12. ESPACES VECTORIELS .

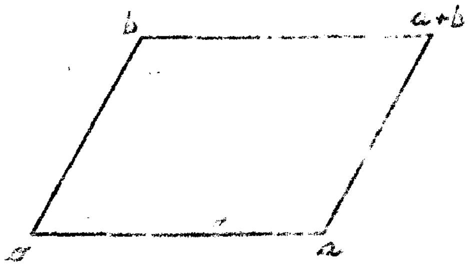
4h/s 6h/s.

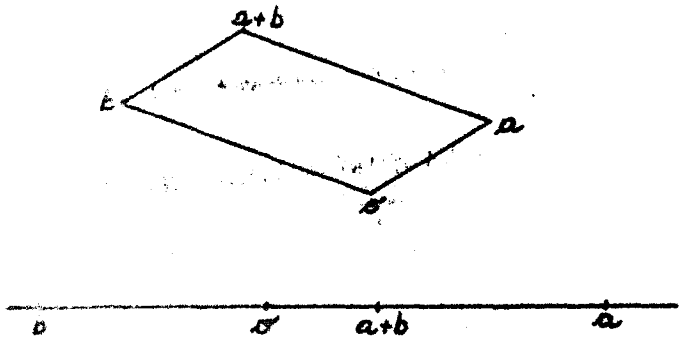
Supposé acquis . Premier contact avec les vecteurs liés et les vecteurs libres de la droite, du plan et de l'espace (VM3, chap 11)

Objectifs . Définition des espaces vectoriels réels et large examen d'exemples . Premier contact explicite avec les sous-espaces et les combinaisons linéaires .

LA STRUCTURE VECTORIELLE DE LA DROITE, DU PLAN ET DE L'ESPACE .

Soit E un espace euclidien de dimension 1, 2 ou 3 tel que nous l'avons étudié jusqu'ici . Soit o un point de E que nous appelons origine . On définit une addition sur les points de E, qu'on appelle aussi vecteurs, en posant $a + b = t_{ob}(a)$ quels que soient $a, b \in E$. où t_{ob} est la translation qui applique o sur b . On obtient la même opération par la règle du parallélogramme .





Nous avons vu qu'ainsi structuré, l'ensemble E est un groupe commutatif (voir VM3) . Voici un rappel des raisonnements effectués .

1) l'addition est bien définie quels que soient a et b du fait qu'il existe une et une seule translation appliquant o sur b .

2) $(a + b) + c = t_{oc}(t_{ob}(a)) = t_{oc} \circ t_{ob}(a)$

En outre $t_{oc} \circ t_{ob} = t_{o,b+c}$ Donc $(a + b) + c = a + (b + c)$

3) o est neutre car $a + o = t_{oo}(a) = a$

et $o + a = t_{oa}(o) = a$ quel que soit $a \in E$

4) $a + b = t_{o,a+b}(o) = t_{oa} \circ t_{ob}(o) = t_{ob} \circ t_{oa}(o) = t_{o,b+a}(o) = b + a$

5) $t_{ao}(o)$ est l'opposé de a car $t_{ao}(o) + a = t_{oa}(t_{ao}(o)) = t_{oo}(o) = o$

De même, on a défini une multiplication des vecteurs de E par les nombres réels en posant

$$ra = h_r(a) \qquad r \in \mathbb{R}, \qquad a \in E$$

où h_r est l'homothétie de centre o et de rapport r .

On a vu en troisième que cette multiplication jouit des propriétés suivantes (pour r, s dans $\mathbb{R}$ et a,b dans E)

1) $ra \in E$

2) $s(ra) = (sr)a$

3) $r(a + b) = ra + rb$

4) $(r + s)a = ra + sa$

5) $1a = a$

Voyons brièvement les preuves .

1) résulte du fait qu'il existe une unique homothétie de centre o et de rapport r

2) $s(ra) = h_s(h_r(a)) = h_s \circ h_r(a) = h_{sr}(a) = (sr)a$ utilise le fait que la composée de h_s et de h_r est h_{sr} .

