Bi-droites

Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout, Claude Culus
Monique Fréderickx, Annie Goovaerts, Jacqueline Sengier

4 juin 2007

Math-UREM

Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Prof. Fr. Buekenhout - Prof. J. Sengier - Prof. R. Hinnion
fbueken@ulb.ac.be – sengier@ulb.ac.be –rhinnion@ulb.ac.be
http://www.ulb.ac.be/sciences/urem/

Campus Plaine, CP – 215
Bd du Triomphe — 1050 Bruxelles
Tél. (32) (2) 650 58 55 (Secr. (32) (2) 650 58 65)
Fax (32) (2) 650 58 67

FIG. 1 – Bi-droite non-orthogonale

Résumé

Cet article analyse la notion de bi-droite. Il s'agit de la figure spatiale la plus simple. Elle est constituée de deux droites gauches. Son groupe de symétries est soit d'ordre 4 soit d'ordre 8. Dans le premier cas, la bi-droite est dite *non-orthogonale*. C'est une figure orientée. Dans le deuxième cas, la bi-droite est dite *orthogonale*. C'est une figure non-orientée.

Table des matières

1 Définition d'une bi-droite

Considérons l'espace euclidien et la figure constituée par une paire de droites gauches A et B (voir figure 2). Nous dirons que cette figure est une *bi-droite* et nous la notons AB. Il s'agit d'une figure spatiale particulièrement simple. Que peut-on en dire ?

Les droites A et B ont une perpendiculaire commune que nous appelons *axe* $a(AB)$ de la bi-droite. Les points $A \cap a(AB)$ et $B \cap a(AB)$ sont les *pieds* de la bi-droite et leur milieu $c(AB)$ est le *centre* de la bi-droite. Le plan perpendiculaire à l'axe $a(AB)$ en $c(AB)$ est la *feuille* $f(AB)$ de la bi-droite. L'*angle* $\measuredangle(AB)$ de la bi-droite AB est l'angle que font des parallèles à A et B, sécantes en un point p de l'espace. Cet angle ne dépend pas de p et parcourt l'intervalle$]0, \frac{\pi}{2}]$.

Le cas où $\measuredangle(AB) = \frac{\pi}{2}$ est particulièrement intéressant. Dans ce cas, A et B sont dites *orthogonales* et nous dirons en bref que la bi-droite est orthogonale.

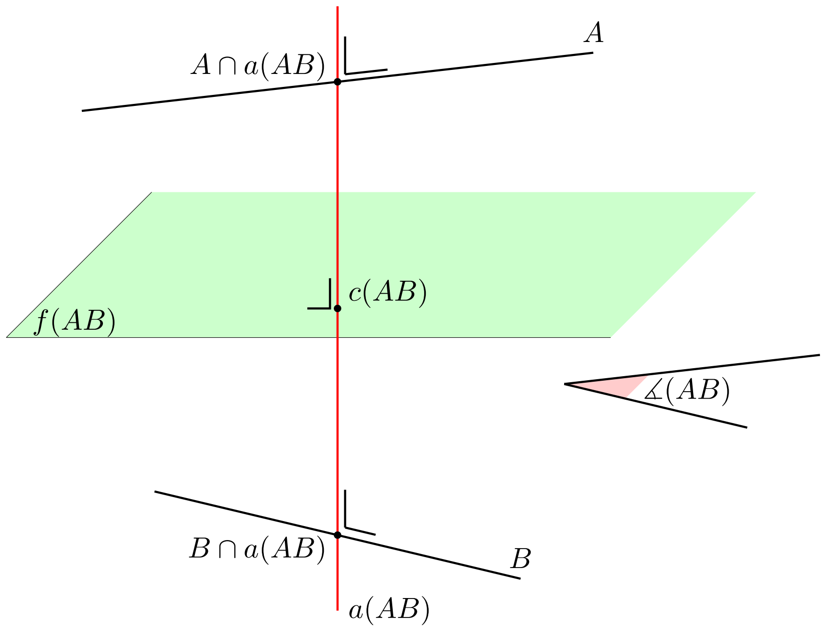

FIG. 2 – La bi-droite

2 Groupe des isométries conservant une bi-droite : Iso(AB)

2.1 Identité et demi-tours

Remarquons tout d'abord que le groupe des isométries Iso(AB) qui conserve la bi-droite est identique au groupe des similitudes qui conserve la bi-droite car la distance entre les pieds doit être conservée.

