PROBLEMATHS 13 octobre 2018

ÉNONCÉS

Problemath 4

On choisit au hasard deux nombres réels b et c (non nécessairement distincts) dans l'intervalle $[0, 1]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ soient à une distance $\leq$ 1 dans le plan complexe?

Problemath 5

Soit S une sphère de rayon r dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On appelle corde de S tout segment joignant deux points de S. Un point p intérieur à S sera dit étonnant si, quelles que soient les trois cordes perpendiculaires deux à deux passant par p, la somme des carrés de leurs longueurs est constante. Un exemple évident est le centre de S. Quels sont tous les points étonnants intérieurs à S?

Problemath 6

Le diabolique Fantomath a pris 20 logiciens en otage. Il leur annonce qu'il va leur bander les yeux, les placer en file indienne et poser un petit chapeau, blanc ou noir, sur la tête de chacun d'eux. Une fois les bandeaux enlevés, chacun pourra voir les couleurs des chapeaux de tous ceux qui le précèdent dans la file, mais rien d'autre. Il leur donnera alors la parole successivement, en commençant par le dernier de la file. Chacun ne pourra dire qu'un seul mot: la couleur du chapeau qu'il croit avoir sur la tête. Quand ils auront tous parlé, il libérera ceux qui ont deviné correctement.

Lady Belmath, l'épouse de Fantomath, réussit à convaincre son mari de les laisser discuter entre eux pendant quelques minutes avant qu'on leur bande les yeux. Quelle stratégie peuvent-ils mettre au point pour libérer le maximum d'otages?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 2 novembre à 14h**.

Solution du Problemath 1 : $x^6 + 10x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 9$
$= (x+1)(x^5+9x^4+x^3+9x^2+x+9) = (x+1)(x^4(x+9)+x^2(x+9)+(x+9)) = (x+1)(x+9)(x^4+x^2+1)$.
Comme $x^4 + x^2 + 1 > 0$ pour tout x réel, les seules racines réelles de l'équation sont -1 et -9.
Ont fourni une solution correcte : D. CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), M. MERIEMQUE, S. NAOULI (élèves de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), Q. CLAUS (élève de 6ème à l'Athénée d'Uccle I), I. BRICCHI (élève de 6ème à la St Johns International School), T. FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), P. VANBORRE (élève de Terminale S au Lycée Henri IV de Paris), F. RASSELOT (BA1 maths ULB), S. LEMAL (BA1 maths ULg), B. DUBUS, K.D. NGUYEN, L. PRIEELS, A. SURCA (BA1 polytech ULB), G. PETRELLA (BA2 maths ULB), R. HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S. KRECZMAN (BA2 maths ULg), C. KIERE (BA3 polytech ULB), F. GHEERAERT (MA1 maths ULg), C. LABIOUSE (MA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), C. DE GROOTE (doctorant Univ Stanford), M. CORNEZ, O. DECKERS, P. GILLET, A. GREEN, T. HAMEL, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), L. GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, C. DESSAUVAGES, A. GRUWE, E. GRUWE, M. LESSINNES, T. LESSINNES (ingénieurs), M. NIZETTE (Risk Officer bancaire), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 2 : Comme P est convexe, le nombre de diagonales de P est égal au nombre de paires de sommets, moins le nombre de côtés, c'est-à-dire $\frac{21.20}{2} - 21 = 189$. S'il existe deux diagonales parallèles, elles font un angle de $0° < 1°$ et la propriété est satisfaite. Sinon, les 189 diagonales ont toutes des directions différentes. De ce fait, si on trace une droite parallèle à chacune d'elles, passant par le centre d'un cercle C fixé, ces 189 droites vont couper C en 378 points distincts. Comme C est partitionné en 360 arcs semi-ouverts de 1°, au moins deux de ces points seront dans le même arc, et la propriété est donc encore satisfaite.

Ont fourni une solution correcte : T. FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), S. LEMAL (BA1 maths ULg), K.D. NGUYEN (BA1 polytech ULB), S. KRECZMAN (BA2 maths ULg), C. DE GROOTE (doctorant Univ Stanford) T. HAMEL, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), L. GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, A. GRUWE, E. GRUWE, M. LESSINNES, T. LESSINNES (ingénieurs), M. NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 3 : Soit $n = x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ la suite associée à un entier $n > 0$. Montrons d'abord que si un terme x_i d'une telle suite est > 10, alors il existe un terme $x_j < x_i$ avec $j > i$. En effet, si $x_i \equiv 0 \; mod \; 3$, $x_{i+1} = \frac{x_i}{3} < x_i$. Si $x_i \equiv \; 2 \; mod \; 3$, $x_{i+2} = \frac{x_i + 10}{3} < x_i$ car $x_i > 10$. Si $x_i \equiv \; 1 \; mod \; 3$, $x_{i+3} = \frac{x_i + 20}{3} < x_i$ car $x_i > 10$. Il en résulte que la suite associée à un entier $n > 10$ contiendra, tôt ou tard, un terme ≤ 10. D'autre part, les suites périodiques

$1, 11, 21, 7, 17, 27, 9, 3, 1, \ldots$ (période 8)

$2, 12, 4, 14, 24, 8, 18, 6, 2, \ldots$ (période 8)

$10, 20, 30, 10, \ldots$ (période 3)

$5, 15, 5, \ldots$ (période 2) font apparaître tous les entiers de 1 à 10. On en conclut que la suite associée à tout entier $n > 0$ devient périodique à partir d'un certain terme. Pour en déterminer la période, il suffit de remarquer que x_i se termine par 0 (resp.par 5) si et seulement si x_{i+1} se termine par 0 (resp. par 5). Ceci implique que la suite associée à un entier n deviendra périodique de période 3 si n se termine par 0, de période 2 si n se termine par 5, et de période 8 dans tous les autres cas.

Ont fourni une solution correcte : Q. CLAUS (élève de 6ème à l'Athénée d'Uccle I), T. FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), B. DUBUS, K.D. NGUYEN, L. PRIEELS (BA1 polytech ULB), S. LEMAL (BA1 maths ULg), G. PETRELLA (BA2 maths ULB), R. HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S. KRECZMAN (BA2 maths ULg), C. KIERE (BA3 polytech ULB), F. GHEERAERT (MA1 maths ULg), R. REYNOUARD (MA1 informatique ULB), C. LABIOUSE (MA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), C. DE GROOTE (doctorant Univ Stanford), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, T. HAMEL, S. MASSON (profs de maths), L. GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, A. GRUWE, M. LESSINNES, T. LESSINNES (ingénieurs), M. NIZETTE (Risk Officer bancaire), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

LES PENSÉES DU JOUR

"*Chercher la solution d'un problème, c'est comme pratiquer l'escalade : il faut se maintenir en forme. C'est l'hygiène du mathématicien*" (Alain CONNES, mathématicien français, Médaille Fields en 1982)
.

"*If I have ever made any valuable discoveries, it has been owing more to patient attention than to any other talent*" (Isaac NEWTON, mathématicien et physicien anglais, 1642-1727).