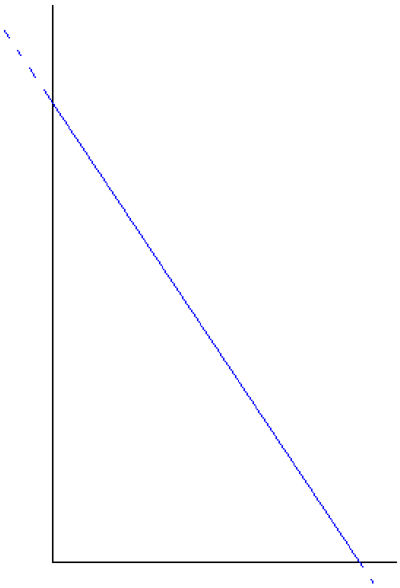
L’échelle du peintre

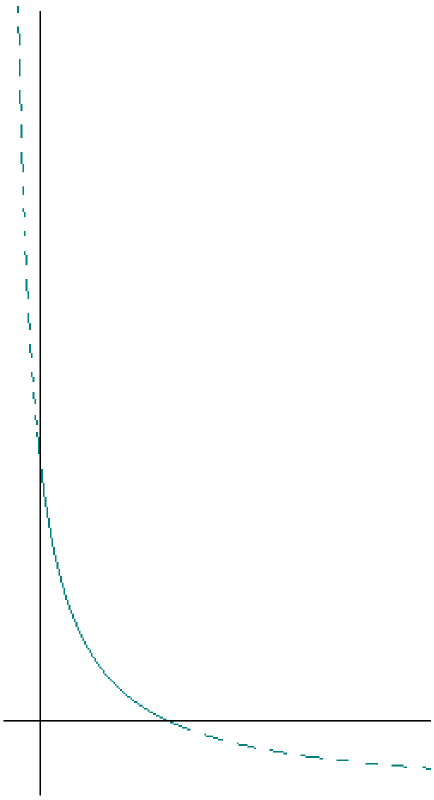
Un peintre en bâtiment doit mettre diverses couches de peinture dans une pièce. Il place son échelle dans un coin afin d’effectuer le travail, monte à l’échelle avec ses trois pots de peinture : un pot de couleur bleue pour le bas qu’il met sur un des premiers échelons, un pot de vert qu’il dispose au centre de l’échelle et enfin un pot de couleur rouge qu’il accroche presque en haut de l’échelle. Il commence son travail mais malchance! L’échelle commence à glisser, l’homme est déstabilisé et les pots en descendant laissent une trace sur le mur d’à côté!!!
Malgré sa chute il peut reprendre le travail mais il est consterné par les lignes laissées par les couleurs sur le mur. Quelles sont les courbes dessinées sur le mur?

Jacques LEFEBVRE – septembre 2007 -

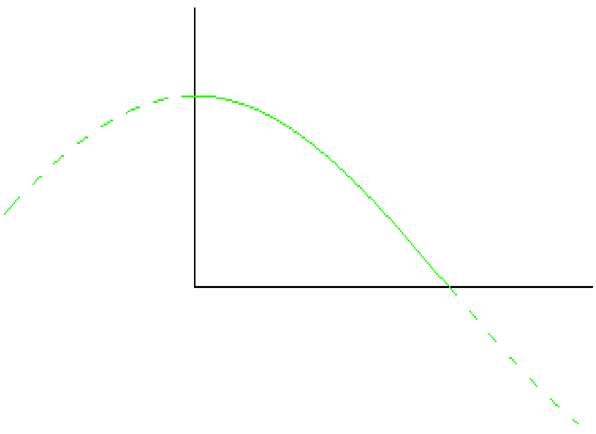


Un segment de droite?

Une partie de parabole?



Une portion d'hyperbole?

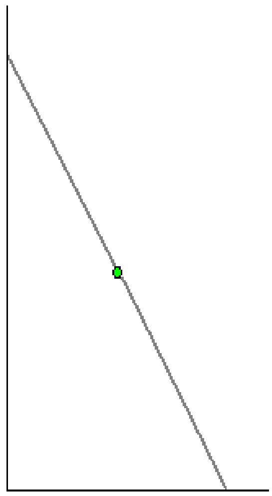


Ou une autre courbe?