Soit $\alpha \in \text{Iso}(AB)$. L'isométrie conserve le « squelette » de la bi-droite constitué par l'axe, le centre, la feuille et le segment joignant les pieds.

Nous observons trois demi-tours d'axes deux à deux perpendiculaires conservant AB (voir figure 3) :

- le demi-tour δ_1 d'axe $a(AB)$ qui conserve A et B,
- deux demi-tours δ_2 et δ_3 , dont les axes sont dans $f(AB)$ et qui bissectent les angles formés par les parallèles à A et B menées par $c(AB)$. Ces demi-tours échangent A et B. Dès lors, A et B jouent le même rôle et nous avons une bonne raison pour écrire bi-droite AB = bi-droite BA.

Théorème 1 $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ *forme un groupe*

En effet, on remarque que $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i = \delta_k$ pour $i \neq j \neq k \neq i$ et que $\delta_i^2 = I$ où $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

□

Théorème 2 *Si la bi-droite AB n'est pas orthogonale, alors $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ est le groupe des isométries de la bi-droite.*

Soit α un automorphisme hypothétique autre que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et I. Alors $\alpha\delta_i$ est également un automorphisme autre que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. En effet, si $\alpha\delta_i = \delta_j$, alors $\alpha\delta_i\delta_i = \delta_j\delta_i$ ou $\alpha = \delta_k$ et α ne serait pas un automorphisme autre que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Nous distinguons deux cas :

1. α fixe les deux pieds a et b de la bi-droite AB.
2. α permute les deux pieds a et b de la bi-droite AB.

Voyons que dans les deux cas on obtient une contradiction.

Cas 1 : Si α fixe les deux pieds, $\alpha(a) = a$ et $\alpha(b) = b$. Considérons un point p de A. On a deux possibilités pour l'image de p : $\alpha(p) = p$ ou $\alpha(p) = p'$, symétrique de p par rapport au point a car α est une isométrie et par conséquent conserve les distances (voir figure 4).

