# 14. GEOMETRIE VECTORIELLE .

6h/s

Supposé acquis . Structure vectorielle de la droite, du plan et de l'espace . Combinaisons linéaires .(chapitre 12)

Objectifs . Interprétation vectorielle de droites, de plans et de leur parallélisme . Barycentre d'un ensemble de points massifs .

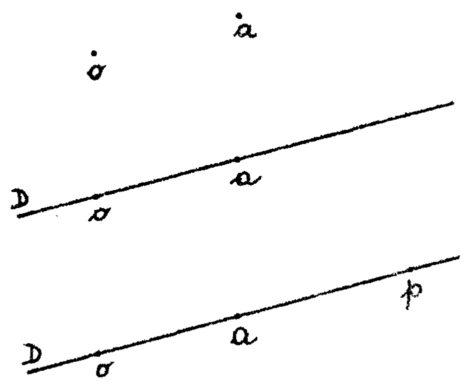
## LES VECTEURS AU SERVICE DE LA GEOMETRIE .

Nous avons étudié diverses notions liées aux vecteurs : addition, multiplication scalaire, produit scalaire, combinaisons linéaires . Le calcul vectoriel qu'elles permettent de développer se met tout naturellement au service de la géométrie .

Les espaces vectoriels V que nous considérons ici sont la droite $E_o^1$, le plan $E_o^2$, l'espace $E_o^3$ ou encore, après le choix d'un repère de base, complétant l'origine, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ .

## LES DROITES PAR L'ORIGINE .

Soit V un des espaces vectoriels ci-dessus . Fixons un point $a \neq o$ et considérons la droite D = oa . Comment décrire tous les points de cette droite en termes vectoriels ?




Si $p \in D$, le vecteur p est un multiple de a, donc

$$D = oa = \{ \bar{p} \in V \mid \bar{p} = r\bar{a}, \quad r \in \mathbb{R} \} \quad (1)$$

Si V est de dimension 1 on a aussi V = D

Si V est $\mathbb{R}^2$ nous savons en outre qu'il existe une droite d'équation

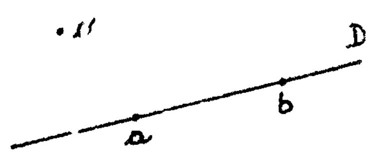
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ ou $\alpha x + \beta y = 0$ passant par a . Comment la trouver ? En reportant les coordonnées $(a_1, a_2)$ dans l'équation et en recherchant des $\alpha_1$, $\alpha_2$ qui vérifient $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$ .

Cette équation admet une infinité de solutions . Il suffit d'en choisir une, par exemple $\alpha_1 = a_2$, $\alpha_2 = -a_1$ ce qui donne

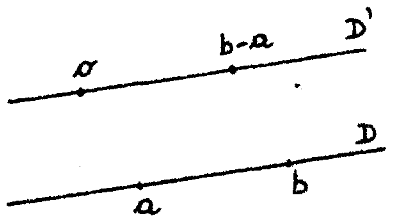
$\boxed{a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0}$ ou encore $\boxed{\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}}$ qui semble plus naturel

mais qui est plus dangereux, dans le cas où $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ .

## DROITES QUELCONQUES



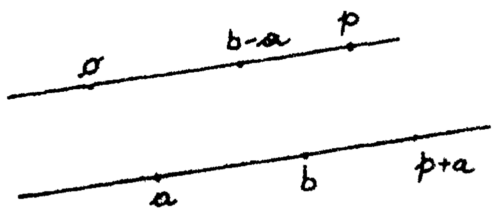

Fixons deux points $a \neq b$ dans V .
Comment décrire la droite D = ab ?
On se ramène à la parallèle D' à D par o .