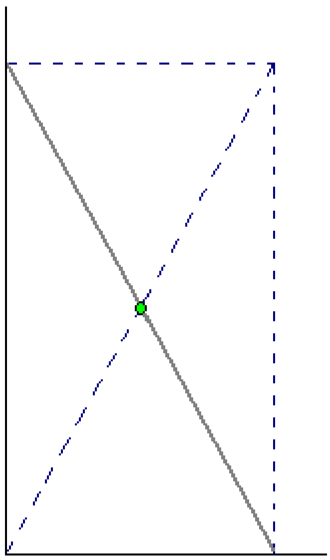
Examinons les différents cas :

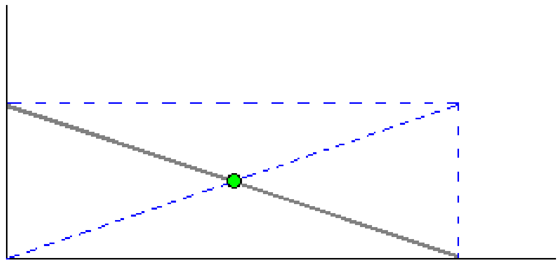
1. La trace du pot vert

Représentons le mur d'appui et le sol par deux droites perpendiculaires, notre échelle par un segment de droite incliné et le pot situé au milieu par un point du segment de droite.

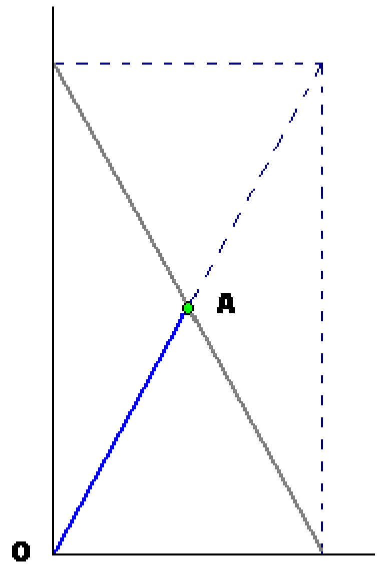


Traçons maintenant le rectangle dont l'échelle est une diagonale. Dessinons aussi l'autre diagonale. Quelque soit la position de l'échelle, le pot sera toujours àl'intersection des deux diagonales.

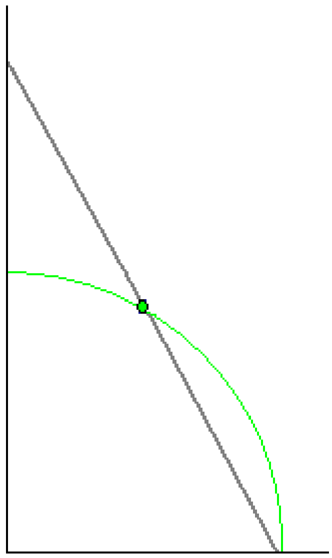




La distance du point O au pot noté A sera constante: comme les diagonales d'un rectangle sont égales, la longueur OA vaudra toujours la moitié de la longueur de l'échelle.

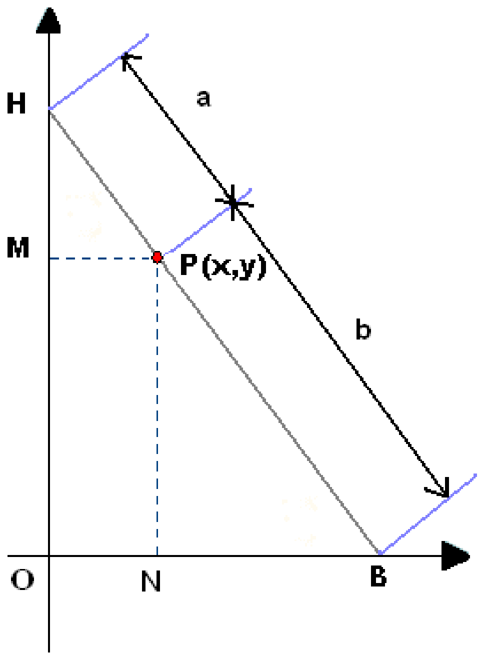


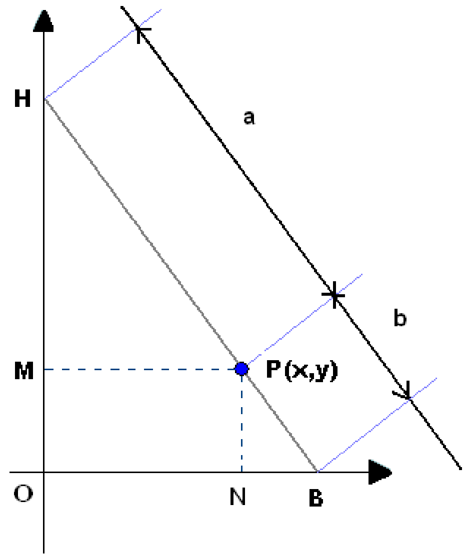
La courbe décrite par le pot sera donc un quart de cercle de rayon OA.



