une association de trois machines.

Le premier groupe peut former une combinaison « ajouter trois », « ajouter quatre », « ajouter cinq », le second groupe une combinaison « ajouter cinq », « ajouter quatre », « ajouter trois », et ainsi de suite. Les enfants ne manqueront pas d'être frappés du nombre de manières dont on peut faire des séries de trois éléments. (Il y a en fait six manières différentes.)

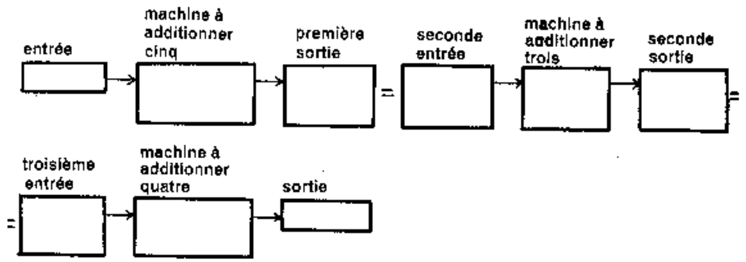
Puis on décide, en commun, de la quantité qu'on va introduire, et qui sera la même pour toutes les machines. On joue, et chaque groupe garde secret le résultat jusqu'à ce que tout le monde ait fini. Puis on compare les résultats, et les enfants ont la surprise de voir que c'est partout le même. On recommence plusieurs fois, jusqu'à ce que les enfants soient bien convaincus que c'est toujours le même résultat sur toutes les machines.

Fig. 28 COMMUTATIVITÉ *(suite)*

Jeu à trois machines, joué par le premier groupe :



Jeu à trois machines joué par le second groupe :



D'autres groupes appliqueront un ordre différent, mais chaque groupe prenant toujours la même valeur à l'entrée et notant le résultat à la sortie. Ensuite on échangera ces machines à additionner contre des machines à « gonfler » et à « rétrécir ».

On peut maintenant étendre le jeu aux « machines à gonfler » et aux « machines à rétrécir », combinées entre elles ou avec diverses autres combinaisons. Dans tous les cas, on compare les résultats à la sortie.

Ces constatations faites s'appliquent-elles à toutes les combinaisons des quatre sortes de machines – addition, soustraction, gonflage et rétrécissement ? Demeurent-elles valables si on met bout-à-bout plus de trois machines ? Qu'en est-il quand on combine les divers types de machines dans des ordres différents ? Les découvertes faites à partir de ces jeux contribuent à faire comprendre la commutativité et conduiront à une étape ultérieure à la compréhension de la distributivité.

1.33. *Jeux d'associativité*

Supposons qu'on ait une machine « à ajouter deux » suivie d'une machine « à ajouter trois », elle-même suivie d'une machine « à ajouter cinq ». On peut demander aux enfants de raccourcir cette chaîne de machines de deux manières :

(1) remplacer d'abord les deux premières machines par une machine équivalente, puis remplacer par une seule machine la séquence formée par cette machine combinée et la troisième. Noter la caractéristique de cette machine unique.
(2) remplacer la seconde et la troisième machine par une machine unique équivalente, puis associer la première machine à cette machine combinée et en tirer une machine unique.

La première manière de procéder va donner une machine « à ajouter 5 » suivie d'une machine « à ajouter 5 », et donner finalement une machine « à ajouter 10 ». La seconde manière va donner une machine « à ajouter 2 » suivie d'une machine « à ajouter 8 », donc, là encore, une machine « à ajouter 10 ». Le fait que l'on ait obtenu le même résultat est la conséquence de l'associativité des *opérateurs*. On verra que les machines à additionner et les machines à soustraire peuvent être groupées et regroupées de toutes les manières possibles : le résultat final est toujours le même. Il n'y a absence d'associativité que si, en même temps que les opérateurs, on considère aussi les états. Prenons un exemple.

État 12, soustraire 5, état 7, soustraire 2, état 5 se note : (12-5)-2 ce qui est différent de 12 – (5-2), car, ici, l'opérateur c'est 3 (5-2)=3, de sorte que l'état résultant sera 9, et non 5.

La différence, c'est que 12-5 est une *soustraction*, et non une combinaison d'opérateurs de soustraction. Si on combinait des opérateurs de soustraction, tels que « soustraire 3 », puis « soustraire 5 », puis « soustraire 2 », quelle que soit la manière de grouper ces opérations, on aurait toujours affaire, en définitive, à une opération résultante de « soustraire 10 ».

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES

Imprimé par les Presses Saint-Augustin à Bruges (Belgique)
pour les Éditions de l'Office Central de Librairie (O.C.D.L.), Paris

D/1966/0078/24