Celle-ci passe par le vecteur $b - a$ .
Si $p$ est sur $D'$, $p + a$ est sur $D$
et si $q$ est sur $D$, $q - a \in D'$

Donc $\boxed{D = a + D'} = \{ a + p \mid p \in D' \}$

$$(2) \quad \boxed{D = ab = \{ \overline{x} \in V \mid \overline{x} = \overline{a} + r(\overline{b} - \overline{a}) \text{ où } r \in \mathbb{R} \}}$$




Considérons le cas particulier où $V = \mathbb{R}^2$ .
La dernière équation devient

$$(3) \begin{cases} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) \end{cases}$$

<u>équations paramétriques</u> de la droite ab (coordonnées d'un point variable de la droite, en fonction d'un paramètre variable r) .

En éliminant r entre ces deux équations paramétriques, on obtient

$$(4) \quad \boxed{\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x_1 - a_1) + a_2}$$

<u>équation cartésienne</u> ou <u>statique de la droite</u> .

En (4), il convient d'être très prudent (et de retourner à (3)) dès que l'un des dénominateurs est nul .

A titre d'exemple, la droite par $a = (1, -3)$ et $b = (1, 4)$ ne se laisse pas traiter par (4) car $b_1 - a_1 = 0$ mais (3) livre

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -3 + 7r$$

et l'équation cartésienne qui en résulte est $x_1 = 1$

Considérons le cas particulier où $V = \mathbb{R}^3$ . Alors (2) devient

$$(3)' \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + r(b_3 - a_3) \end{cases}$$

On devine déjà comment poursuivre dans $\mathbb{R}^4$ !

Ensuite

$$r = \boxed{\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}} \qquad (3)''$$

qui contitue les <u>deux</u> équation<u>s</u> statique<u>s</u> de la droite . Il convient d'interpréter (3)" par (3)' lorsque l'un des dénominateurs est nuls .

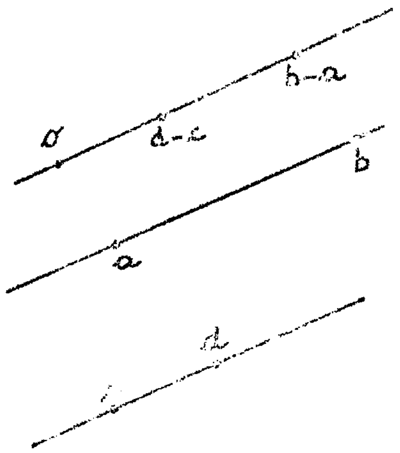
A titre d'exemple, la droite par (1, -2, 5) et (1, 2, 3) possède les équations statiques

$$\begin{cases} x_1 = 1 & \text{du fait que } b_1 - a_1 = 0 \\ \dfrac{x_2 + 2}{4} = \dfrac{x_3 - 5}{-2} & \end{cases}$$

Observons que chacune des équations (3)" est l'équation d'un plan passant par la droite et que celle-ci peut être vue comme l'intersection de ces deux plans .

COMMENT VOIT-ON QUE LES DROITES ab ET cd SONT PARALLELES ?

Il faut et il suffit que les vecteurs b - a et d - c soient multiples l'un de l'autre .




Donc

$$\boxed{ab \,/\!/\, cd \Leftrightarrow b - a = r(d - c) \text{ où } r \in \mathbb{R}}$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ceci se traduit (après élimination de r) par

$$\boxed{\frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1} = \frac{b_2 - a_2}{d_2 - c_2}}$$

et dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\boxed{\frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1} \quad \frac{b_2 - a_2}{d_2 - c_2} \quad \frac{b_3 - a_3}{d_3 - c_3}.}$$

(attention aux dénominateurs nuls) .

