

L'enseignement de la géométrie dans le secondaire.

F. BUEKENHOUT

1. Introduction.

Quelques précautions oratoires paraissent de mise.

1) Tout en étant basé sur une réflexion et une expérience non négligeable, s'inspirant de sources multiples et variées, le texte qui suit n'a pas la prétention d'être complet ou objectif. En matière d'enseignement, il me paraît sain d'assumer une certaine subjectivité.

2) Je me refuse à prendre la place du professeur de géométrie de candidature chargé de définir les matières qu'il estime devoir être connues par ses étudiants. J'ai l'habitude de m'adapter au niveau de l'auditoire et je compte bien poursuivre dans cette voie.

Ce qui me guidera plutôt ci-dessous c'est une conception personnelle des besoins de l'homme cultivé ou instruit de notre époque et le rôle que la géométrie peut et doit jouer dans ce contexte. Bref, il s'agit de définir une géométrie pour tous sans tomber pour autant dans le travers qui consiste à passer chacun dans le même moule.

3) Le noeud du problème actuel de la géométrie est l'ignorance fondamentale des professeurs dans ce domaine. Pour mieux la mesurer un coup d'oeil méchant sur le passé récent est de circonstance. Avant 1968, les professeurs étaient profondément imprégnés d'une géométrie moribonde, coupée du courant principal de la science et largement coupée de la vie, qui était comme le latin, une merveilleuse gymnastique de l'esprit mais qu'il devenait difficile de soutenir face à la concurrence offerte par une science susceptible d'offrir davantage, mieux et plus vite. Après 1968, en Belgique, s'est imposé un verbalisme creux et prétentieux qui n'a de scientifique que l'apparence et dont un des effets a été de tuer la géométrie.

Que faire pour remédier à cette situation ?

Le mot d'ordre devrait être de recycler à grande échelle. Mais recycler en quoi ? C'est précisément ici que 1968 a échoué. Une action de vaste envergure a effectivement été déclenchée mais elle s'est exercée sur un terrain mal préparé, laissé trop souvent aux mains d'apprentis-sorciers.

Il convient donc d'élaborer en quelque sorte, une politique en matière de géométrie.

4) A cet égard, un objectif prioritaire est de dégager les grandes lignes directrices communes à l'enseignement de la géométrie au travers du cycle secondaire.

L'étude globale des nouveaux programmes des quatre premières années montre clairement que cette vision d'ensemble n'a pas fait l'objet d'un accord préalable.

5) Une équivoque doit être dissipée. On m'octroie souvent une étiquette de spécialiste en géométrie que je ne renie pas mais qui conduit parfois à des conclusions excessives selon lesquelles j'ignore ou veut ignorer d'autres domaines mathématiques. Or ceci est à l'opposé de mes conceptions.

Un des défauts actuels de notre enseignement est précisément le cloisonnement excessif des sujets, que recherchent professeurs et élèves pour des raisons de facilité. En mathématiques, on a longtemps et partiellement évité cet écueil en ménageant au moins une coordination verticale. En clair, tout ce qui avait été appris en mathématique au cours des années antérieures était supposé connue. Il conviendrait d'élaborer les programmes en tenant davantage compte de cette nécessité.

Cette demande ne s'inspire pas seulement de nécessités pédagogiques: préparation d'une notion et répétitions précédant une assimilation profonde. Elle s'inspire aussi d'un trait caractéristique de la mathématique actuelle à savoir les relations que celle-ci établit et étudie entre des concepts, des propriétés et des disciplines variées.

Bref, il me paraît à la fois impossible et inacceptable d'étudier la géométrie en vase clos, sans contact avec d'autres aspects ou structures mathématiques et sans les contacts avec les sujets extra-mathématiques dont l'existence justifie précisément cette étude.

2. Grandes lignes directrices.

La question se pose en partie sur le terrain scientifique et en partie sur le terrain de l'élève pour reprendre l'excellente formule de Rouche et de ses collaborateurs. La priorité sera accordée au premier mais le second ne sera pas perdu de vue. Cette priorité sera inversée au cours de la mise en oeuvre.

