

Le jeu de Hamming

Philippe Cara¹

Beaucoup de jeux consistent à deviner un nombre secret auquel pense une personne.

D'une façon ou d'une autre on pose des questions à la personne dont les réponses permettent de déterminer le nombre secret. S'il s'agit par exemple d'un nombre de 1 à $16 = 2^4$, la notation binaire permet de facilement déterminer le nombre secret à l'aide de questions du genre "le nombre secret est-il pair ?", "Si l'on soustrait un du nombre, devient-il divisible par 4?", ...

Cette technique permet, en quatre questions bien choisies, de déterminer les quatre bits du nombre secret.

Bien sûr, on doit être certain que les réponses soient bien correctes. Si la personne se trompe ou ment, le nombre ne sera pas deviné. Le jeu que nous allons décrire est basé sur le code correcteur de Hamming et nous permet de deviner le nombre secret en sept questions, même si une des réponses est fausse.

Instructions : À la fin de ce texte vous trouverez 14 rectangles groupés en 7 paires. Chaque paire (= 2 rectangles l'un à côté de l'autre) représente les faces avant et arrière d'une carte. Photocopiez la page de rectangles (en agrandissant peut-être un peu), découpez les rectangles et collez-les dos à dos en paires afin de vous confectionner un jeu de 7 cartes. Vous êtes maintenant prêts pour le jeu.

Comment jouer ? Demandez à quelqu'un de penser à un nombre de 1 à 16. Vous allez maintenant lui montrer, une par une, les sept cartes. Pour chaque carte la question est la même : "Est-ce que le nombre secret figure sur la face de la carte que je vous montre?". La réponse ne peut être que "oui" ou "non" mais vous pouvez dire à votre adversaire qu'il a le droit de mentir une fois (et pas plus) s'il le souhaite. Si la réponse est négative vous retournez la carte et la déposez sur la table avant de passer à la carte suivante. En cas de réponse positive il n'est pas nécessaire de retourner la carte. À la fin vous avez sept cartes sur table et le nombre secret apparaît sur la face supérieure d'au moins six de ces cartes. Vous êtes maintenant en mesure de déterminer le nombre secret, même si votre adversaire vous a menti une fois. Veillez bien à ne plus retourner les cartes dans ce qui suit!

Comment retrouver le nombre secret ?

1. Orientez les cartes sur la table de façon à ce que les nombres soient tous bien lisibles (pas de carte "la tête en bas"). Faites un petit paquet en mettant les cartes les unes sur les autres (en faisant attention de ne pas les retourner!).
2. Décalez maintenant un peu les cartes de manière à révéler le bord supérieur de chacune d'elles.
3. Les bords supérieurs montrent de petits rectangles noirs ou blancs. Ils apparaissent en trois groupes : à gauche, à droite et au milieu. Dans ces trois groupes le nombre de rectangles noirs devrait être pair. Si ceci est correct, votre opposant ne vous a pas menti. Dans le cas contraire, vous devez localiser les groupes pour lesquels le nombre de rectangles noirs est impair. Il y a exactement une carte qui n'a de rectangles que dans ces groupes (il y a trois cartes avec un rectangle, trois avec deux rectangles et



¹Ce texte est paru en annexe de l'article "Correction d'erreurs et compression" d'Ingrid Daubechies dans Mathématique et Pédagogie, juin 2006. Le jeu a été conçu par Ingrid Daubechies. (version 060529)

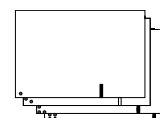
une seule avec trois rectangles). C'est celle-ci qu'il faut retourner ! Maintenant tout est correct car l'autre côté de la carte a les rectangles à la même place mais dans la couleur opposée. Le mensonge est maintenant corrigé.

4. Il faut maintenant mettre trois cartes de côté pour ne continuer qu'avec celles qui ont des cercles noirs sur le coin inférieur gauche. Faites bien attention à ne pas retourner les cartes ! Superposez-les dans l'ordre donné par les cercles : celle avec un cercle au-dessus, puis celle avec deux cercles, etc.

5. Décalez à nouveau ces quatre cartes, mais de façon à révéler, cette fois-ci, les bords inférieurs.



6. Vous verrez apparaître de petits rectangles blancs et noirs. Ils déterminent le nombre secret en écriture binaire ! Sur la figure vous voyez par exemple noir-blanc-noir-noir qui correspond à 1011. Donc le nombre secret est "onze". Attention : il faut interpréter 0000 comme "seize" et pas comme "zéro".

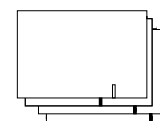


Comment ça marche ? Réfléchissez-y vous-mêmes. . . Ce jeu est basé sur le code 7-4 de Hamming. C'est un code correcteur qui permet de corriger une erreur (ou un mensonge) sur 7 bits et donne la possibilité de transmettre un message de 4 bits sans que l'erreur ait une influence. Les quatre cartes avec les cercles donnent le message qui est ici le nombre secret. Comment quatre cartes peuvent-elles donner le nombre secret en écriture binaire ? Regardez bien les nombres qui figurent sur les deux faces de ces cartes. . . Les autres cartes donnent les bits supplémentaires qui permettent la correction d'un mensonge.

Une fois que vous aurez bien compris le jeu, vous pourrez peut-être aussi imaginer une version utilisant le code 15-11 de Hamming qui ajoute 4 bits à un nombre secret de 11 bits pour protéger l'information secrète contre un mensonge.

Les codes de Hamming sont utilisés dans tout ordinateur, pour corriger les erreurs qui proviennent de bascules accidentelles dans la mémoire RAM, suite au rayonnement cosmique par exemple. Sans ces codes votre ordinateur ne fonctionnerait même pas une semaine avant de perdre complètement la mémoire. . .

Remarques : Vous pourriez aussi ne pas tenir compte de l'ordre donné par les cercles dans le point 4 ci-dessus. Les petits rectangles sont décalés de manière à ce que si la lecture du point 6 est faite "de gauche à droite" on trouve aussi le bon résultat. La figure montre par exemple (lu de gauche à droite) noir-blanc-noir-noir, donc "onze".



Les rectangles sur le bord supérieur des cartes donnent aussi un code binaire qui numérote les cartes de 1 à 7. Si dans le point 3 ci-dessus vous notez un '1' pour les groupes dans lesquels le nombre de rectangles noirs est impair et '0' pour les autres, vous obtenez, en binaire, le numéro de la carte à retourner.