---

EXERCICES . 1. Ecrire correctement les équations paramétriques et statiques des droites par a et b dans les cas suivants

1) $\mathbb{R}^2$ a = (4, 5) b = (-2, 0)
2) $\mathbb{R}^3$ a = (0, 6, -2) b = (3, 5, 1)
3) $\mathbb{R}^2$ a = (1, 6) b = (-2, 6)
4) $\mathbb{R}^3$ a = (3, -2, 5) b = (7, -2, 5)

2. Déterminer l'intersection des droites ab et cd dans les cas suivants

1) $\mathbb{R}^2$ a = (4, 5) b = (-2, 0) c = (0, 0) d = (2, 3)
2) $\mathbb{R}^3$ a = (4, 5, [illegible]) b = (-2, [illegible], 0) c = (0, 0, 0) d = (1, 0, 0)

3. Déterminer le point d pour que cd // ab et ac // bd

1) $\mathbb{R}^2$ a = (4, 5) b = (-2, 0) c = (0, 3)
2) $\mathbb{R}^3$ a = (4, 5, -3) b = (0, 0, 1) c = (4, 5, 1)

4. Voici des équations de droites A, B, C, D de $\mathbb{R}^3$ . Sont-elles parallèles ?

A: $\frac{x - 5}{9} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 4}{-6}$ B: $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z + 2}{-2}$

C: $\frac{2x - 5}{9} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 4}{-6}$ D: $\frac{2x - 5}{9} = \frac{2y + 1}{6} = \frac{z - 4}{-6}$

---

PLANS PAR L'ORIGINE

Soit V = $E^3_0$ ou $\mathbb{R}^3$ . Donnons deux vecteurs a, b non alignés avec o, c'est à dire linéairement indépendants . Ceci revient à dire que b n'est pas multiple de a et réciproquement .

Le plan $\pi$ = oab est constitué par tous les vecteurs qui sont combinaison linéaire de a et de b .

Donc $\boxed{\pi = \{ \bar{p} = r\bar{a} + s\bar{b} \mid r, s \in \mathbb{R} \}}$ (1) équation vectorielle du plan .

Dans $\mathbb{R}^3$ ceci s'écrit encore

si $\bar{p} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = ra_1 + sb_1 \\ x_2 = ra_2 + sb_2 \\ x_3 = ra_3 + sb_3 \end{cases}} \qquad (2)$$

équations paramétriques du plan oab .

En éliminant r et s dans les équations (2) (on a un système de trois équations en les deux inconnues r et s) on obtient une équation polynômiale linéaire en les $p_i$ . Nous livrons le résultat de ce calcul délicat sans entrer dans les détails ; ceux-ci seront traités plus tard (déterminants) .

$$\boxed{(a_2b_3 - a_3b_2)x_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_3 = 0} \qquad (3)$$

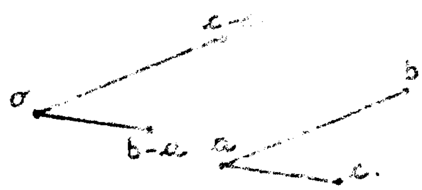
équation cartésienne du plan oab .

En reportant dans (3), les coordonnées de o, puis de a, puis de b, on vérifie en tout cas qu'il s'agit bien de l'équation d'un plan passant par ces trois points .

PLANS QUELCONQUES

Soit $V = E_o^3$ ou $\mathbb{R}^3$ . Donnons-nous trois points a, b, c non alignés et considérons le plan $\pi$ = abc .

On se ramène au plan parallèle $\pi'$ passant par o .




Celui-ci passe par b - a et par c - a . Si $p \in \pi'$ alors $p + a \in \pi$ et réciproquement, si $q \in \pi$ alors $q - a \in \pi'$ . Donc $\boxed{\pi = a + \pi'} = \{a + p \mid p \in \pi'\}$

$$\boxed{\pi = abc = \{ \bar{x} \in V \mid \bar{x} = \bar{a} + r(\bar{b} - \bar{a}) + s(\bar{c} - \bar{a}) \text{ où } r, s \in \mathbb{R} \}} \qquad (4)$$

Dans $\mathbb{R}^3$ ceci livre successivement

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) + s(c_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + r(b_3 - a_3) + s(c_3 - a_3) \end{cases}} \qquad (5)$$