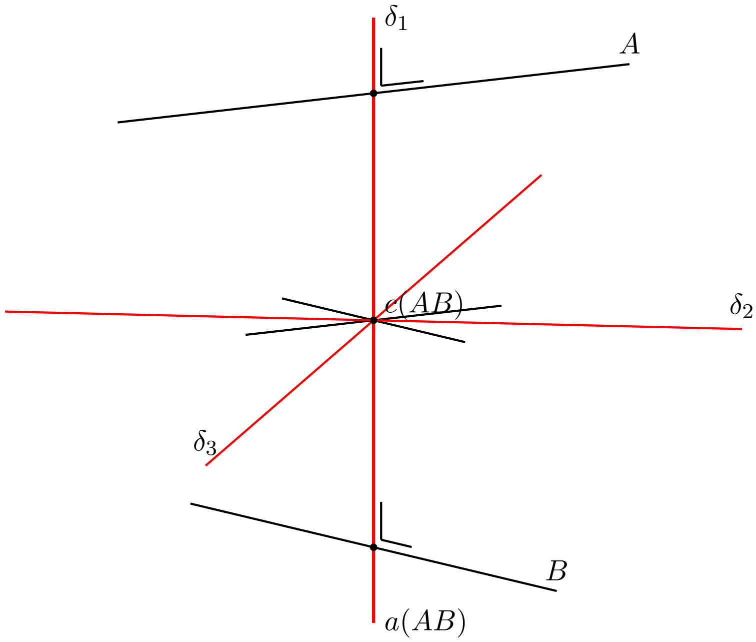

FIG. 3 – Identités et demi-tours

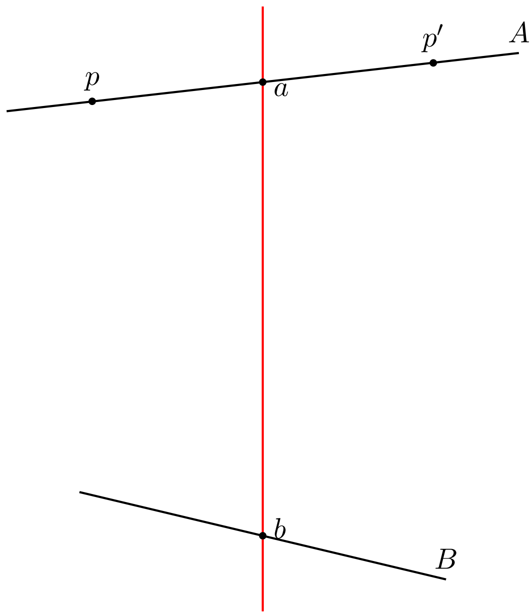

FIG. 4 – p est envoyé sur p'

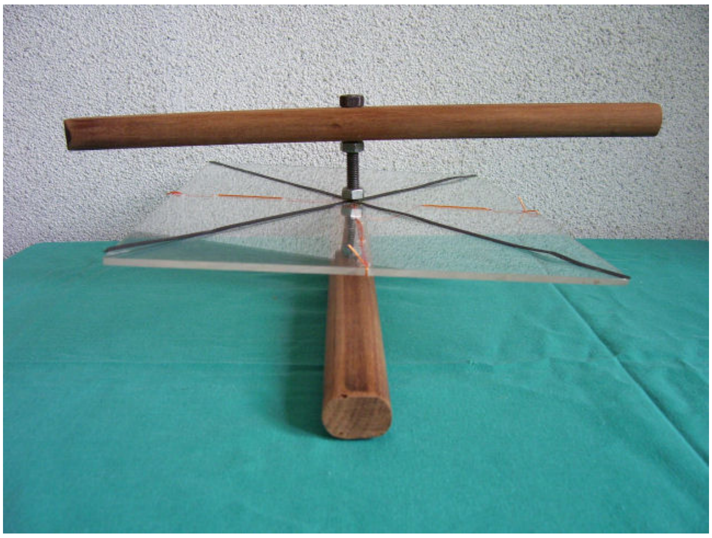

FIG. 5 – Bi-droite orthogonale

(a) Si $\alpha(p) = p$, le plan (A, b) est fixe et α est soit une symétrie bilatérale d'axe (A, b), soit l'identité (démonstration voir 4.1). Si α est une symétrie bilatérale d'axe (A, b), la droite B, conservée par α serait orthogonale au plan (A, b) ce qui est contraire aux hypothèses. Si α est l'identité, nous contredisons l'hypothèse faite sur α au début de la démonstration.

(b) Si $\alpha(p) = p'$, $\alpha\delta_1(p) = p$ et pour les mêmes raisons qu'au point 1, on aurait $\alpha\delta_1 = I$, c'est-à-dire $\alpha = \delta_1$ ce qui est contraire aux hypothèses.

Cas 2 : Si α permute les deux pieds, $\alpha(a) = b$ et $\alpha(b) = a$. Comme δ_2 permute a et b, on obtient $\alpha\delta_2(a) = \alpha(b) = a$ et $\alpha\delta_2(b) = \alpha(a) = b$.

(a) Si $\alpha\delta_2(p) = p$, $\alpha\delta_2$ est l'identité et $\alpha = \delta_2$, ce qui est contraire aux hypothèses.

(b) Si $\alpha\delta_2(p) = p'$, $\alpha\delta_2\delta_2(p) = p$ ou $\alpha(p) = p$. Il s'en suit que $\alpha = I$, ce qui est contraire aux hypothèses.

$\square$

Théorème 3 *Toute bi-droite non-orthogonale est une figure orientée*

Rappel : toute figure non orientée est conservée par au moins un retournement de l'espace. (Consulter les articles de Buekenhout et Frédericks [4] et [7]). Le théorème se justifie par le fait que toute isométrie qui conserve une bi-droite non orthogonale est un déplacement.

