9. EQUATIONS ET FONCTIONS . 4h/s 6h/s

Supposé acquis . Fonctions et équations du premier degré (chap. 5)
Objectifs . Mise en équation de problèmes . Prise de conscience des liens entre équations et fonctions . Préparation de l'important chapitre sur la résolution de l'équation du second degré .

DES PROBLEMES D'IL Y A 3000 ANS .

Vers 2000 avant Jésus Christ, les Babyloniens développent des techniques de résolutions d'équations plutôt compliquées, dont nous nous servons encore aujourd'hui . Ce sont des problèmes d'aires et de partages d'intérêts qui les conduisent vers ces équations .

Voici des exemples .

Exemple 1. Une aire égale à 1000 est constituée par la somme de deux carrés . Le côté d'un carré est 2/3 du côté de l'autre carré diminué de 10 . Quels sont les côtés des carrés ?

La classe a pris l'habitude des mises en équation et elle décide rapidement d'appeler x et y les côtés des carrés inconnus . Dès lors,

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1000 \\ y = \frac{2}{3} x - 10 \end{cases} \quad \text{et}$$

Ici, nous nous disputons pour savoir si ce n'est pas plutôt $y = \frac{2}{3}(x - 10)$ qu'il faut comprendre . Le texte n'est pas clair, voilà tout . Un avantage des mathématiques est de préciser fortement le langage courant .

Nous nous en tenons au système (1) . L'idée d'éliminer y dans la première équation surgit naturellement .

Ceci livre :

$$x^2 + (\frac{2}{3} x - 10)^2 = 1000$$

$$x^2 + \frac{4}{9} x - \frac{40}{3} x + 100 = 1000$$

$$\frac{13}{9} x^2 - \frac{40}{3} x - 900 = 0 \qquad (2)$$

Comment résoudre cette équation ? Le professeur voit défiler des méthodes attendues et qu'il sait vouées à l'échec . On essaie d'isoler x dans le membre de gauche, de diviser par x pour se débarasser du facheux x^2 mais alors surgit $\frac{900}{x}$, etc .

Nous renonçons momentanément à une résolution directe pour examiner tranquillement la fonction

$$x \longrightarrow \frac{13}{9} x^2 - \frac{40}{3} x - 900 = f(x)$$

Calculons des valeurs de cette fonction à l'aide d'une machine pour des valeurs entières de x . En utilisant une machine possédant plusieurs mémoires nous évitons d'introduire de manière répétée $\frac{13}{9}$, $\frac{40}{3}$ et 900 . Nous procédons comme suit :

13 ÷ 9 = STO 0

40 ÷ 3 = STO 01

900 STO 02

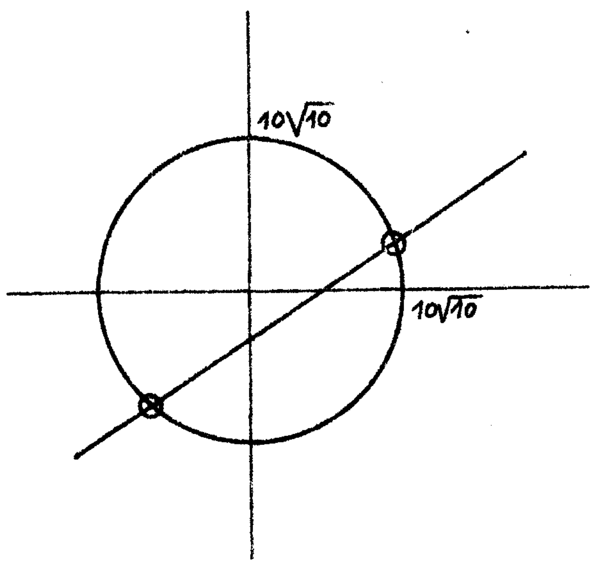
Ensuite nous sommes prêts à calculer f(x) pour une valeur quelconque de x par exemple 7, grâce à

$\boxed{\text{RCL}}$ 0 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 01 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 02 $\boxed{=}$

Voici le tableau obtenu

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	-900	-911,9	-920,9	-927	-930,2	-930,5	-928	-922,5	-914,2	-903

Nous nous rendons compte que 900 pèse lourdement dans f(x) lorsque x demeure assez petit . De ce fait, nous décidons de donner à x des valeurs proches de 30 qui est la racine carrée de 900 .
Pour x = 30 nous obtenons, oh surprise f(x) = 0 .
Voilà une solution : x = 30 et y = 10 .
Avouons que c'est laborieux .
Le professeur qui a suivi les idées proposées par les élèves avait d'autres suggestions . Il demande de revenir à (1) . Ne peut-on résoudre ce système graphiquement ?
On a vu que $x^2 + y^2 = 1000$
est constitué dans un repère orthonormé par les points du cercle de centre (0, 0) et de rayon $\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$
Nous passons à l'action en dessinant ce cercle et la droite d'équation équation $y = \frac{2}{3}x - 10$



L'avantage de cette méthode est de montrer que (1) possède exactement deux solutions, l'une avec une valeur de x positive et l'autre avec une valeur de x négative . Dans le problème posé, seule la valeur positive importe . Nous voyons qu'elle est "proche" de 30 directement, sans essais . A partir d'ici les essais peuvent devenir utiles .