équations paramétriques du plan abc

$$\boxed{\begin{aligned} &((b_2 - a_2)(c_3 - a_3) - (b_3 - a_3)(c_2 - a_2))(x - a_1) \\ + &((b_3 - a_3)(c_1 - a_1) - (b_1 - a_1)(c_3 - a_3))(x - a_2) \\ + &((b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1))(x - a_3) = 0 \end{aligned}} \qquad (6)$$

équation cartésienne du plan abc

Rappelons-nous tout de même, en dépit de la lourdeur de (6), que l'équation d'un plan est de la forme

$\pi : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 = 0$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ne sont pas tous nuls .

Quelle est l'équation du plan $\pi'$ parallèle à $\pi$ par l'origine ?

C'est tout simplement $\pi' : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$

La preuve ? L'intersection de $\pi$ et de $\pi'$ vérifie l'équation

$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0 - 0 = 0$

donc elle vérifie $\alpha_4 = 0$ . Si $\alpha_4 \neq 0$ cette intersection est vide et les deux plans sont parallèles . Si $\alpha_4 = 0$, les deux plans sont confondus .

A quelle condition les plans $\pi : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 = 0$

et $S : \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 = 0$

sont-ils parallèles ? On a $\pi \parallel S$ si et seulement si

$\pi' : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$

$S' : \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$ sont confondus .

Ce qui ramène, grâce au produit scalaire, à

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = k(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad k \in \mathbb{R}$

ou encore $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}$ en faisant bien attention aux dénominateurs nuls .

---

EXERCICES . 5. Ecrire les équations paramétriques et cartésiennes des plans passant par a, b, c dans $\mathbb{R}^3$ (ces points sont-ils alignés ?)

1) $a = (1, 0, -2)$ $b = (3, 5, -7)$ $c = (-1, 0, 0)$

2) $a = (2, 3, 4)$ $b = (4, 6, 8)$ $c = (1, 0, 0)$

3) $a = (-1, 3, -2)$ $b = (0, 0, 0)$ $c = (-2, 6, -4)$

6. Dans $\mathbb{R}^3$ trouver l'intersection $ab \cap cde$ si

$a = (2, 3, -5)$ $b = (2, 0, 1)$ $c = (0, 0, 1)$

$d = (3, 1, -7)$ $e = (2, 0, 2)$

7. Voici des équations de plans dans $\mathbb{R}^3$ . Sont-ils parallèles ? Si non, trouver deux points de leur intersection .

$A : 3x - y + z + 5 = 0$ $B : 6x - 2y + 2z + 1 = 0$

$C : 6x - 2y - z = 0$ $D : -3x + y + z + 5 = 0$

---

BARYCENTRES

Si a et b sont deux points distincts de V et p un point de ab

on sait que $\bar{p} = \bar{a} + r(\bar{b} - \bar{a}) \quad r \in \mathbb{R}$

ou encore $\bar{p} = \bar{a} + r\bar{b} - r\bar{a} = (1 - r)\bar{a} + r\bar{b}$

ou encore $\overline{p} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ où $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha + \beta = 1$

ou encore $\boxed{\overline{p} = \frac{\alpha\overline{a}}{\alpha+\beta} + \frac{\beta\overline{b}}{\alpha+\beta}}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dans la dernière formule, $\overline{p}$ apparaît comme un point moyen de $\overline{a}$ et de $\overline{b}$ lorsque ceux-ci sont affectés des masses $\alpha$ et $\beta$.

Qu'arrive-t-il si les masses de $\overline{a}$ et de $\overline{b}$ sont égales c'est à dire si $\alpha = \beta$ ?

On obtient $\boxed{\overline{p} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})}$ qui est le milieu de a et de b .

Partons de trois points a, b, c dans V et d'un point p sur abc (qui est un point,une droite ou un plan) .