Dans le domaine mouvant et vague des connaissances qui sont qualifiées de géométriques quelles sont celles qui méritent de figurer constamment à l'avant-plan des préoccupations dans l'enseignement secondaire, en raison de leur intérêt, de leur efficacité et de leur accessibilité ?

Voici un premier élément de réponse.

A. Etude au sens le plus large, avec des outils variés, de plus en plus précis et efficaces, des principales figures ou ensembles de points structurés.

Comment déterminer ces principales figures ? C'est ici que le terrain de l'élève intervient. Ce sont tout d'abord les figures les plus répandues autour de nous comme le parallélépipède et le cylindre. Ensuite les figures qui s'imposent par leur efficacité comme l'espace qui contient toutes les autres figures, comme le polyèdre qui unifie une série de figures familières. Voici une liste où les notions apparaissent avec un certain ordre d'importance qui est évidemment discutable.

B. Les principales figures sont: cylindre, parallélépipède, cône, sphère, plan, droite, espace, cercle, polyèdre, pavage, parallélogramme, rectangle, polygone, échelle, graduation, frise, triangle, segment, demi-droite, demi-espace, hélice, conique, courbe, surface, quadrique,...

J'y ajouterais volontiers: translation, rotation, homothétie,... que j'aime à considérer également comme des figures.

L'espace joue un rôle privilégié en tant que conteneur des autres figures et il est seul à jouer ce rôle au niveau élémentaire. A un niveau un peu plus élevé ce rôle est joué par l'espace projectif comme Klein l'avait observé dans son programme d'Erlangen de 1872.

La géométrie se caractérise en mathématique par sa complexité. Celle-ci résulte principalement de la richesse en figures. C'est aussi ce qui fait l'intérêt du sujet car le champ d'applications et d'activités qu'elle offre est immense. Dès lors l'exploration d'un problème s'avère ardue et comme Euclide le disait déjà au pharaon, il n'y a pas de Voie Royale en géométrie.

S'il en faut une tout de même, elle consiste à étudier l'espace par et pour les figures. Maîtriser l'espace c'est-à-dire un seul objet, offre une maîtrise potentielle et partielle sur une foule d'autres objets. Par ailleurs, la maîtrise de l'espace résulte d'une bonne maîtrise préalable d'autres figures. Bref, le terrain de l'élève suggère une dialectique espace-figures alors que le terrain scientifique conduit plutôt à une vision linéaire où les figures sont largement ignorées.

En résumé :

C. Au niveau secondaire, la géométrie peut être considérée comme l'étude de l'espace et de ses principaux sous-ensembles.

ou encore :

l'espace par les figures et l'espace pour les figures.

La primauté de l'espace sur le plan me paraît partagée par tous les auteurs que j'ai pu consulter et qui se posent ce genre de questions. Pourtant, dans les classes les choses se passent presque toujours autrement. L'étude de l'espace serait-elle inaccessible à des jeunes de 12-18 ans ? L'expérience bien conduite montre qu'il n'en est rien et il n'est pas nécessaire d'insister longuement sur ce point en dépit de clichés bien connus: les élèves ne voient pas dans l'espace; il est difficile de représenter les figures spatiales dans un cahier, etc. Signalons au passage que les techniques informatiques rendent les représentations graphiques de situations spatiales et même hyperspatiales de plus en plus faciles.

Le véritable problème est que l'espace a été largement ignoré par les professeurs durant toute leur formation et leur expérience professionnelle. L'espace fait peur. Il était largement méconnu avant 1968 et dans ce domaine le conservatisme fut de mise après 1968. De ce fait, un gigantesque effort d'information doit être entrepris et les programmes devraient être aménagés de manière transitoire afin de faire répéter l'essentiel chaque année jusqu'à ce que les professeurs acquièrent plus d'aisance. Il faudrait que maîtres et élèves apprennent en même temps et que les objectifs soient fixés avec prudence. Imposer trop vite et trop tôt conduira à l'échec. Ignorer l'obstacle également. Peut-on faire autrement ? Sans doute, mais à quoi bon ?