Exemple 2 . "J'ai multiplié la longueur et la largeur et le résutat est 10 . J'ai multiplié la longueur par elle-même et obtenu l'aire . L'excès de la longueur sur la largeur a été multiplié par lui-même et le résultat multiplié par 9 . Cette aire est celle obtenue en multipliant la longueur par elle-même . Que sont la longueur et la largeur ?"

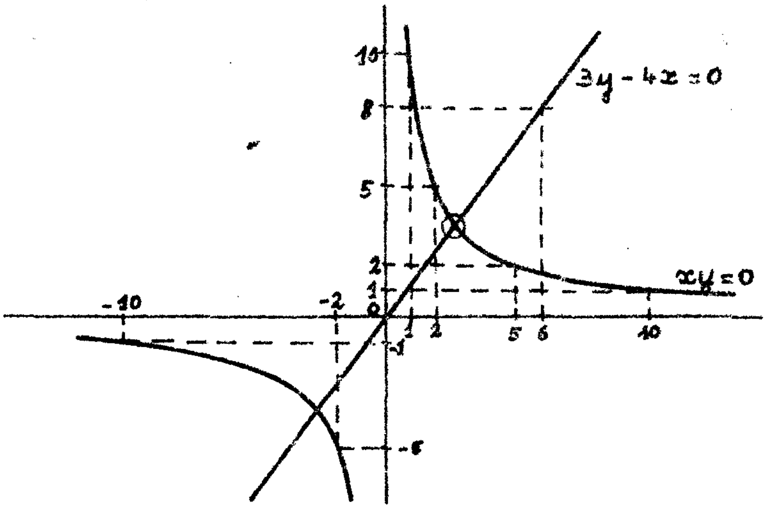
Nous relisons ce texte traduit du sumérien afin de bien le comprendre . Appelons x la longueur et y la largeur . Dès lors, nous savons que

$$(2) \quad \begin{cases} xy = 10 \\ 9(x-y)^2 = x^2 \end{cases}$$

Voilà un système peu sympathique . Nous observons pourtant que les deux membres de la deuxième équation sont des carrés parfaits . En admettant que x et y - x sont positifs, ce qui est naturel, on en déduit plutôt

$$\begin{cases} xy = 10 \\ 3(y-x) = x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} xy = 10 \\ 3y - 4x = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Cette fois les élèves préfèrent commencer par une représentation graphique . C'est le moment de rappeler que $xy = 10$ ou $y = \frac{10}{x}$ se représente par une hyperbole et nous obtenons le graphique ci-contre .



Nous voyons qu'il y a une seule solution avec x et y positifs et que x semble proche de 3 .

Passons alors à une étude plus systématique de (3) .

On a $\begin{cases} y = \frac{10}{x} \\ 3 \cdot \frac{10}{x} - 4x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y' = \frac{10}{x} \\ 30 - 4x^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{10}{x} \\ x^2 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \end{cases}$

Comme x est positif, on en tire $x = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{30} \approx 2{,}7$

et $y \approx 3{,}65$

Exemple 3 . Trouver un nombre qui additionnné à son inverse livre un nombre donné p .

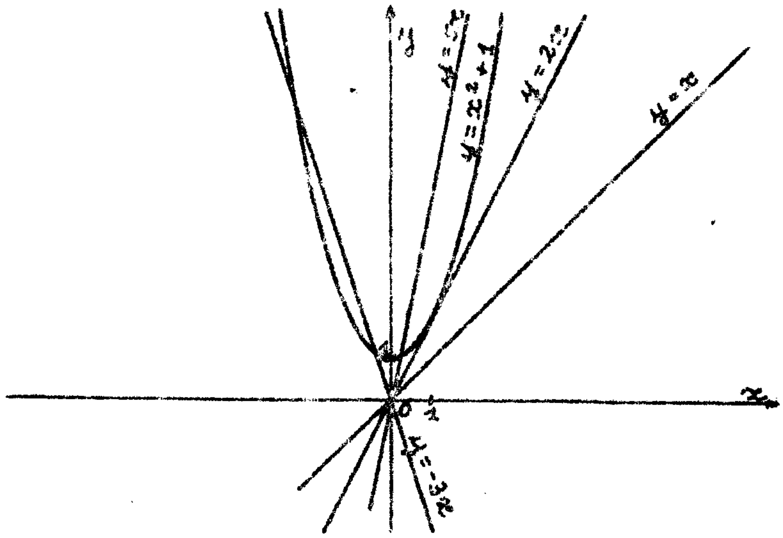
Soit x le nombre inconnu . On a

(1) $x + \frac{1}{x} = p$ et la mise en équation s'achève déjà .