$\square$

2.2 Groupe des isométries conservant une bi-droite orthogonale

Nous savons déjà qu'une bi-droite orthogonale est conservée par le groupe des déplacements $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. De plus la symétrie orthogonale (retournement) σ_A qui fixe le plan contenant A et $c(AB)$ ainsi que la symétrie orthogonale σ_B qui fixe le plan contenant B et $c(AB)$, conservent également cette bi-droite orthogonale (voir figure 6).

Si on compose ces diverses isométries, on en obtient deux nouvelles : $K = \delta_2\sigma_A$ et $K' = \delta_3\sigma_A$ qui sont des antirotations. (voir Appendice 4.2).

Les isométries obtenues sont actuellement au nombre de huit. En existe-t-il une autre ? Supposons que α soit une isométrie de la bi-droite orthogonale autre que les précédentes. Comme précédemment on a deux cas :

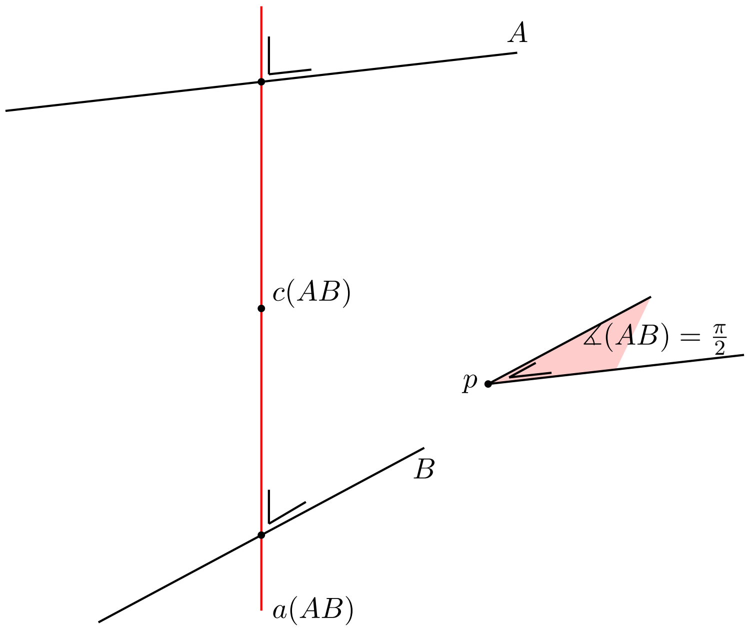

FIG. 6 – Bi-droite orthogonale

1. Si α conserve la droite A et les deux pieds de la bi-droite, il s'en suit que soit $\alpha = I$ ou $\alpha = \sigma_A$ (appendice 1).
2. Si α échange les droites A et B, $\alpha\delta_2$ les conserve. Il s'en suit que soit $\alpha\delta_2 = I$ et dans ce cas $\alpha = \delta_2$, soit $\delta_2 = \sigma_A$ ou σ_B et dans ce cas $\alpha = \sigma_A\delta_2$ ou $\sigma_B\delta_2$.

Théorème 4 $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \sigma_A, \sigma_B, K, K'\}$ *forme un groupe*

Le tableau de l'appendice 4.2 justifie cette hypothèse.

□

Théorème 5 *Si la bi-droite AB est orthogonale, alors* $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \sigma_A, \sigma_B, K, K'\}$ *est le groupe des isométries de la bi-droite*

Le groupe des isométries d'une bi-droite orthogonale comprend huit éléments :
- l'identité I,
- trois demi-tours : δ_1, δ_2 et δ_3
- deux symétries bilatérales σ_A et σ_B,
- deux antirotations $\delta_2\sigma_A$ et $\delta_3\sigma_A$.

□

Voilà à nouveau le groupe D_8 qui apparaît ! Si on compare le tableau de compositions du groupe des isométries d'une bi-droite (voir Appendice 4.2) et celui du carré plan (voir l'article [3])ou du carré gauche (voir l'article [1] , on voit que ces groupes sont isomorphes.

Théorème 6 *Toute bi-droite orthogonale est une figure non orientée*

Ceci se justifie par exemple par le fait qu'une bi-droite orthogonale est conservée par la symétrie orthogonale σ_A.