On a $\overline{p} = \overline{a} + r(\overline{b} - \overline{a}) + s(\overline{c} - \overline{a})$ $r, s \in \mathbb{R}$

ou $\overline{p} = (1 - r - s)\overline{a} + r\overline{b} + s\overline{c}$

ou $\overline{p} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

ou $\boxed{\overline{p} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{a} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{b} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{c}}$

On peut interpréter ceci en voyant p comme une moyenne pondérée des des points a, b, c affectés des masses , , .

Qu'arrive-t-il si les masses sont égales, c'est à dire si $\alpha = \beta = \gamma$ ?

On obtient $\boxed{\overline{p} = \frac{1}{3}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})}$

qui est le <u>barycentre</u> du triplet {a, b, c} .

Dans le cas où abc est un triangle, ce barycentre est le point de rencontre des médianes du triangle comme on le verra en exercice .

Plus généralement, si $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ sont des points de V, leur <u>barycentre</u> est le point

La notation $\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i$ remplace

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \ldots + \overline{a}_n$$

et se lit "somme des $\overline{a}_i$ pour i variant de 1 à n" .

---

<u>EXERCICES</u> . 8. Si a, b, c sont non alignés dans V montrer que le barycentre de a, b, c est le point de rencontre des médianes du triangle abc .

9. Trouver une propriété analogue à l'énoncé précédent, pour un tétraèdre de $E^3$ .

10. Les points a et b sont fixes dans V . Le point c parcourt une droite D . Quel est le parcours effectué par le barycentre de a, b, c ?

11. La notion de <u>barycentre</u> ou de <u>point moyen</u> est basée sur la structure vectorielle et elle repose dès lors, sur le choix de l'origine . Montrer qu'un changement d'origine ne modifie pas le barycentre (ni le point moyen) .

12. Soient a, b, c, d les quatre sommets d'un tétraèdre dans $E_o^3$

a) Prouver que $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ad} + \overline{cb}$ .

b) Si m est le milieu de [a, c] et n est le milieu de [b, d] , prouver que $2\overline{mn} = \overline{ab} + \overline{cd}$ .

c) Prouver que la section du tétraèdre, par un plan parallèle à ab et à cd est un parallèlogramme et déterminer l'ensemble des centres de ces parallélogrammes lorsque le plan varie .

## RESUME

**Equation d'une droite passant par l'origine et par un point a :**

équation vectorielle : $D = oa = \{ \overline{p} \in V \mid \overline{p} = r\overline{a},\ r \in \mathbb{R} \}$

où $V = E^1$ ou $E^2$ ou $E^3$

équation cartésienne dans $E^2$ : $\dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2}$ où $(a_1, a_2)$ sont les coordonnées du point a .

**Equation d'une droite passant par deux points a et b :**

équation vectorielle : $D = ab = \{ \overline{x} \in V \mid \overline{x} = \overline{a} + r(\overline{b} - \overline{a}),\ r \in \mathbb{R} \}$

où $V = E^2$ ou $E^3$

équation paramétrique de la droite ab

dans $E^2$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) \end{array} \right.$ où $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$

dans $E^3$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + r(b_3 - a_3) \end{array} \right.$ où $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$

équation cartésienne de la droite ab

dans $E^2$ $\dfrac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}$ où $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ avec $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$

dans $E^3$ $\dfrac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dfrac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$ où $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$

avec $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, $a_3 \neq b_3$

**Equation d'un plan dans $E^3$**

équation vectorielle :

$\pi = abc = \{ \overline{x} \in V \mid \overline{x} = \overline{a} + r(\overline{b} - \overline{a}) + s(\overline{c} - \overline{a}),\ r \text{ et } s \in \mathbb{R} \}$

équation paramétrique :

$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_1 + r(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + r(b_2 - a_2) + s(c_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + r(b_3 - a_3) + s(c_3 - a_3) \end{array} \right.$ où $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$

équation cartésienne

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s'obtenant en éliminant r et s dans les équations paramétriques du plan .