(1) est équivalent à $x^2 + 1 = px$

ou $x^2 - px + 1 = 0$ (2)

Comment résoudre cette équation ? Les élèves ont bien accepté la méthode graphique mais peut-on encore utiliser celle-ci ?



Oui . Revenons à

$$x^2 + 1 = px$$

Dessinons les graphiques de $y = x^2 + 1$ et de $y = px$.
Il suffira de déterminer les points d'intersection .
Le dessin achevé, nous décidons de remettre une étude algébrique à plus tard .

Exemple 4 . Une somme S est placée à un intérêt composé annuel de 20% . Combien de temps faudra-t-il la placer pour que la somme initiale soit doublée ?

Voilà un problème qui demeure d'actualité .

Soit x le temps inconnu durant lequel il faut placer S pour le voir doubler .

La première année, S devient $S + \frac{20}{100} S = S + \frac{1}{5} S$

La deuxième année, celle-ci devient

$$S + \frac{1}{5} S + \frac{20}{100} (S + \frac{1}{5} S) = S(1 + \frac{1}{5})^2$$

Au bout de x années , on a $S \cdot (1 + \frac{1}{5})^x$

Nous voulons que $S \cdot (1 + \frac{1}{5})^x = 2S$

donc trouver x tel que $(1 + \frac{1}{5})^x = 2$

ou $(1,2)^x = 2$ (1)

Quelle curieuse équation . En dessinant le graphique de

$x \longrightarrow (1,2)^x =$ nous constatons que cette fonction est croissante .

De ce fait, notre vieille technique des encadrements peut se manifester .

Pour x = 1, $(1,2)^1 = 1,2 < 2$
et pour x = 2, $(1,2)^2 = 1,44 < 2$
$(1,2)^3 = 1,728 < 2$
$(1,2)^4 = 2,0736 > 2$

Donc $x \in [3, 4]$ et cet intervalle livre un encadrement de la solution recherchée .

Une précision plus grande est à notre portée .

EXERCICES . 1. Utiliser des méthodes graphiques pour estimer le nombre de solutions et l'ordre de grandeur de celles-ci pour les équations et systèmes d'équations suivants .

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y - x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy = 8 \\ x - y = 7 \end{cases}$

d) $a^5 - a^3 + 1 = 0$ e) $b^2 - 3b + 2 = 0$ f) $(3,7)^x = 1000$

2. Mettre en équation et résoudre graphiquement .

Note à l'intention du professeur : dans cette série de problèmes, on est souvent conduit à une équation du deuxième degré, alors que celle-ci n'est abordée qu'au chapitre 11 . C'est là un phénomène naturel . Il faut avoir buté à plusieurs reprises sur de telles équations pour saisir qu'il est intéressant d'en aborder une étude générale .

a) Un rectangle dont la longueur vaut le double de la largeur a une aire de 32 cm^2 . Quelles sont les mesures de ce rectangle ?

b) Un prisme droit à base carrée a une hauteur qui vaut trois fois de côté du carré . Son volume est de 648 cm^3 . Quelles sont les dimensions de ce prisme ?

c) La différence entre le carré d'un nombre et ce nombre vaut 110 . Quel est ce nombre ?

d) La somme de deux nombres vaut 19 et leur produit 84, quels sont ces nombres ?

e) La somme des carrés de deux nombres pairs consécutifs est 724 . Quels sont ces nombres ?

f) Le périmètre d'un triangle rectangle est de 48 cm . L'hypoténuse mesure 20 cm, combien mesurent les deux autres côtés ?

g) Voulant clôturer un terrain, une personne achète cinq rouleaux de treillis pour 17 300 FB . En travaillant, elle constate que le rouleau mesure un mètre de plus que prévu . Elle en déduit que le mètre de treillis lui coûte 7 FB de moins que prévu . A combien le commerçant vend-il le mètre de treillis ?

h) Un cycliste parcourt un trajet aller de 440 kilomètres . Au retour, à cause des conditions atmosphériques, il mettra un jour de plus car chaque jour il parcourt 22 kilomètres de moins . Combien de jours lui a pris le trajet aller ?