Peut-on préciser davantage les grandes lignes directrices ? Bien sûr. L'étude de l'espace peut être précisée. Après tout, les astronomes, les géographes, les architectes, les astronautes, les footballeurs et bien d'autres, étudient eux-aussi l'espace. La géométrie offre une étude mathématique; celle-ci est basée sur des concepts et des propriétés bref sur ce qu'on appelle généralement, des structures. En dernière analyse, la géométrie représente une réalité tridimensionnelle au moyen du langage unidimensionnel. La maîtrise de ce processus demeure largement hors de portée de nombreux licenciés et il ne faut pas espérer de miracles à cet égard. Y remplacer l'espace par le plan en espérant le gain d'une dimension est illusoire car la difficulté réside ailleurs.

Retenons qu'à bien des égards, la mathématique apparaît aujourd'hui comme l'étude des ensembles structurés et des relations entre ces ensembles. Notons en outre que dans les milieux de l'enseignement secondaire belge, le mot structure semble avoir un

contenu très étroit lié au Verbalisme dont il a été question dans l'introduction et dès lors il existe une possibilité de malentendu. A titre d'exemple, pour moi l'espace est structuré par des droites, par des plans, par des hélices et par des propriétés de ces notions. Le fait qu'on ne se donne pas la peine d'affubler cette structure d'un nom, ne diminue en rien son intérêt, son existence, son efficacité, ni sa précision.

J'en arrive ainsi à une 2e ligne directrice.

D. Dégagement, prise de conscience, développement et systématisation progressifs des principales structures de l'espace et de ses sous-ensembles, notamment :

- structure linéaire (droites, plans, incidence)
- structure de parallélisme
- structure convexe (segments, demi-droites, ...)
- structure volumique
- structure topologique
- structure affine (qui englobe les précédentes)
- structure vectorielle
- structure coordonnée
- structure orthogonale
- structure d'orientation
- structure angulaire
- structure métrique
- structure projective
- structure d'aire et de longueur
-

En bref, et pour résumer tout ce qui précède :

E. La géométrie au niveau secondaire apparaît comme l'étude structurelle de l'espace et de ses principaux sous-ensembles.

Est-ce tout ? Non. Nous avons ignoré volontairement une composante essentielle, tant pour le terrain de l'élève que pour le terrain scientifique. Au niveau de l'homme primitif et au niveau du jeune enfant, l'espace se construit non seulement à l'aide des figures mais aussi au travers du mouvement des figures.

Chez Euclide on peut observer une volonté de bannir le mouvement, notamment par l'absence de discussion de celui-ci alors que tant de précautions logiques sont prises pour une foule d'autres notions élémentaires.

Cette volonté ne peut s'imposer constamment. Des triangles sont bel et bien superposés mais c'est surtout dans l'étude des corps ronds que la cinématique reprend le dessus sur la statique. Certains commentateurs voient dans ce manque d'unité de style, la preuve qu'Euclide a compilé les oeuvres d'autres mathématiciens. Parmi les critiques modernes d'Euclide qui ont donné lieu à une foule de travaux principalement entre 1872 (F.Klein) et 1889 (D.Hilbert) il y a une double tendance. L'une consiste à intégrer le mouvement de manière rigoureuse à l'étude de la géométrie et même à axiomatiser celle-ci en se donnant les déplacements parmi les notions primitives. C'est ce que font Helmholtz et divers auteurs italiens. L'autre consiste à refaire Euclide avec la volonté d'en finir rigoureusement avec le mouvement. C'est la tendance de Hilbert. En raison du rôle de leader joué par celui-ci son point de vue a eu plus d'influence que d'autres et nous en souffrons encore. Il faut bien dire en effet que ce point de vue apparaît comme réactionnaire aujourd'hui. La domestication de l'idée de mouvement s'est faite dès le 19^e siècle grâce à la notion de groupe de transformations. Ainsi le mouvement qui est si important sur le plan psychique est devenu disponible aussi sur le terrain scientifique, à très bon compte. L'évolution ultérieure des mathématiques n'a fait que développer de plus en plus, le rôle central joué par les notions groupales. Alors pourquoi continuer à s'en passer et à en détourner les yeux ?

Nous en arrivons ainsi à une 3^e ligne directrice.