2. Considérons le cas des deux autres pots, le bleu et le rouge :

Résolution par la géométrie élémentaire :





Nous allons ici introduire des axes et des coordonnées.
Le pot sera représenté par le point P de coordonnées x et y.
L'échelle sera divisée en deux parties, l'une de longueur a et l'autre de longueur b.
Soient H et B les points d'appui de l'échelle sur le mur et le sol, M et N les projections du point P sur les axes de coordonnées.

Les triangles HMP et PNB sont des **triangles homothétiques**.
Par conséquent, nous avons : $\frac{MP}{BN}=\frac{HM}{NP}=\frac{HP}{BP}=\frac{a}{b}$

Ainsi : $HM=\frac{a}{b}\cdot NP=\frac{a}{b}\cdot y$ (1)

De plus : $MP=x$ (2)

Le triangle HMP étant un triangle rectangle, nous pouvons utiliser la relation de ***PYTHAGORE*** :

$$HM^2+MP^2=HP^2=a^2$$

En remplaçant HM et MP par les relations tirées de (1) et (2), nous obtenons :

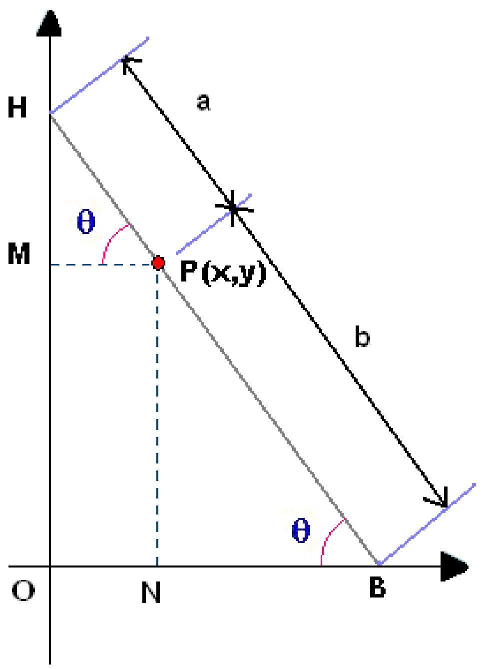
$$\frac{a^2}{b^2}\cdot y^2+x^2=a^2$$

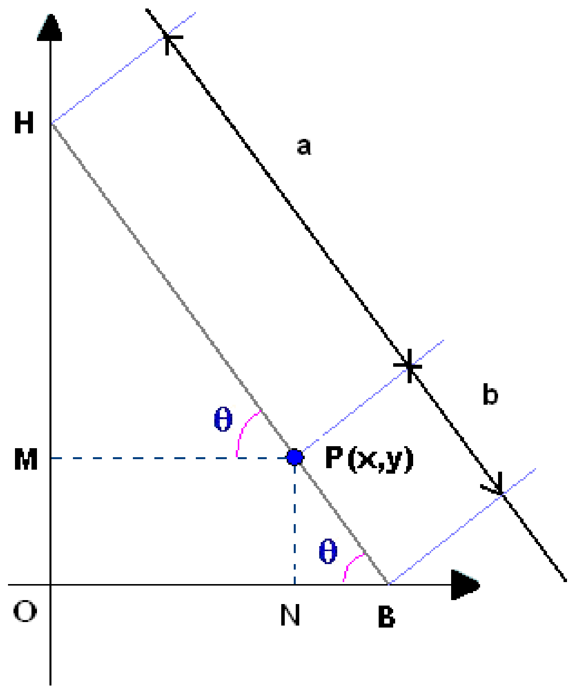
En multipliant chaque membre par $\frac{b^2}{a^2}$, nous avons :

$$y^2+\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2=b^2 \qquad \text{ou encore} \qquad y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$$

Comme y est positif nous pouvons écrire : $y=b\cdot\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}$

Résolution par la trigonométrie :