L'EQUATION $x^2 = a$

Parmi les équations que nous avons rencontrées nous retrouvons souvent la forme

$$(1) \qquad x^2 = a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}$$

Pouvons-nous décrire ses solutions quelle que soit la valeur de a ? Les élèves songent immédiatement à $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Voilà une bonne habitude acquise . Mais il reste à faire . Qu'arrive-t-il si $a = -1$? " Ça ne va pas " disent-ils .

Soyons précis .

Si $a = 0$, l'équation possède une seule solution qui est $x = 0$ et

si $a < 0$, l'équation (1) n'a pas de solution car pour tout

$x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

Si $a > 0$, elle possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

ce qu'on note $\boxed{\pm\sqrt{a}}$

Sommes-nous certains qu'il n'y a pas d'autres solutions ?

Voyons . Si $x^2 = a$ et $a \geqslant 0$ alors

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

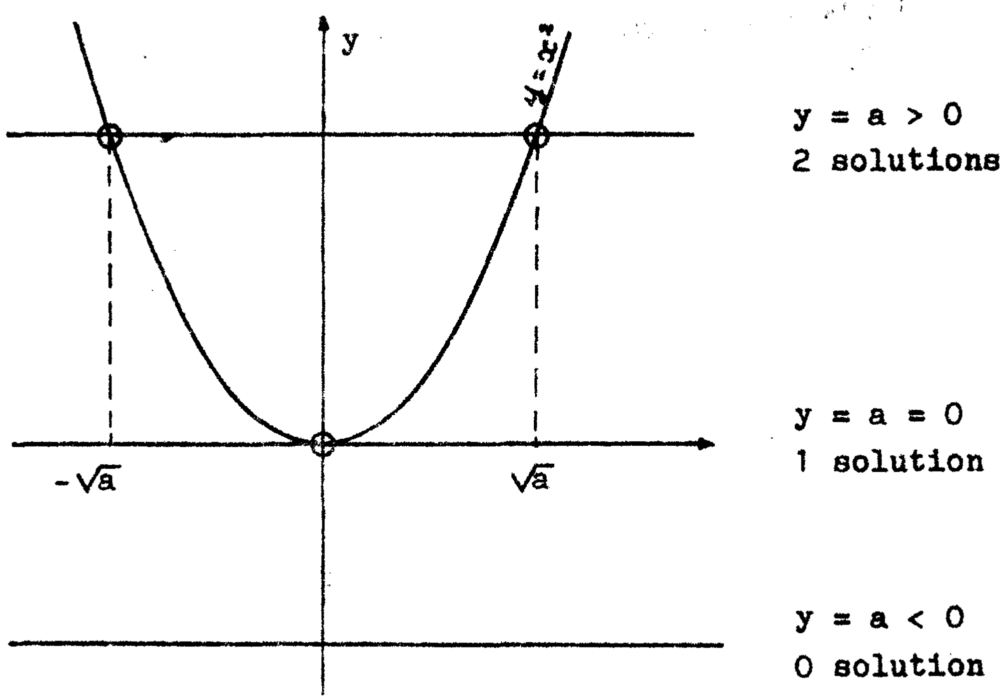
et de ce fait $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

donc $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Nous venons de revoir un principe important rencontré dès la deuxième année (VM2, chap 16)

Si a, b sont des nombres réels et si $a \cdot b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Un dessin enrichit encore cette explication .



<u>EXERCICES</u> . 3. Quelles sont toutes les solutions des équations suivantes

a) $x^2 + 1 = 0$

b) $x^2 - 1 = 0$

c) $x^2 + 7 = 0$

d) $(y - 8)(y + 7)(y - 3) = 0$

e) $2^x = 0$

f) $x + 37 = 2x$

g) $3x^2 - 16 = 24 - x^2$

h) $ax^2 + b = 0$

i) $(s + 3)(2s - 5)(s^2 - 4) = 0$
j) $(2x^2 + 7)(x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0$ k) $\frac{3s - 2}{s + 3} = 0$

4. Résoudre les inéquations $x^2 \geqslant a$ et $x^2 \leqslant a$ en supposant $a \geqslant 0$. Rappelons que

$A \cdot B = 0$	$A \cdot B \geqslant 0$	$A \cdot B \leqslant 0$
$\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$	$\Rightarrow A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$	$\Rightarrow A \leqslant 0$ et $B \geqslant 0$
	ou	ou
	$A \leqslant 0$ et $B \leqslant 0$	$A \geqslant 0$ et $B \leqslant 0$

5. Quelles sont toutes les solutions des inéquations suivantes .

a) $x^2 + 1 \leqslant 0$
b) $x^2 - 1 \geqslant 0$
c) $x^2 + 7 \geqslant 0$
d) $x^2 - 35 \leqslant 0$
e) $(u - 7)(u + 8)(u + 3) \leqslant 0$
f) $3x^2 - 16 < 24 - x^2$
g) $(s + 3)(2s + 5)(s^2 - 4) > 0$
h) $\frac{s + 7}{2s - 1} > 0$

6. Pour quelles valeurs de x la fonction suivante prend-elle des valeurs strictement positives ?

a) $f(x) = x^2 - 1$
b) $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 2}$

QUELLE DIFFERENCE ENTRE EQUATION ET FONCTION ?