3 Quadrilatères gauches et bi-droites

Tout quadrilatère est une bi-droite concrétisée par deux points sur chaque droite (voir les figures 7 et 9). Les droites composant la bi-droite sont les diagonales de ce quadrilatère gauche et les points sont les sommets du quadrilatère gauche . . . ceci est l'objet d'un autre dossier (voir l'article [1]).

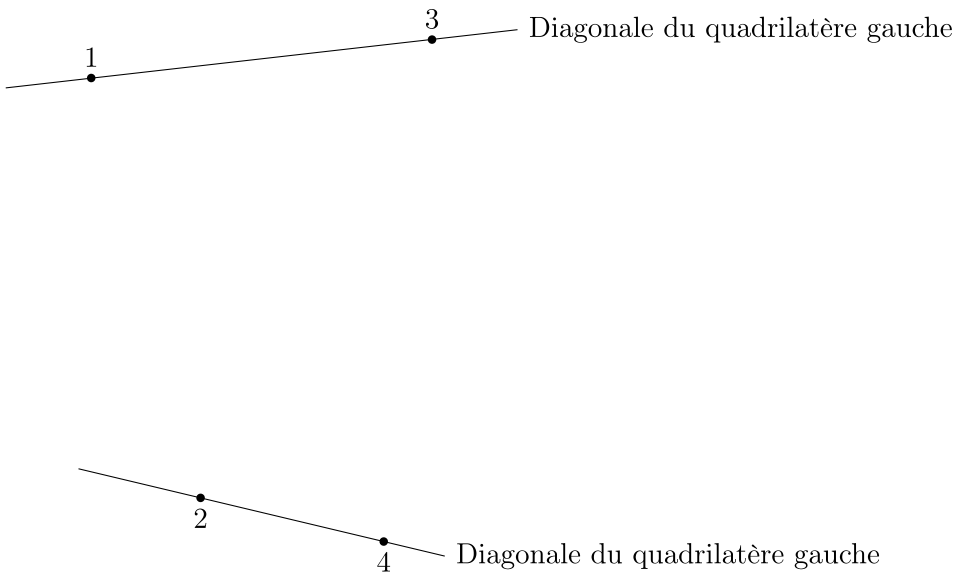

Fig. 7 – La bi-droite et les diagonales d'un quadrilatère gauche

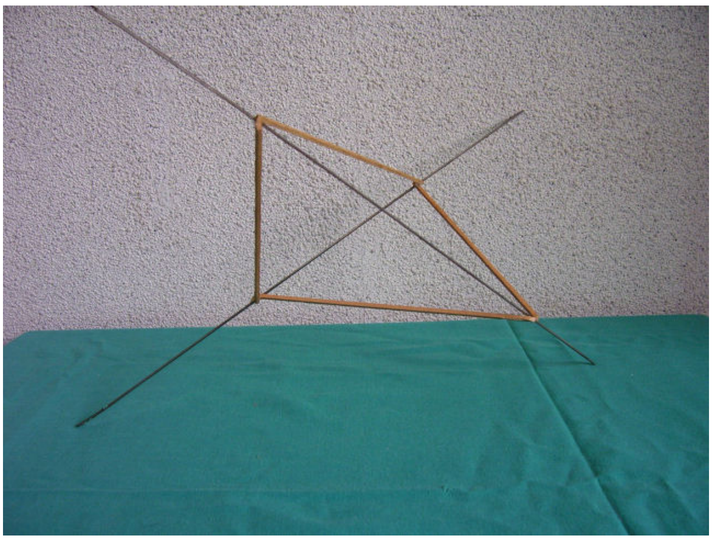

Fig. 8 – Bi-droite et quadrilatère gauche

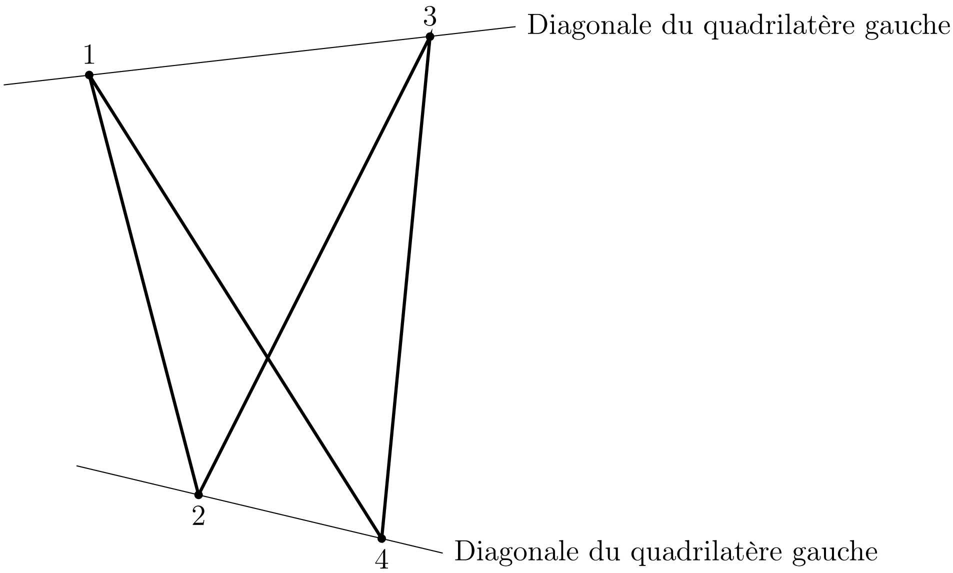

Fig. 9 – Bi-droite et quadrilatère gauche

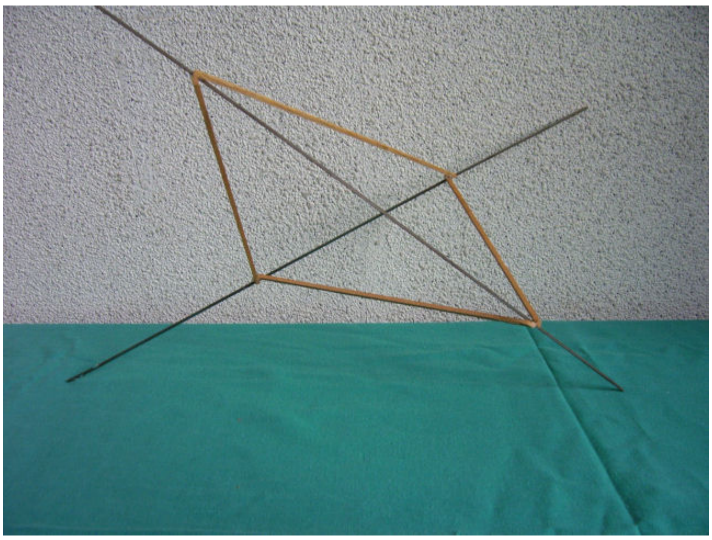

Fig. 10 – Bi-droite et quadrilatère gauche