F. L'étude structurelle de l'espace et de ses sous-ensembles est largement facilitée et contrôlée par l'étude des principaux groupes de transformations à savoir :

les groupes de déplacements

les groupes de similitudes

les groupes de dilatations, d'isométries, d'affinités, de permutations linéaires,...

et plus généralement, par les transformations conservant la structure.

En particulier, l'espace est plus homogène que toutes les figures qu'il contient. Il s'impose à la fois par son rôle de conteneur et son homogénéité.

C'est sans aucun doute dans le domaine groupal que les plus grands efforts de formation, de progressivité, de prudence et de courage sont nécessaires.

Un des premiers objectifs de l'enseignement de la géométrie devrait être la maîtrise du groupe des déplacements. Celui-ci est l'expression mathématique la plus simple du mouvement et il contribue ainsi à l'élaboration de l'espace et de sa structure. Logiquement, c'est aussi le plus petit groupe qui contient en puissance toute la géométrie euclidienne. Ainsi la droite déterminée par deux points a et b est l'ensemble des points qui sont fixés par les déplacements fixant a et b. La sphère de centre a passant par b est l'ensemble des transformées de b par les déplacements fixant a. Toute droite est l'axe d'un déplacement d'ordre 2 (demi-tour). Deux droites

sécantes sont orthogonales ssi les demi-tours qu'elles déterminent commutent. Etc...

Le deuxième groupe majeur à étudier est le groupe des similitudes qui est le plus grand groupe de symétries de l'espace euclidien.

3. L'esprit du programme.

Les grandes lignes directrices discutées ci-dessus ne déterminent pas encore un programme. Il convient d'examiner dans quel esprit celui-ci sera abordé.

Dans le passé diverses conceptions se sont faites concurrence. En voici quelques unes.

a) L'approche sensorielle est basée sur l'observation et sur la manipulation. Elle conçoit la géométrie comme une science naturelle. Le rôle du raisonnement et du langage y est plus important qu'on ne le pense. Le danger réside dans la superficialité et une confiance excessive dans la perception sensorielle. Il s'agit d'une activité mathématique de niveau peu élevé. Elle s'exprime couramment par les constructions aux instruments, par des schémas, par des dessins ensemblistes, par la construction de modèles. Elle s'appuyera de plus en plus sur l'ordinateur. Elle est également supportée par les textes.

b) L'approche axiomatique donne la priorité à des considérations logiques. C'est une activité de très haut niveau pour l'enseignement secondaire. Poussée à l'extrême elle conduit à un appauvrissement de fait parce que le besoin de faire les choses "proprement" élimine les questions difficiles et d'autres faute de temps.

c) L'approche vectorielle entend réduire la géométrie à l'étude d'un espace vectoriel. Poussée à l'extrême elle se stérilise en l'étude de la merveilleuse machine-outil vectorielle en oubliant les matières premières qui sont destinées à l'alimenter. Offre un bon équilibre de technique et de conceptualisation.

d) L'approche numérique est une variante de la précédente. On se ramène cette fois, à l'étude d'un corps (\mathbb{R}) . Rassure par sa rigueur et la possibilité d'appliquer des recettes. Masque largement l'homogénéité et la structure de l'espace.

Une des erreurs commise en 1968 et bien comprise aujourd'hui semble-t-il est d'avoir donné une sorte de monopole à b) durant les trois premières années, étant entendu que la mission était de préparer le terrain à c) et que ce point de vue seul méritait une place durant les trois dernières années.

Que faire alors ? Je pense qu'il convient de faire une place à chacun de ces points de vue, à des degrés différents selon les sujets abordés, tout au long du cycle secondaire.

Le point de vue sensoriel s'impose pour un 1er contact avec des notions nouvelles et de tels contacts devraient avoir lieu chaque année. Il s'impose aussi pour une transmission rapide de connaissances. Il fournit l'une des composantes de la recherche

qui vise à résoudre un problème. Enfin et c'est là un point capital, dans la vie ordinaire même à un niveau culturel appréciable, c'est surtout à ce point de vue que l'on se réfère lorsqu'il s'agit d'utiliser des connaissances géométriques. Si le point de vue sensoriel est un point de départ, c'est aussi un aboutissement qui doit permettre de juger le chemin accompli grâce à d'autres points de vue. Ceux-ci sont en partie destinés à nous faire voir et sentir ce que nous ne voyons pas avec nos yeux et ne sentons pas avec nos muscles.