Nos élèves ne saisissent pas toujours les liens subtils entre équation et fonction . A vrai dire, la différence n'est pas très perceptible dans la pratique . Voyons ceci sur des exemples .

Voici une équation . $3x^2 - 5x + 7 = 0$

La présence du signe = est indispensable pour disposer d'une équation .

A cette équation correspond la fonction

$$f : x \longrightarrow 3x^2 - 5x + 7$$

Celle-ci n'est pas une équation .

Si nous décidons d'introduire une inconnue y pour représenter f(x), alors la fonction f est entièrement décrite par l'équation :

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad y = 3x^2 - 5x + 7 \quad \text{ou} \quad y - 3x^2 + 5x - 7 = 0$$

Il y a donc une équation et une fonction qui se déterminent mutuellement . Le jeu peut se poursuivre . Nous pouvons imaginer d'introduire une nouvelle fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longrightarrow y - 3x^2 + 5x - 7$$

et si nous utilisons une nouvelle inconnue z pour représenter g(x, y) nous obtenons une nouvelle équation

$$z = y - 3x^2 + 5x - 7$$

EN RESUME

Ayant une fonction $f : A \longrightarrow B$, on y associe une ou plusieurs équations soit en introduisant une inconnue $x \in A$, une inconnue $y \in B$ et en posant $y = f(x)$
soit en donnant une valeur à y mettons b et en recherchant les x tels que $f(x) = b$
La plupart des équations que nous rencontrons sont obtenues de la sorte .

GRAPHIQUES .

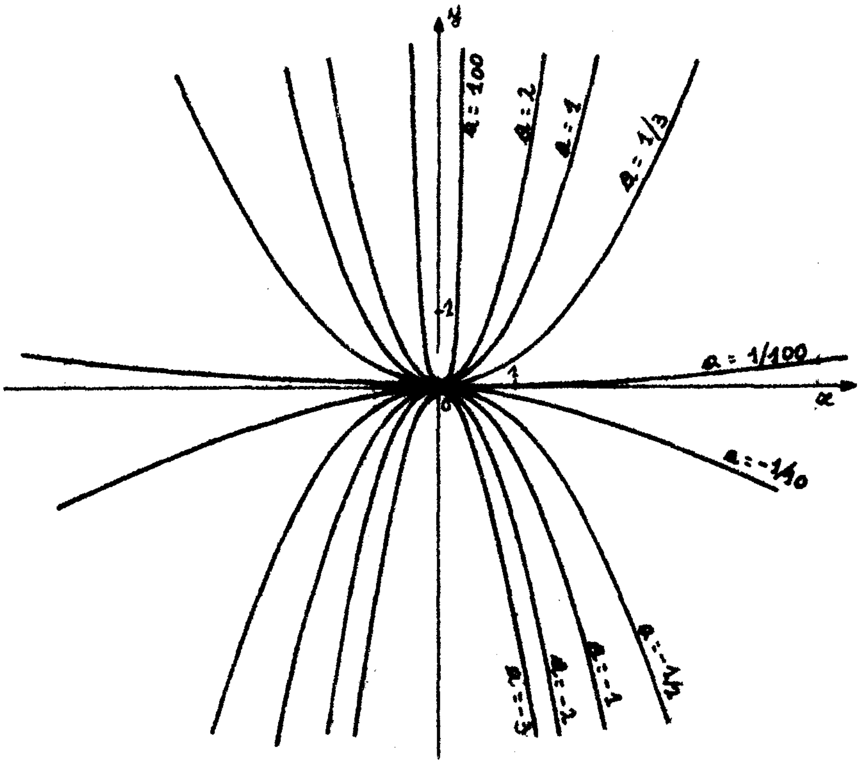
Considérons une fonction déterminée par un polynôme du second degré