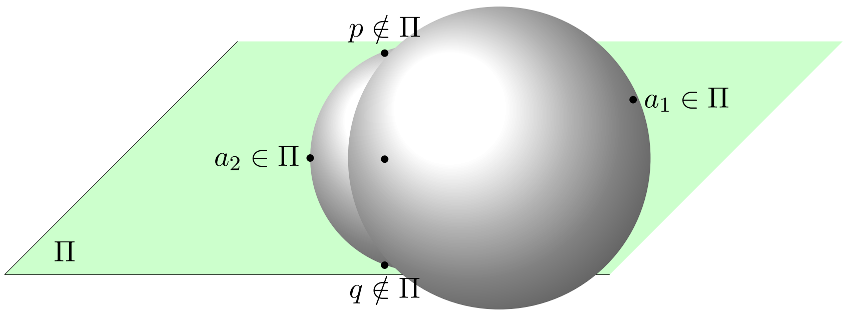

FIG. 11 – Appendice 1

4 Annexes

4.1 Appendice 1

Nous savons que

- Une isométrie de la droite qui fixe deux points est l'identité I.
- Une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés est l'identité I.
- Une isométrie de E^3 qui fixe quatre points non coplanaires est l'identité I.
- Si Π est un plan et p un point extérieur au plan, il existe un et un seul point $q \neq p$, extérieur au plan tel que $d(p,a) = d(q,a)$ **pour tout** point a du plan Π. Ce point est l'intersection de toutes les sphères centrées en un point du plan et passant par p et q est le symétrique de p par rapport au plan Π (voir figure 11).