Le point de vue axiomatique devrait occuper une place réduite parcequ'il est extrêmement difficile à développer et à comprendre pour une structure aussi riche que celle de l'espace euclidien. En revanche, la déduction et l'organisation déductive locale devraient avoir une place grandissante à partir de la 1ère année sans jamais acquérir un monopole. Elles devraient s'exercer en priorité sur l'acquisition de grands théorèmes, peu accessibles à nos sens et qui permettent d'illustrer l'efficacité de la mathématique. Pour les élèves il s'agirait de comprendre sans être obligé de mémoriser de longues démonstrations et leur activité pourrait se situer à un niveau plus modeste d'imitation. Vaincre la barrière que représente la peur des démonstrations à tous les niveaux de l'enseignement devrait être un de nos soucis principaux. Un peu plus de naturel serait sans doute une grande aide car chacun peut "sécher" sur une démonstration ou omettre une objection pertinente. S'il est démagogique de prétendre que chacun peut tout faire, il est bien exact que tout enfant peut raisonner et que l'art du raisonnement mérite d'être développé par une pratique individuelle permanente.

Le point de vue numérique devrait être abordé beaucoup plus tôt. Il est préparé par l'enseignement fondamental et la dialectique géométrie-nombre pénètre de plus en plus notre culture. En mathématique, elle prépare un des chapitres les plus importants de la formation: l'Analyse. On devrait s'en servir de manière permanente dès la 1ère année et en éviter les excès au cours des années terminales où la géométrie semble souvent perçue comme une activité strictement algébrique.

Le point de vue vectoriel est sans doute un peu plus long à élaborer. Il est normal qu'il prenne plus d'importance durant les dernières années mais pas au point d'éclipser les autres approches.

Bref, ces différentes approches devraient s'épauler plutôt que de se faire la concurrence et il devrait être clair qu'elles sont un outil au service de la compréhension de l'espace et non un objectif en soi, au niveau secondaire.

4. La structure d'un programme.

Admettons que les lignes directrices précédentes aient été adoptées dans l'esprit que j'ai tenté de définir. L'étape suivante sera d'élaborer une hiérarchie de sujets qui tient compte de l'enchaînement psychologique et logique des sujets. Nous y partons constamment du terrain de l'élève pour l'entraîner sur un terrain scientifique de notre choix.

L'idée de hiérarchie commande l'ordre dans lequel les notions peuvent être abordées et l'importance qu'il convient de leur accorder.

Il ne faut surtout pas en déduire une séparation des notions en blocs rigides qu'il s'agirait de voir dans tous les détails avant de passer au bloc suivant. Des interactions constantes entre des blocs déjà abordés et des incursions dans des blocs encore inexplorés devraient être la règle. C'est à ce prix que l'essentiel pourra être acquis par tous et que la nature de la mathématique actuelle pourra être quelque peu perçue.

L'abandon ou le développement moindre de certaines branches de la hiérarchie sont évidemment liés à des considérations de temps disponible et d'utilité relative.

Enfin, la hiérarchie, bien que susceptible de fluctuations locales évidentes, n'est pas fixée de manière arbitraire. En cette période de carence généralisée ceci pose un problème sérieux aux rédacteurs de programme. En effet, à quoi servirait-il d'aborder l'étude des transformations linéaires d'espaces vectoriels avec des élèves de 5^e année qui ne sont pas capables de répondre aux questions d'ordre sensoriel les plus élémentaires concernant les translations, rotations et homothéties ? Par ailleurs, il serait ridicule d'imposer le même programme à toutes les classes sous prétexte que des lacunes doivent être comblées: ce serait le moyen le plus sûr d'accentuer la tendance actuelle qui est de faire en 6 ans ce qu'il est possible de faire en un an. La solution réside peut-être dans un programme souple indiquant :

1) de manière explicite quelles sont les notions à revoir, en exigeant que la révision porte sur l'essentiel, qu'elle ait une forme synthétique et que les connaissances soient surtout contrôlées au niveau sensoriel, sans exigences techniques, ni logiques excessives; une relecture d'un chapitre de livre d'une année antérieure pourrait être de mise;

2) la matière proprement dite de l'année en cours, qui aurait dû être préparée pour l'essentiel, au niveau sensoriel, durant l'année précédente et qui devrait être revue dans le même esprit au cours des années ultérieures;

3) la matière qu'il convient de préparer au niveau de l'observation et qui fera l'objet de prolongements plus poussés, l'année suivante.