$$x \longrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

et son graphique est la courbe d'équation

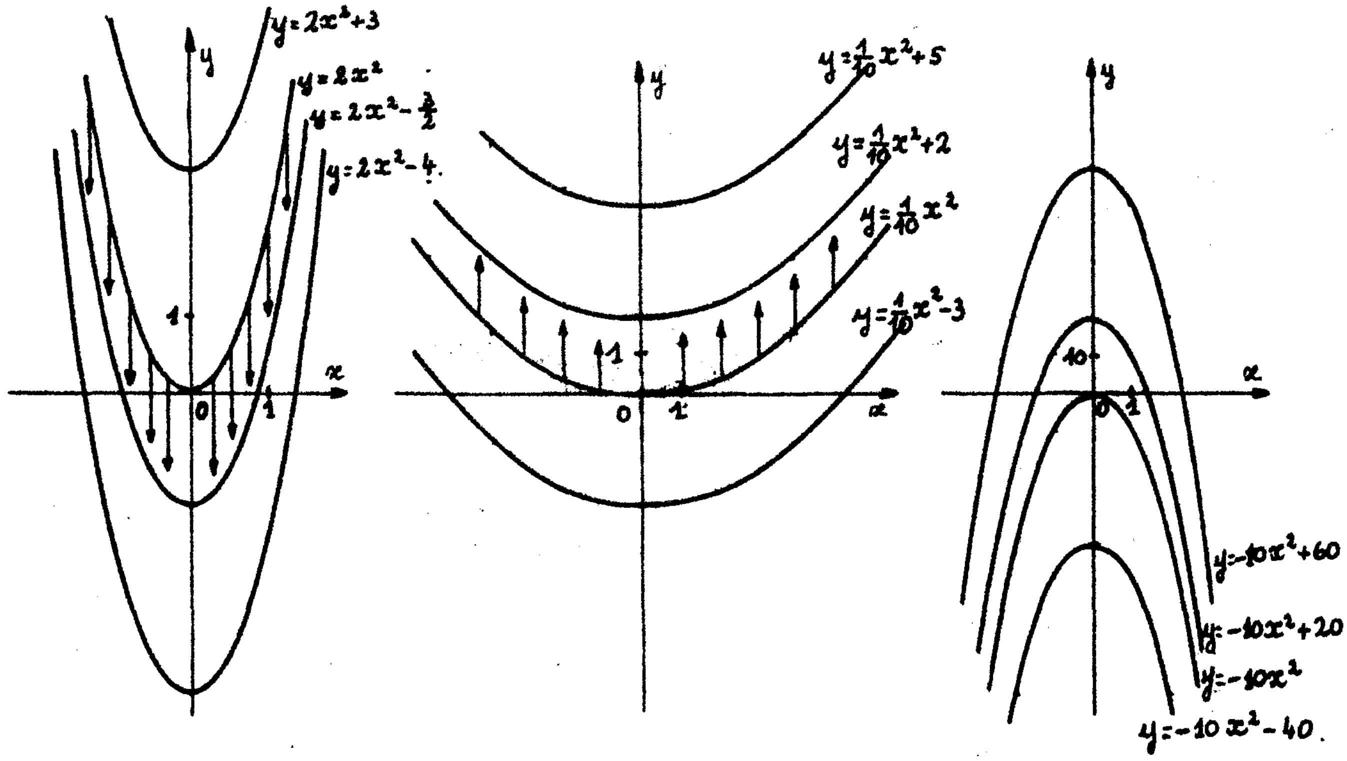
$$y = ax^2 + bx + c \qquad (2)$$

c'est à dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation (2) .
Dans (1) et (2) a, b, c représentent des nombres réels . Pouvons-nous arriver à maitriser la forme de cette courbe sans donner des valeurs particulières à a, b, c ?
Les cas particuliers où $b = 0 = c$ ne nous posent guère de problèmes .
Nous sommes habitués au graphique de la fonction x^2 et il est facile de transformer celui-ci en ax^2 en multipliant toutes les abcisses par a . C'est l'occasion d'un joli dessin .



Et si on passe à $y = ax^2 + c$.
C'est facile ! Il suffit de dessiner $y = ax^2$ et d'ajouter c à chaque ordonnée . Bref on passe de $y = ax^2$ à $y = ax^2 + c$ par

la translation transformant (0, 0) en (0, c) . Voici des exemples .



Le plus dur reste à faire . Comment manier $y = ax^2 + bx + c$?
Cette fois, une translation parallèle à l'axe des x nous sera utile .
Voici une astuce qui sera souvent utilisée par la suite .
Elle consiste à forger un carré pour faire disparaître le terme gênant bx . On suppose $a \neq 0$ sinon la foncion est affine .