3) $r(a + b) = h_r(a + b) = h_r(t_{ob}(a)) = h_r \circ t_{ob}(a) = (h_r \circ t_{ob} \circ h_r^{-1}) \circ h_r(a)$

Nous avions vu en troisième que $h_r \circ t_{ob} \circ h_r^{-1}$ est une translation et celle-ci applique clairement o sur rb donc

$r(a + b) = t_{o,rb} \circ h_r(a) = t_{o,rb}(ra) = ra + rb$.

4) ne sera pas rediscuté ici .

<u>ESPACES VECTORIELS REELS</u> .

Les propriétés qu'on vient de voir permettent de développer un calcul vectoriel analogue au calcul sur les nombres .
Celui-ci nous a déjà permis de prouver des propriétés géométriques notamment le fait que les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point .
Mais il y a beaucoup mieux . Les propriétés retenues sont valables dans trois espaces différents et surtout dans une foule d'autres sujets dont certains nous sont déjà familiers . L'étude approfondie de ces propriétés qui caractérisent les espaces vectoriels réels n'est que partiellement possible dans l'enseignement secondaire . Elle permet néanmoins d'unifier et de mieux comprendre des sujets très éloignés les uns des autres . Les applications de cette théorie sont innombrables : en mathématique, physique, chimie, économie, etc...

On appelle <u>espace vectoriel</u> (réel) un ensemble V d'éléments appelés <u>vecteurs</u> (parfois points, fonctions, matrices, etc...) structuré par une <u>addition</u> qui fait de V un groupe commutatif de neutre noté $\bar{o}$ et structuré par une <u>multiplication</u> qui associe à tout réel r et à tout vecteur $\bar{v}$ un vecteur $r\bar{v}$ de telle manière que

(1) $s(r\bar{v}) = (sr)\bar{v}$

(2) $(r + s)\bar{v} = r\bar{v} + s\bar{v}$

(3) $r(\bar{v} + \bar{w}) = r\bar{v} + r\bar{w}$

(4) $1\bar{v} = \bar{v}$

quels que soient $s,r \in \mathbb{R}$ et $\bar{v},\bar{w} \in V$

Reconnaître un espace vectoriel n'est pas facile pour le débutant . Ce travail peut être fastidieux puisqu'il s'agit de vérifier une dizaine de propriétés . Il s'agit de passer par là, pour quelques exemples . A ce moment, chacun sera prêt à faire un effort pour assimiler les notions qui permettent de s'épargner la plupart des vérifications .

<u>Exemples</u> . 1. Nous connaissons déja les espaces euclidiens pointés E_o^1, E_o^2, E_o^3 obtenus en choisissant une origine sur la droite, le plan ou l'espace . Ce sont des espaces vectoriels réels .

2. L'usage des coordonnées dans les espaces précédents nous a familiarisé avec d'autres espaces vectoriels, à savoir $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. A titre d'exemple, dans $\mathbb{R}^2$ l'addition est définie par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et la multiplication scalaire par $r(x, y) = (rx, ry)$ pour tout r, x, y, x', y' dans $\mathbb{R}$.

<u>EXERCICES</u> . 1. <u>L'espace vectoriel des carrés magiques</u> .

Un carré magique 3 3 est un tableau de nombres réels ayant 3 lignes lignes et 3 colonnes tel que la somme des éléments d'une même ligne et d'une même colonne et d'une même diagonale est une constante . Donc

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$a + b + c = d + e + f = g + h + i = a + d + g = b + e + h = c + f + i = a + e + i = c + e + g$

a) Définir l'addition de deux carrés magiques 3×3 et montrer que l'ensemble V de ces carrés est un groupe commutatif . Quel en est le neutre ?

b) Définir la multiplication d'un élément de V par un nombre réel et montrer que c'est encore un élément de V .

c) Vérifier les propriétés (1) (2) (3) (4) .

d) Construire des exemples de carrés magiques .

e) Peut-on compléter le carré suivant en carré magique ?