5. Un embryon de programme global.

Je ne chercherai pas à séparer les sujets par année. Les principes discutés auparavant seront appliqués.

1. Vers l'espace. La notion de corps solide et les notions associées de figure spatiale, plane et linéaire. (La géométrie de la droite est presque aussi négligée que celle de l'espace alors qu'elle intervient de manière fondamentale en Analyse et en Algèbre). Classifications de corps solides sur base de l'observation. Distinction de corps ronds et de polyèdres. Emergence des droites, plans, cercles. Emergence des translations à partir du cylindre, des homothéties à partir du cône, des rotations et symétries bilatérales à partir des corps ronds et de certains polyèdres. Emergence du parallélisme (sections planes, faces parallèles, génératrices parallèles). Mesures de corps solides. Observation de corps peu répandus comme les tores, hélices, hyperboloïdes. Elaboration de l'espace par idéalisation de pavages, de translations, par extension d'une rotation de corps solide aux points extérieurs à celui-ci.

Ce processus de construction de l'espace est long et difficile. Il en va de même pour le plan et ceci demeure largement ignoré. Les professeurs et les programmes ont fait semblant de croire que cette construction s'achève rapidement en 1ère année.

Dans ce contexte, les droites, les plans, les cylindres, les cônes, les graduations, les pavages donnent lieu à des figures non bornées, non contenues dans l'intérieur d'une sphère. Le processus est à mettre en liaison avec la construction de \mathbb{N} et par la suite avec \mathbb{R} comme ensemble des décimaux illimités. La difficulté est d'accepter les ensembles infinis et de voir pourquoi ils s'imposent.

2. Structure affine de l'espace. Points, droites, plans, incidence, parallélisme, segments, demi-droites, demi-plans, demi-espaces, convexité. Après l'approche sensorielle de 1ère année, une certaine organisation (liste de propriétés) devrait se dégager en 2è année. La convexité et les demi-espaces demeurent curieusement négligés jusqu'à l'apparition des inéquations en 4è année alors qu'il y a là une magnifique occasion de faire s'épauler très tôt les nombres et la géométrie. Son rôle dans l'élaboration de la perception spatiale, dans les questions d'orientation, dans les angles et dans la structure d'ordre des nombres est également à souligner.

2.bis. Structure coordonnée. Accessible dès que le parallélisme est acquis. Outil à utiliser de manière permanente pour toutes les questions ultérieures abordées.

3. Structure symétrique de l'espace. Contact progressif surtout sensoriel avec les principales symétries de l'espace: rotations, translations, symétries bilatérales, homothéties, symétries centrées. (Le mot "symétrie" convient bien mieux que "transformation" car il s'agit bien plus de conserver que de transformer et la conservation (de structure) est essentielle).

Figures hautement symétriques: polyèdres réguliers, frises, pavages, cylindres illimités, sphères, droites, plans.

4. Structure orthogonale de l'espace. La relation d'orthogonalité et son lien avec le parallélisme, les rotations, les symétries bilatérales. Angles droits sur diverses figures.

5. Groupe des déplacements. Notion de composition et de groupe. Détermination de déplacements par des figures diverses. Classification progressive des déplacements de la droite, du plan et de l'espace (à terminer en 3e année). Emergence des isométries de la droite et du plan et leur classification progressive. Contact sensoriel préalable avec symétries-glissées, vissages, anti-rotations. Mériterait une synthèse en 4e (ou plus tard). Classification des corps de révolution.

6. Structure angulaire et métrique de l'espace.

Diverses notions d'angle. Somme des angles d'un triangle. Cercles, sphères, distances et principales propriétés. Arc de segment capable.

7. Groupe des dilatations. Mise au point des notions de translation, symétrie centrée, homothétie et nouveau contact groupal. Les diverses versions du théorème de Thalès. Figures invariantes par des homothéties.