Théorème 7 *Si Π est un plan, il existe une et une seule isométrie qui fixe tous les points de Π qui n'est pas l'identité.*

Démonstration :

1. Existence : La symétrie bilatérale σ d'axe Π répond à la question.
2. Unicité : soit $\sigma' \neq \sigma$ une isométrie qui fixe tous les points de Π et qui n'est pas l'identité et soit p un point extérieur à Π avec $\sigma(p) = q$. L'isométrie σ' ne peut fixer p vu que σ' n'est pas l'identité et par conséquent $\sigma'(p) = q$ (voir 4.1). Dans ce cas, $\sigma\sigma'(p) = p$ et $\sigma\sigma' = I$ ou encore $\sigma = \sigma'$.

□

4.2 Appendice 2 : groupe des isométries de la bi-droite orthogonale

	I	δ_1	δ_2	δ_3	σ_A	σ_B	K	K'
I	I	δ_1	δ_2	δ_3	σ_A	σ_B	K	K'
δ_1	δ_1	I	δ_3	δ_2	σ_B	σ_A	K'	K
δ_2	δ_2	δ_3	I	δ_1	K	K'	σ_A	σ_B
δ_3	δ_3	δ_2	δ_1	I	K'	K	σ_B	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	K'	K	I	δ_1	δ_3	δ_2
σ_B	σ_B	σ_A	K	K'	δ_1	I	δ_2	δ_3
K	K	K'	σ_B	σ_A	δ_2	δ_3	δ_1	I
K'	K'	K	σ_A	σ_B	δ_3	δ_2	I	δ_1

Voici la table de composition (de multiplication) des huit isométries. Il faut bien veiller à l'ordre des facteurs : le premier figure dans la première colonne et le deuxième dans la première ligne. A lire (1^{ier} facteur)$\circ$($2^{\text{ième}}$ facteur) ou (1^{ier} facteur) après ($2^{\text{ième}}$ facteur).

Références

[1] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Quadrilatères gauches. UREM, ULB, en préparation.

[2] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Quadrilatères gauches et bi-droites. UREM, ULB, en préparation.

[3] Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER : Classification objective des quadrilatères. *CeDoP ULB*, janvier 2007.

[4] Francis BUEKENHOUT : La gauche et la droite en géométrie élémentaire : orientation de figures-chiralité. UREM, ULB, 2005.

[5] Francis BUEKENHOUT et Jean DOYEN : *Espaces euclidiens*. Presses universitaires de Bruxelles, ULB, 1975.

[6] Francis BUEKENHOUT et Jean DOYEN : *Ensembles structurés et groupes de symétries*. ULB, 1982.

[7] Francis BUEKENHOUT et Monique FRÉDERICKX : Orientation. UREM, ULB, 2005.

[8] Annie GOOVAERTS : Enseignement primaire. classement des quadrilatères (plans) en fonction des symétries axiales orthogonales. *CeDoP, ULB*, 2006.

5 Où trouver les références ?

- Les références [1] et [2] seront prochainement postées sur le site de l'UREM
  `http://www.ulb.ac.be/sciences/urem/`
- La référence [3] peut être téléchargée à l'adresse
  `http://dev.ulb.ac.be/urem/?Classification-objective-des`
- La référence [4] peut être téléchargée à l'adresse
  `http://dev.ulb.ac.be/urem/?La-gauche-et-la-droite-en`
- La référence [5] est en vente chez le Professeur Jean Doyen `jdoyen@ulb.ac.be` au prix de 2,50 Euros.
- La référence [6] est en vente chez le Professeur Jean Doyen `jdoyen@ulb.ac.be` au prix de 8 Euros.
- La référence [7] peut être téléchargée à l'adresse
  `http://dev.ulb.ac.be/urem/?Orientation-par-Francis-Buekenhout`
- La référence [8] peut être téléchargée à l'adresse
  `http://dev.ulb.ac.be/urem/?Classement-des-quadrilateres-plans,113`