1	8	
4		9

2. <u>L'espace vectoriel des polynômes</u> $ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soit V l'ensemble de ces polynômes .

a) Définir l'addition de deux éléments de V et vérifier qu'elle érige V en groupe commutatif . Quel en est le neutre ?

b) Définir la multiplication d'un élément de V par un réel, vérifier que c'est un élément de V et qu'on a les propriétés (1) à (4) .

c) Les éléments de V qui représentent des polynômes de degré inférieur à 2, constituent-ils un sous-groupe et même un sous-espace vectoriel de V ?

3. S'inspirer des exercices 1 et 2 pour décrire ou prévoir de nouveaux espaces vectoriels .

4. Démontrer (et joindre aux propriétés (1) à (4) pour usage ultérieur

a) $o\bar{v} = \bar{o}$

b) $(-r)\bar{v} = -(r\bar{v}) = r(-\bar{v})$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\bar{v} \in V$

c) $r\bar{o} = \bar{o}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$

d) $r\bar{v} = \bar{o}$ implique $r = 0$ ou $\bar{v} = \bar{o}$

e) $(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n)\bar{v} = r_1\bar{v} + r_2\bar{v} + r_3\bar{v} + \dots + r_n\bar{v}$

f) $r(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \dots + \bar{v}_n) = r\bar{v}_1 + r\bar{v}_2 + r\bar{v}_3 + \dots + r\bar{v}_n$.

5. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des espaces vectoriels ?

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

SOUS - ESPACES .

Supposons qu'on connaisse déjà un espace vectoriel V et une partie W . Comment prouver que W est lui-même un espace vectoriel ou encore que W est un sous-espace de V ?

Il suffit de trois vérifications à savoir :

((1)) $\bar{x} + \bar{y} \in W$ pour tout $\bar{x} \in W$ et tout $\bar{y} \in W$

((2)) $r\bar{x} \in W$ pour tout $\bar{x} \in W$ et $r \in \mathbb{R}$

((3)) $\bar{o} \in W$

Cela semble très théorique mais en fait c'est presque toujours comme cela qu'on démontre l'existence d'espaces vectoriels . On verra qu'il y a une sorte de fourre-tout V dont on peut s'occuper une bonne fois et qui permet d'inclure la plupart des exemples ultérieurs . Comment se peut-il que ((1)) ((2)) ((3)) suffisent à faire de W un sous-espace ?

- l'associativité et la commutativité dans W sont automatiques pour l'addition .
- grâce à ((3)), $\bar{o}$ est neutre dans W et grâce à ((1)), l'addition est bien définie .
- pour le groupe additif, il reste l'opposé $-\bar{a}$ de $\bar{a} \in W$ et ceci nous est livré par $-1 \in \mathbb{R}$, $(-1)\bar{a} \in W$ par ((2)) et $(-1)\bar{a} = -(1\bar{a}) = -\bar{a}$ par l'axiome (4) des espaces vectoriels donc $-\bar{a} \in W$
- la multiplication par des réels est bien définie dans W grâce à ((2)), elle vérifie automatiquement (1), (2), (3), (4) et ceci achève le travail .

Il reste à découvrir le fourre-tout auquel il a été fait allusion .

ESPACES VECTORIELS FONCTIONNELS .

Considérons un ensemble quelconque I que nous représentons par un diagramme de Venn dans un plan horizontal .

Soit F_I l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$.

Nous pouvons représenter chaque fonction f par un graphique obtenu en reportant en tout point $p \in I$ un bâtonnet vertical de longueur f(p) (vers le haut ou vers le bas selon que f(p) est positif ou négatif) .

L'ensemble F_I s'identifie à l'ensemble de tous les graphiques possibles de base I .

Exemples . 1) I pourrait être un ensemble de trois objets notés 1, 2, 3 . Alors $f : I \to \mathbb{R}$ revient à se donner un triple de réels (f(1), f(2), f(3)) . L'ensemble F_I s'identifie à $\mathbb{R}^3$. De même, si I possède n éléments, F_I s'identifie à $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des n-uples de nombres réels (f(1), f(2),...,f(n)) .

2) I peut être un tableau rectangulaire de 4 lignes et 5 colonnes, dont toute case représente un élément de I . On peut représenter f en écrivant sa valeur dans la case correspondante .

Voici un exemple

0	-3	$\sqrt{2}$	1	0
1	7	-1	-1	-2
9/2		-7/3	0	$-\sqrt{3}$
4	5	0	0	0

Ces tableaux sont appelés matrices .