8. Longueurs-Aires-Volumes. Un chapitre de ce genre devrait être traité chaque année de manière à entretenir l'acquis et à préparer peu à peu le calcul intégral. Théorème de Pythagore. Explication progressive du rôle joué par Π dans diverses formules. Principe de Cavalieri. Caractère affiné du volume dans l'espace et de l'aire dans le plan. Etude sensorielle d'affinités.

9. Le groupe des similitudes. Vision des similitudes comme symétries de l'espace. Plusieurs définitions équivalentes. Synthèse des déplacements et des dilatations. Points fixes des similitudes.

10. Ensembles structurés et groupes de symétries. Notion d'ensemble structuré, d'isomorphisme, de symétrie. Groupes de symétries, orbites, stabilisateurs. Chapitre de synthèse qu'il est possible de lier par exemple au cube de Rubik et qui peut avoir des retombées lointaines, par exemple sur les fonctions continues, sur l'étude de \mathbb{C} et sur celle des transformations linéaires. Liens avec l'ordinateur.

11. Structure vectorielle. A construire progressivement à partir de la 2e année et à utiliser de plus en plus souvent par la suite. Intervient dans tous les autres points cités jusqu'ici. Contact étroit avec la physique.

12. Fonctions trigonométriques et produit scalaire. Devraient être introduites modestement dès la 3e année, en liaison constante avec les nombreuses applications pratiques. Eviter les excès de jonglerie technique et aborder plus tôt l'aspect fonctionnel (périodicité, croissance, décroissance).

13. Les perspectives. Une mine d'or qui semble tout à fait ignorée. La perspective cavalière est mécanisable (et programmable) grâce à l'outil vectoriel. Celui-ci suggère d'autres perspectives que nous appellerons vectorielles et qui peuvent être traitées sur ordinateur. La perspective ordinaire ou projection centrale qui résout un problème posé par les peintres de la Renaissance, conduit à l'introduction de points de fuite (ou points à l'infini) et de droites de fuite (ou droites à l'infini). Cette étude est facilement accessible dès la 3e année. Elle offre une excellente occasion de revoir et maîtriser la structure affine. Pour les peintres, le problème non trivial le plus fondamental fut la perspective du cercle. Celle-ci conduit aux sections coniques. La projection stéréographique pose un problème que les sens ne permettent pas de résoudre et qui conduit à un résultat spectaculaire, moyennant un appel modeste à l'inversion. (Serait un excellent et bref sujet de révision de géométrie fondamentale, en 4e ou en 5e).

14. Orientation. Une explication de l'opposition gauche-droite qui joue un rôle fondamental dans notre compréhension de l'espace et même de la vie. Totalement ignorée par les mathématiciens dans leur grande majorité. Une autre mine d'or méconnue.

15. Transformations linéaires. Approche sensorielle et graphique. Lien avec les matrices. Etude générale dans le cadre vectoriel. Lien avec les affinités. Vecteurs propres. Liens avec le calcul numérique et l'ordinateur.

16. Graphes. Structure qui prend une importance croissante dans tous les domaines (sciences humaines, informatique, physique, chimie) et qu'il convient d'introduire et développer peu à peu. Notions de circuit, chemin, symétrie, flux. Lien avec polyèdres, pavages, molécules, cristaux, électricité. Représentation d'un graphe au moyen d'une matrice et de la sorte, traitement d'un graphe sur ordinateur.

17. Courbes et surfaces. Etude de fonctions d'une variable et deux variables et leur représentation graphique, sans développement théorique concernant les fonctions de deux variables. Activité à reprendre chaque année. Courbes de niveau, lignes de plus grande pente, gradient. Visualisation grâce à l'ordinateur.

18. Coordonnées homogènes et plan projectif. Etude projective, affine et euclidienne des coniques et quadriques. Un accent plus grand pourrait être mis sur les aspects sensoriels et les questions techniques pourraient jouer un rôle moindre. Toutefois, la classification des quadriques à l'aide d'isométries est l'une des rares applications de la théorie des valeurs propres qui soit accessible à ce niveau. Traitement informatique tant sur le plan visuel que sur le plan numérique.