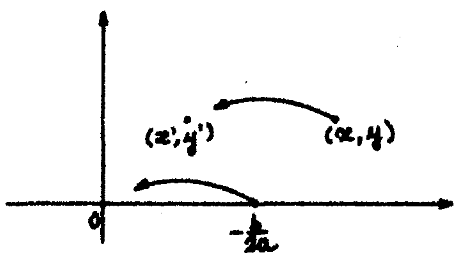
$$y = ax^2 + bx + c \qquad y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

La translation t qui transforme $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$ en (0, 0) transforme (x, y) en (x', y') et

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{b}{2a} \\ y' = y \end{cases}$$

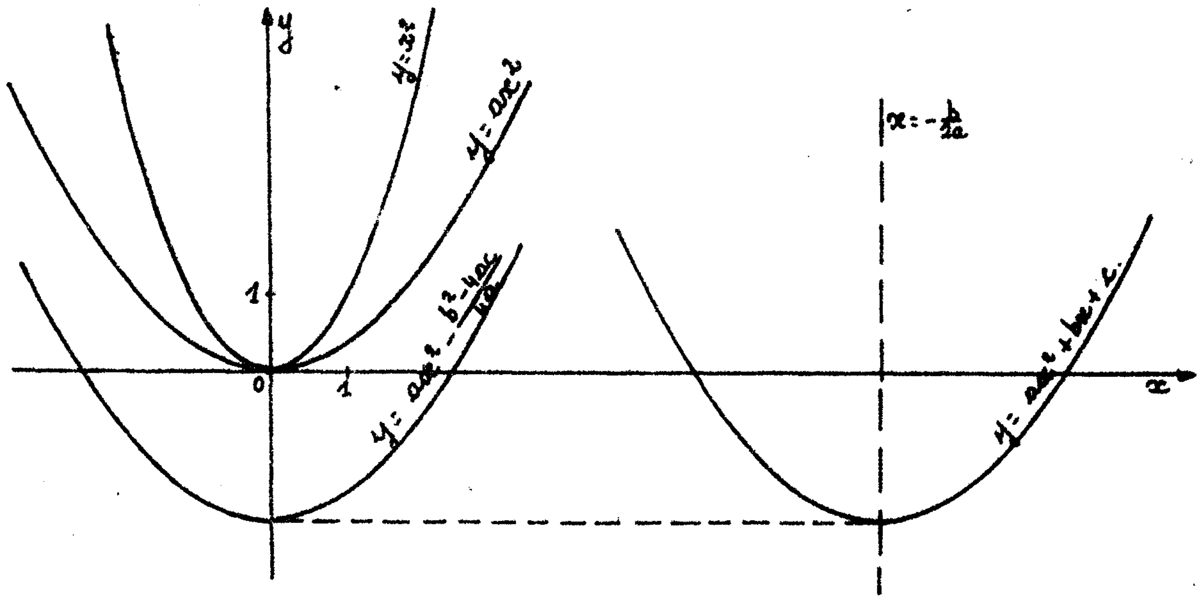


Elle transforme

$$y = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

en $$y = a\left(x^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = ax^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Comme nous savons représenter cette dernière courbe nous obtenons également la première .

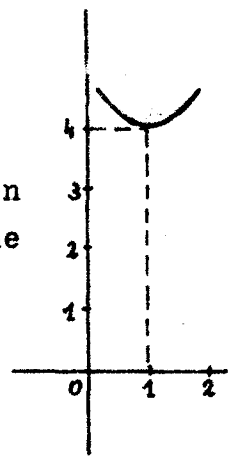


Nous constatons que la courbe est toujours une parabole, qu'elle présente un maximum en $x = -\frac{b}{2a}$ si $a < 0$

et un minimum en $x = -\frac{b}{2a}$ si $a > 0$

Dans un repère orthonormé, la droite $x = -\frac{b}{2a}$ est un <u>axe de symétrie</u> de la parabole .

Ainsi un graphique peut être rapidement établi en dessinant la droite $x = -\frac{b}{2a}$, en déterminant la valeur de la fonction en ce point et en utilisant le signe de a .



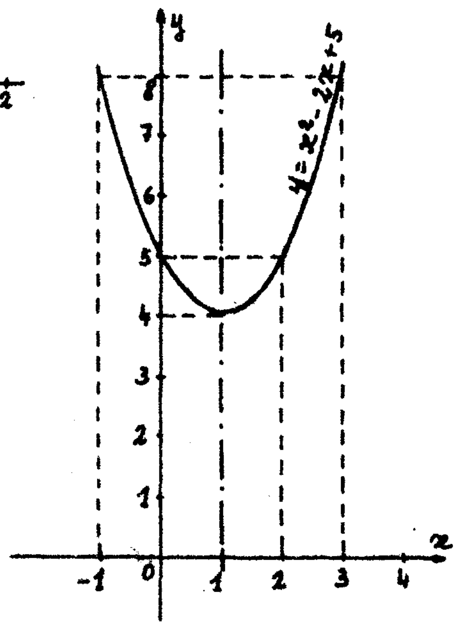
A titre d'exemple, $x^2 - 2x + 5$ aura l'allure suivante :

Pour obtenir un dessin plus précis, quelques calculs de valeurs de f(x) pour x proche de $-\frac{b}{2a}$ (ici 1) donneront la précision voulue .

L'axe de symétrie permet de calculer ces valeurs uniquement

soit pour $x < -\frac{b}{2a}$

soit pour $x > -\frac{b}{2a}$.



