ULB

PROBLEMATHS

22 mars 2019

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

<u>**Solution du Problemath 10**</u> : L'hypothèse sur A, B, C implique l'existence d'un nombre réel k tel que $cosA = 2k$, $\cos B = 9k$ et $\cos C = 12k$ (avec $k < \frac{1}{12}$ car $\cos C < 1$, et $k \geq 0$ sinon les 3 cosinus seraient négatifs et le triangle aurait 3 angles obtus). A, B, C étant compris entre 0 et π, on en tire $\sin A = \sqrt{1-4k^2}$, $\sin B = \sqrt{1-81k^2}$ et $\sin C = \sqrt{1-144k^2}$. Comme $A+B+C = \pi$, on a $\cos(A+B) = -\cos C$, c'est -à-dire $\cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos C = 0$, d'où on déduit (après calculs) que $432k^3 + 229k^2 - 1 = 0 \quad (*)$. Si $k = \dfrac{m}{n}$ avec m et n entiers positifs premiers entre eux, alors $432m^3 + 229m^2n = n^3$, donc $m|n$, c'est-à-dire $m = 1$. Il en résulte que $432 + 229n = n^3$, donc $n|432 = 2^4 3^3$ avec $n > 12$ (car $k < \frac{1}{12}$). On en déduit facilement que $n = 16$, et l'équation $(*)$ admet donc comme racines $\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{27}(-8+\sqrt{37})$ et $\dfrac{1}{27}(-8-\sqrt{37})$. Les racines négatives étant exclues, il ne reste que $k = \dfrac{1}{16}$ et donc $\sin A = 6\sqrt{7}/16, \sin B = 5\sqrt{7}/16$ et $\sin C = 4\sqrt{7}/16$. La loi des sinus $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ donne alors $\dfrac{a}{6} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{4}$.

<u>**Ont fourni une solution correcte**</u> : T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), B.DUBUS (BA1 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), M.CORNEZ, O.DECKERS, A.GREEN, T.HAMEL, Y.SUPRIN (profs de maths), E.GRUWE (ingénieur), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

<u>**Solution du Problemath 11**</u> : Voici un exemple (parmi d'autres) d'une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions $x \in [0,1]$ de l'équation $f(x) = r$ soit un entier pair ≥ 0. Considérons, dans le plan $\mathbb{R}^2$, les points $a_0 = (1,0), b_0 = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$, $a_k = (\dfrac{1}{2^{2k}}, \dfrac{1}{2^{k+1}})$ et $b_k = (\dfrac{1}{2^{2k+1}}, \dfrac{1}{2^k})$ pour tout entier $k > 0$.
Le graphe de f est la réunion des segments fermés $[a_k, b_k]$ et $[b_k, a_{k+1}]$ pour tout $k \geq 0$ et on pose $f(0) = 0$. On vérifie facilement que la fonction linéaire par morceaux ainsi définie est continue et que toute droite parallèle à l'axe des x coupe le graphe de f en $0, 2$ ou 4 points. On pourrait modifier légèrement cet exemple pour obtenir une fonction dérivable ayant la même propriété.

<u>**Ont fourni une solution correcte**</u> : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

Solution du Problemath 12. On peut identifier les sommets de P aux nombres complexes $r\varepsilon^k$, où $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, et les points de C aux nombres $p = rz$ où $|z| = 1$. Le produit des distances de p aux sommets de P est alors

$$\Pi_{k=1}^{n}|rz - r\varepsilon^k| = r^n\Pi_{k=1}^{n}|(z-\varepsilon^k)| = r^n|z^n - 1| \leq r^n(|z^n| + 1) = 2r^n.$$

La valeur maximum de ce produit est donc $2r^n$, qui est atteinte si et seulement si $|z^n - 1| = 2$, c'est-à-dire ssi $z^n = -1$. Les points p cherchés sont donc les milieux des arcs joignant deux sommets consécutifs de P sur le cercle C.

Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), M.CORNEZ, Y.SUPRIN (profs de maths), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

Solution du Problemath 13 : Numérotons $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les n cases de la rangée. Si $n = 2k$ est pair, partitionnons l'ensemble des n cases en k paires $\{c_{2i-1}, c_{2i}\}(i = 1, \ldots, k)$. Si, chaque fois qu'Alice écrit une lettre dans une case d'une de ces paires, Bob décide d'écrire la même lettre dans l'autre case, le mot AHA n'apparaîtra jamais pendant la partie car toute lettre aura au moins une voisine identique, ce qui n'est pas le cas du H dans AHA. La partie étant nulle (aucun vainqueur), Alice n'a pas de stratégie gagnante. Supposons maintenant n impair. Pour $n = 3$ et $n = 5$, un simple examen de cas montre que, si Alice et Bob jouent le mieux possible, toute partie est nulle. Dorénavant, on supposera donc n impair ≥ 7.

