PROBLEMATHS 10 novembre 2018

ÉNONCÉS

Problemath 7

Que vaut le produit ci-dessous? (simplifier le plus possible le résultat final).

$$\prod_{n=2}^{2017}(2cos(2^n)^\circ - sec(2^n)^\circ) = (2cos4^\circ - sec4^\circ)(2cos8^\circ - sec8^\circ)\dots(2cos(2^{2017})^\circ - sec(2^{2017})^\circ)$$

Problemath 8

Deux disques fermés D et D', situés dans un même plan, sont tangents extérieurement. Le rayon r de D vaut 15 fois le rayon r' de D'. Le centre o de D est fixe. Le centre o' de D' tourne autour de o, dans le sens des aiguilles d'une montre, à la vitesse angulaire constante de 127,5 tours par minute. Sachant que D tourne lui aussi autour de o, dans le sens des aiguilles d'une montre, à une vitesse angulaire constante de n tours par minute, quelle valeur faut-il donner à n si on veut que D' roule sans glisser sur D et qu'aucun diamètre de D' ne change de direction pendant tout le mouvement?

Problemath 9

Un ensemble E de points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est dit "irracible" (à ne pas confondre avec "irascible", qui est un vilain défaut) si tout point de $\mathbb{R}^n$ est à distance irrationnelle d'au moins un point de E. Si $I(n)$ désigne le plus petit nombre de points d'un ensemble irracible de $\mathbb{R}^n$, que vaut $I(n)$ pour tout $n > 0$?

Les solutions doivent nous parvenir **au plus tard le vendredi 30 novembre à 14h**.

Solution du Problemath 4 : La distance entre les deux racines z_1 et z_2 de l'équation est le module de leur différence, c'est-à-dire $|z_1 - z_2| = |\sqrt{b^2 - 4c}| = \sqrt{|b^2 - 4c|}$.
Cette distance sera ≤ 1 si et seulement si $-1 \leq b^2 - 4c \leq 1$. L'ensemble des couples (b, c) du carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ pour lesquels cette condition est réalisée est la région du carré unité située entre les deux paraboles d'équations $y = \frac{x^2-1}{4}$ et $y = \frac{x^2+1}{4}$. La probabilité cherchée est le rapport entre l'aire de cette région, qui vaut $\int_0^1 \frac{x^2+1}{4}\, dx = \frac{1}{3}$, et l'aire du carré unité. Elle vaut donc $\frac{1}{3}$.
Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), S.NAOULI (élève de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), S.LEMAL (BA1 maths ULg), C.RUIZ (BA1 physique ULB), B.DUBUS, D.H.NGUYEN, K.D.NGUYEN (BA1 polytech ULB), G.PETRELLA (BA2 maths ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), R.REYNOUARD (MA1 informatique ULB), C.LABIOUSE (MA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), P.SARACCO (postdoc ULB), M.ABRAHAM, O.DECKERS, A.GREEN, T.HAMEL, C.LARIVIERE, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE, H.VERMEIREN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W.DE DONDER, A.GRUWE, E.GRUWE,
M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).
Solution du Problemath 5 : Soit p un point intérieur à la sphère S de centre o et de rayon r.

Construisons un repère orthonormé d'origine o, dont les axes ox, oy, oz sont parallèles respectivement aux cordes C_1, C_2, C_3 passant par p. Soient (a, b, c) les coordonnées de p dans ce repère et soit λ_i $(i = 1, 2, 3)$ la longueur de C_i. Comme l'origine o est l'intersection des plans médiateurs des 3 cordes, les extrémités de celles-ci ont pour coordonnées $(\pm\frac{1}{2}\lambda_1, b, c)$,$(a, \pm\frac{1}{2}\lambda_2, c)$, $(a, b, \pm\frac{1}{2}\lambda_3)$. En exprimant que ces extrémités sont des points de la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + 4b^2 + 4c^2 &= 4r^2 \\ 4a^2 + \lambda_2^2 + 4c^2 &= 4r^2 \\ 4a^2 + 4b^2 + \lambda_3^2 &= 4r^2 \end{aligned}$$

d'où on tire $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 12r^2 - 8(a^2 + b^2 + c^2) = 12r^2 - 8|op|^2$.
Comme cette expression ne dépend que du rayon de S et de la distance de p à l'origine, il en résulte que tout point intérieur à S est étonnant. Le raisonnement ci-dessus se généralise facilement à l'espace $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, avec n cordes perpendiculaires deux à deux passant par un point intérieur à une sphère.

Ont fourni une solution correcte :T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), S.LEMAL (BA1 maths ULg), B.DUBUS, D.H.NGUYEN, K.D.NGUYEN (BA1 polytech ULB), G.PETRELLA (BA2 maths ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), O.DECKERS, A.GREEN, T.HAMEL, C.LARIVIERE, S.MASSON, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE, H.VERMEIREN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, A.GRUWE, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 6 : Le 20ème logicien dans la file, n'ayant aucune information sur la couleur de son chapeau, n'a de toute façon qu'une chance sur deux de s'en tirer. Il existe néanmoins une stratégie qui permet de libérer à coup sûr les 19 autres logiciens: il suffit que le 20ème annonce "blanc" s'il voit un nombre pair de chapeaux blancs devant lui, et "noir" si ce nombre est impair. Chacun des 19 premiers logiciens, étant ainsi informé de la parité du nombre total de chapeaux blancs parmi eux, pourra alors, lorsque viendra son tour, en déduire facilement la couleur de son chapeau: en effet, le n^{me} dans la file $(n = 1, 2, ..., 19)$ voit les couleurs des $n - 1$ chapeaux devant lui et il a entendu annoncer les couleurs correctes des $19 - n$ chapeaux derrière lui. La couleur de son chapeau est donc univoquement déterminée.

Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), Q.CLAUS (élève de 6ème à l'Athénée d'Uccle I), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), S.LEMAL (BA1 maths ULg), B.DUBUS, T.GUISSARD, D.H.NGUYEN, K.D.NGUYEN (BA1 polytech), G.PETRELLA (BA2 maths ULB), R. HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), R.REYNOUARD (MA1 informatique ULB), C.LABIOUSE (MA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), A.GREEN, C.LARIVIERE, S.MASSON, Y.SUPRIN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, A.GRUWE, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

LES PENSÉES DU JOUR

"*A good stock of examples, as large as possible, is indispensable for a thorough understanding of any concept, and when I try to learn something new, I make it my first job to build one*" (Paul HALMOS, mathématicien américain, 1916-2006) .

"*Il est rare de rencontrer quelqu'un qui soutienne avec véhémence que la simple idée de lire un roman, de contempler un tableau ou de regarder un film lui soit une épreuve insupportable, et pourtant, nombre de personnes sensibles et éduquées ne craignent pas d'affirmer, en un remarquable mélange de défiance et de fierté, que les mathématiques relèvent pour elles d'une pure torture ou d'un cauchemar qui les révulse*" (Hans Magnus ENZENSBERGER, écrivain allemand né en 1929, conférencier invité au Congrès International des Mathématiciens en 1998).