EXERCICES . 6. Utiliser des translations pour dessiner les graphiques des fonctions f dont la valeur est donnée par

a) $t^2 + t - 3$

b) $3t^2 - 5t + 1$

c) $-x^2 + 9$

d) $2y^2 - 3y + 1$

e) $\frac{1}{2}x^2 + 0{,}2x - 5$

f) $-3y^2 + 0{,}1y - \frac{1}{3}$

7. Utiliser l'axe de symétrie et la valeur du minimum et du maximum pour dessiner les graphiques de :

a) $x^2 + 2x - 1$

b) $-y^2 + 2y - 0{,}5$

c) $2t^2 + 5t - 2$

d) $5y^2 + y - 3$

e) $3t^2 - 2t + \frac{1}{5}$

f) $-x^2 + 16$

8 Considérons les paraboles d'équation $y = ax^2$ où $a \in \mathbb{R}_0$
Tout point du plan est-il sur une de ces paraboles ?
Est-elle unique ?

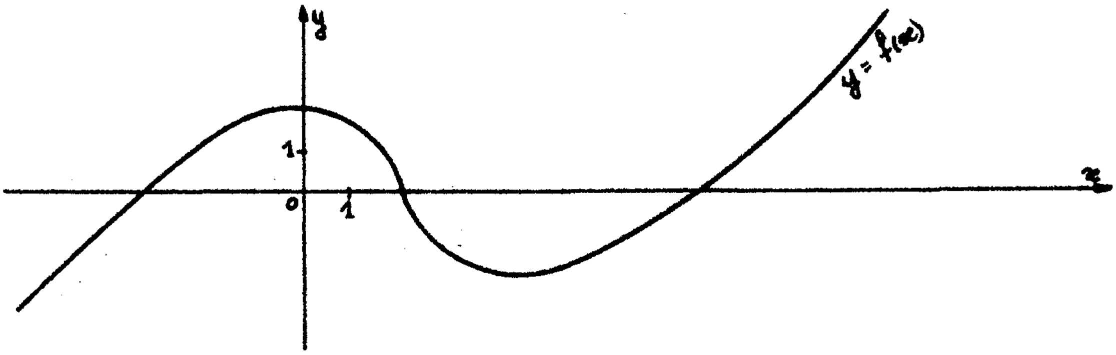
b) Même question pour les paraboles $y = 3x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$

9. Théorème . Si (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont trois points du plan $\mathbb{R}^2$ tels que x_1, x_2, x_3 soient distincts, prouver qu'il existe une et une seule parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par ces trois points .

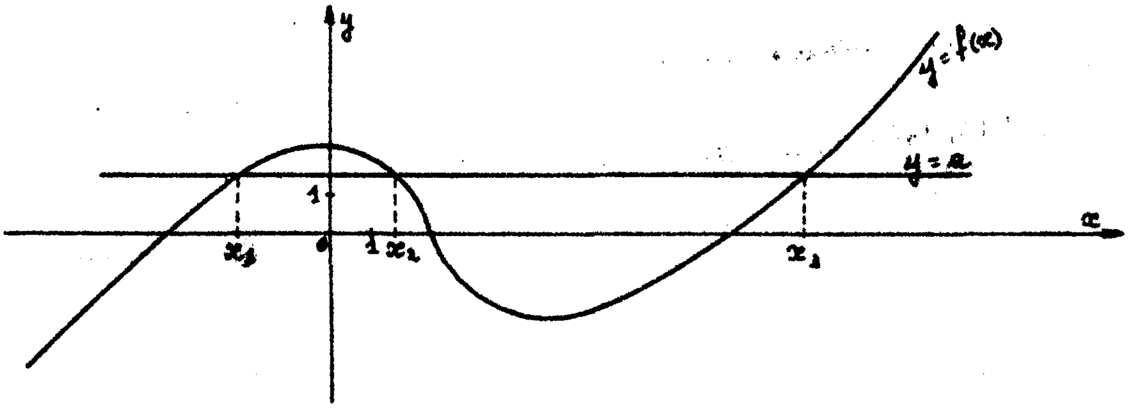
RESUME

Fonction . Equation .

Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ détermine une courbe d'équation $y = f(x)$ qui est le graphique de la fonction .



Résoudre l'équation $f(x) = a$ $(a \in \mathbb{R})$, revient à trouver l' intersection des graphiques des fonctions $y = f(x)$ et $y = a$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \text{ ou } x = x_3$$

L'abscisse des éventuels points d'intersection des graphiques des deux fonctions donne la solution de l'équation $f(x) = a$

La fonction $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Cette fonction détermine une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$. La droite $x = -b/2a$ est un axe de symétrie de la parabole .