Une case vide sera dite perdante si, lorsqu'un joueur écrit une lettre dans cette case, il permet à son adversaire de gagner au coup suivant. Si on écrit un H dans une case perdante, l'adversaire pourra écrire AHA au coup suivant, donc toute case perdante est adjacente à un A d'un côté et à une autre case vide de l'autre côté. De même, si on écrit un A dans une case perdante, l'adversaire pourra écrire AHA au coup suivant ; comme toute case perdante est située entre un A et une case vide, cette dernière doit être elle-même adjacente à un A (pour que l'adversaire puisse gagner en y mettant un H) et, par symétrie, c'est aussi une case perdante. Les cases perdantes sont donc groupées par paires (entourées par deux A).

Comme $n \geq 7$, Alice peut construire une paire de cases perdantes en deux coups dès le début de la partie. Pour ce faire, au premier coup elle écrit un A en c_4. Au second coup, si elle peut gagner (parce que Bob a écrit un H à côté de ce A), elle profite bien sûr de l'occasion. Dans le cas contraire, si Bob joue en c_i avec $i < 4$, Alice met un A en c_7, sinon elle le met en c_1.

Comme n est impair, chaque fois que c'est au tour d'Alice de jouer, le nombre de cases vides restantes est impair et, lorsque c'est au tour de Bob, ce nombre est pair. Il en résulte qu'Alice est assurée de gagner car il reste toujours au moins une case vide non perdante lorsque c'est à son tour de jouer (Alice doit bien entendu saisir toute occasion de gagner si Bob joue mal et lui offre la victoire). Tôt ou tard, Bob n'aura plus à sa disposition que des cases perdantes et, puisqu'Alice a pu en construire au moins deux, il perdra la partie. En conclusion, Alice a une stratégie gagnante si et seulement si n est impair ≥ 7.

Ont fourni une solution correcte : T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), O.DECKERS, A.GREEN, T.HAMEL (profs de maths), W.DE DONDER (ingénieur), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des participant(e)s aux Problemaths 2018-2019, tous cordialement invités à un drink avec remise des diplômes et des prix, qui aura lieu le mercredi 24 avril à 12h30 dans le local 2.O8.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus de la Plaine de l'ULB, Boulevard du Triomphe à Bruxelles).

- A résolu 13 Problemaths : T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers en France).
- A résolu 12 Problemaths : M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).
- A résolu 10 Problemaths : R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL).
- Ont résolu 9 Problemaths : S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), A.GREEN, Y.SUPRIN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W.DE DONDER, A.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs).
- Ont résolu 8 Problemaths : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), K.D.NGUYEN (BA1 polytech ULB), O.DECKERS, T.HAMEL (profs de maths), E.GRUWE (ingénieur), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).
- Ont résolu 7 Problemaths : S.LEMAL (BA1 maths ULg), B.DUBUS (BA1 polytech ULB), S.MASSON (prof de maths).
- Ont résolu 5 Problemaths : G.PETRELLA (BA2 maths ULB), C.LABIOUSE (MA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon).
- Ont résolu 4 Problemaths : Q.CLAUS (élève de 6ème à l'Athénée d'Uccle I), D.H.NGUYEN (BA1 polytech ULB), M.CORNEZ (prof de maths).
- Ont résolu 3 Problemaths : S.NAOULI (élève de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), C.LARIVIERE, H.VERMEIREN (profs de maths), R.REYNOUARD (MA1 informatique ULB), C.DE GROOTE (doctorant Univ Stanford) et LADY BELMATH.
- Ont résolu 2 Problemaths : C.RUIZ (BA1 physique ULB), L.PRIEELS (BA1 polytech ULB), C.KIERE (BA3 polytech ULB), F.GHEERAERT (MA1 maths ULg), P.GILLET, C.VAN HOOSTE (profs de maths).
- Ont résolu 1 Problemath : M.MERIEMQUE (élève de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), I.BRICCHI (élève de 6ème à la St Johns International School), P.VANBORRE (élève de Terminale S au Lycée Henri IV de Paris), F.RASSELOT (BA1 maths ULB), A.SURCA, T.GUISSARD (BA1 polytech ULB), C.BODART (MA1 maths ULB), M.ABRAHAM (prof de maths), C.DESSAUVAGES, G.MUKENDI (ingénieurs), P.SARACCO (postdoc à l'ULB), A.WAJNBERG (journaliste scientifique).

L'équipe Problemaths (Christine CUTTING, Anne DELANDTSHEER, Julie DISTEXHE, Jean DOYEN, Keno MERCKX, Carole MULLER et Adrien VANDENSCHRICK) vous donne rendez-vous l'année prochaine pour de nouveaux défis mathématiques !