PROBLEMATHS
8 novembre 2019

Problemath 7

Si les 4 hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, alors les milieux des 6 arêtes sont sur une même sphère. Vrai ou faux ?

Problemath 8

n commères $C_1, C_2, ..., C_n$ communiquent entre elles par lettres. Chaque commère connaît un détail d'une certaine information et les n détails sont tous différents. Chaque fois qu'une commère C_i envoie une lettre à C_j, elle lui raconte tout ce qu'elle sait au moment où elle écrit la lettre. Quel est le nombre minimum de lettres que doivent s'envoyer les n commères pour que chacune d'elles finisse par connaître tous les détails de l'information?

Problemath 9

Une suite $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par $f_0(x) = e^x$ et $f_{n+1}(x) = xf_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\Sigma_{n=0}^{\infty} \dfrac{f_n(1)}{n!}$?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard **le vendredi 29 novembre à 14h**

Solution du Problemath 4 : L'hypothèse $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ (avec x,y,z et $x + y + z$ non nuls) peut aussi s'écrire $(xy + yz + zx)(x + y + z) = xyz$, ou encore $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$. Deux des nombres x,y,z ont donc une somme nulle. Le problème étant totalement symétrique en x,y,z, on peut supposer que $x+y = 0$. Dès lors, la condition $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} = \frac{1}{(x+y+z)^n}$ se réduit à $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(-x)^n} + \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^n}$, c'est-à-dire $x^n + (-x)^n = 0$. Les seuls n qui conviennent sont donc les entiers impairs.
Ont fourni une solution correcte : A.BETERMIER (élève de 5ème au Collège St Roch à Ferrières), O.VAZQUEZ NUNEZ (élève de 5ème, enseignement à domicile), D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Q.CLAUS, M.SCHULLER (BA1 maths ULB), B.DUBUS, K.D.NGUYEN, L.PRIEELS (BA2 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), O.DECKERS, T.HAMEL, S.MASSON, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), J.M.BAYLAC, W.DE DONDER, M.LESSINNES, T.LESSINNES, G.MUKENDI (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

Solution du Problemath 5 : Dans le plan $\mathbb{R}^2$, appelons point rationnel tout point dont les deux coordonnées sont rationnelles, et segment rationnel tout segment dont les deux extrémités sont des points rationnels. Le point $p = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ n'est couvert par aucun segment rationnel. En effet, comme $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, p n'est couvert par aucun segment rationnel horizontal ou vertical. S'il était couvert par un segment rationnel oblique, celui-ci serait contenu dans une droite d'équation $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $a \neq 0$, et on aurait $\sqrt{3} = a\sqrt{2} + b$. En élevant au carré, on obtient $3 = 2a^2 + b^2 + 2a\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{3-2a^2-b^2}{2a} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
N. B.: La théorie de la mesure permet de prouver beaucoup plus. En effet, comme le cardinal de $\mathbb{Q}$ est dénombrable, de même que celui de $\mathbb{Q}^4$, l'ensemble des segments rationnels est dénombrable. La mesure de tout segment étant nulle, celle de la réunion dénombrable des segments rationnels l'est aussi, donc cette réunion ne peut couvrir $\mathbb{R}^2$, dont la mesure est non nulle. Autrement dit, presque tous les points de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire tous, sauf ceux d'un sous-ensemble de mesure nulle) ne sont pas couverts!

Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), Q.CLAUS, M.SCHULLER (BA1 maths ULB), B.DUBUS, K.D.NGUYEN (BA2 polytech ULB), S.LEMAL (BA2 maths ULg), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), T.HAMEL,S.MASSON, Y.SUPRIN,C.VAN HOOSTE (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), J.M.BAYLAC, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Solution du Problemath 6 : Soient o le centre de Γ et x, y, z les centres respectifs de A, B, C. Le triangle xyz étant équilatéral, $|ox| = |oy| = oz| = k$ et le rayon R de Γ vaut $r + k$, où r est le rayon de A, B, C. On va prouver que pour tout point p de Γ, l'une des distances $|pa|, |pb|, |pc|$ est la somme des deux autres. Etant donné la symétrie du problème (invariance par les rotations de 120° centrées en o), il suffit de prouver que $|pa| + |pb| = |pc|$ pour tout point p de l'arc de 120° de Γ reliant les points de tangence de Γ avec A et B. Si $\alpha = \widehat{xop}$, le théorème d'al-Kashi dans les triangles xop, yop et zop donne

$$|px|^2 = R^2 + k^2 - 2kRcos\alpha$$
$$|py|^2 = R^2 + k^2 - 2kRcos(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$$
$$|pz|^2 = R^2 + k^2 - 2kRcos(\frac{2\pi}{3} + \alpha).$$

Dans le triangle rectangle pax,

$$\begin{aligned}|pa|^2 = |px|^2 - r^2 &= (r+k)^2 + k^z - 2k(r+k)\cos\alpha - r^2\\ &= 2k(r+k)(1-\cos\alpha) = 4k(r+k)\sin^2\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

De même,

$$|pb|^2 = 4k(r+k)\sin^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2})$$

et

$$|pc|^2 = 4k(r+k)\sin^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}).$$

Comme les angles $\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}$ sont tous dans l'intervalle $[0, \frac{2\pi}{3}]$, leurs sinus sont positifs et on a donc $|pc| - |pa| - |pb| = 2\sqrt{k(r+k)}(\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}) - \sin\frac{\alpha}{2} - \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}))$.
Un calcul élémentaire montre que $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2})$. On a donc bien $|pa| + |pb| = |pc|$.
Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), M.SCHULLER (BA1 maths ULB), S.LEMAL (BA2 maths ULg), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), T.HAMEL, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE, H.VERMEIREN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), J.M.BAYLAC, W.DE DONDER, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), F.THONAR (actuaire à Tokyo), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

LES PENSÉES DU JOUR
"The most vitally characteristic fact about mathematics is, in my opinion, its quite peculiar relationship to the natural sciences, or more generally, to any science which interprets experience on a higher than purely descriptive level"(John VON NEUMANN, mathématicien américain d'origine hongroise, 1903-1957)
"In the broad light of day, mathematicians check their equations and their proofs. But, at night, under the full moon, they dream, they float among the stars and wonder at the miracle of the heavens. Without dreams, there is no art, no mathematics, no life" (Michael ATIYAH, mathématicien anglais, 1929-2019, Médaille Fields en 1966, Prix Abel en 2004).
"L'intuition, c'est l'intelligence qui fait des excès de vitesse" (Pierre DAC, humoriste français, 1893-1985)

ILS SE CACHENT. RETROUVEZ-LES
Voici, dans l'ordre d'apparition, les 27 noms qui se cachaient dans le texte: Euler, Artin, Cartan, Chasles, d'Alembert, Lambert, Cauchy, Tits, Bourgain, Turing, Néper, Pythagore, Fermat, Deligne, Thalès, Mirzakhani, Gödel, Boole, Serre, Taylor, Pascal, Pell, Gauss, Riemann, Noether, de l'Hospital, Archimède.