Dans le triangle HMP, cos θ = $\frac{MP}{HP}=\frac{x}{a}$

Dans le triangle PNB sin θ = $\frac{NP}{BP}=\frac{y}{b}$

Par la relation fondamentale de trigonométrie, nous obtenons :

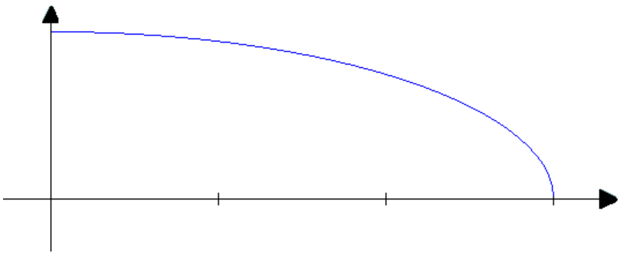
$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

En multipliant chaque membre de la dernière égalité par b^2 nous avons :

$$y^2+\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2=b^2 \quad \text{ou encore} \quad y=b\cdot\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

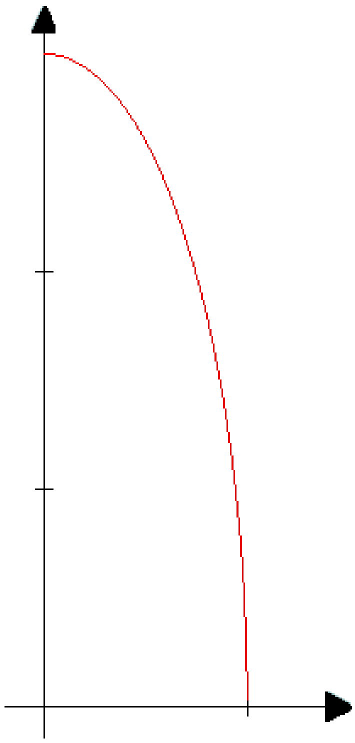
Nous pouvons alors représenter cette courbe grâce à un calculette graphique ou un logiciel mathématique :

cas où **a > b** :



a = 3 et b = 1

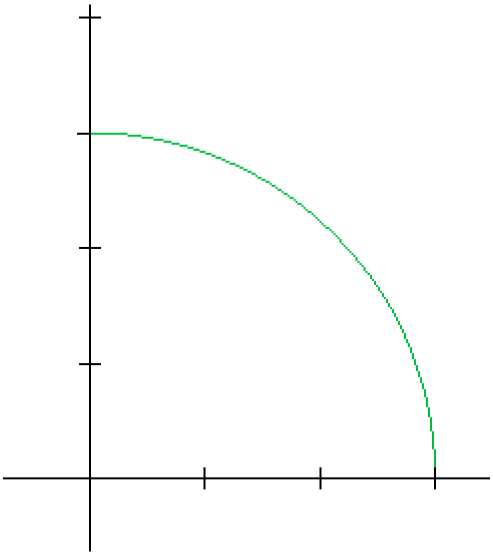
cas où **a < b** :



a = 1 et b = 3

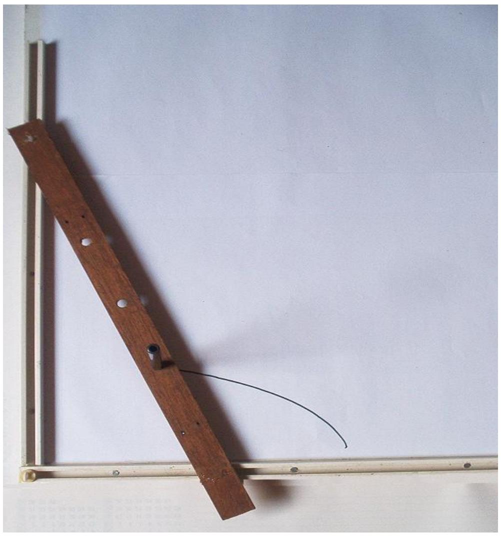
La ligne obtenue est une partie d'une courbe appelée ***ellipse***.

Et si **a = b** ?



On retrouve bien le cercle !!!!!!!!

Vérifie toi même sur le modèle :



Cet appareil se nomme ***ellipsographe*** et sert à construire des ellipses (comme le compas est utilisé pour dessiner des cercles ou arcs de cercle).

Il a été mis au point par le marquis de Saint Mesme, ***Guillaume de L'Hospital***, mathématicien français (1661 - 1704)

Guillaume de L'Hospital