3) I peut être un intervalle de $\mathbb{R}$ et dans ce cas on obtient les fonctions habituelles définies sur I .

4) Observons que les carrés magiques 5×5 constituent un sous-ensemble de F_I lorsque I est un tableau rectangulaire de 5 lignes et 5 colonnes . Bref, les carrés magiques sont des cas particuliers de matrices .

5) Observons que les polynômes de degré $d \leq 2$ sont un sous-ensemble de $F_{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

A-t-on une addition sur F_I ? Oui, nous avons déja souvent additionné des graphiques de fonctions comme dans le dessin ci-dessous .

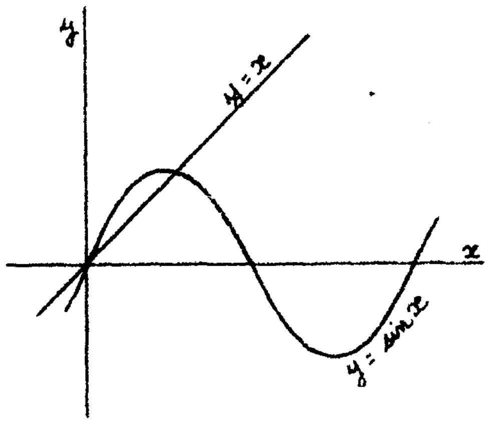
De manière générale si $f, g \in F_I$ et si $x \in I$ on convient que

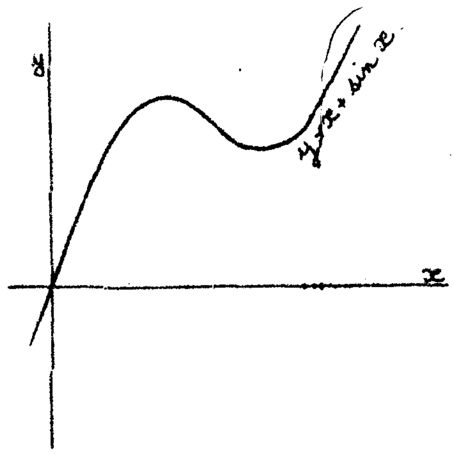
$f + g$ est la fonction définie sur I par

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Obtient-on ainsi un groupe commutatif sur F_I ?

Oui .





1) L'addition est bien définie quels que soient $f, g \in F_I$
2) $(f + g) + h$ prend la valeur

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x) .$$

donc $(f + g) + h = f + (g + h)$
puisque ces deux fonctions ont la même valeur en tout $x \in I$
3) La fonction nulle $o : x \longrightarrow o$ est neutre car $f + o = f$
pour tout $x \in F_I$ puisque
$(f + o)(x) = f(x) + o(x) = f(x) + o = f(x)$.
4) La fonction $-f : x \longrightarrow -f(x)$ est symétrique de f car
$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = o = o(x)$
5) $f + g = g + f$ car $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) =$
$= (g + f)(x)$.

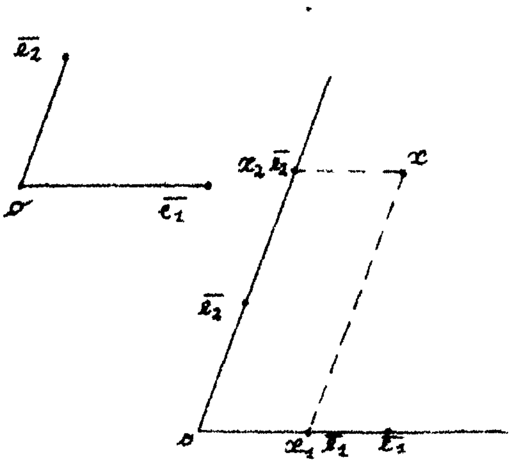
A-t-on sur F_I, une multiplication par les réels ? Oui .
Si $f \in F_I$ et si $r \in \mathbb{R}$, la fonction rf est celle qui prend la valeur $(rf)(x) = r \cdot f(x)$ en tout $x \in I$.
On vérifie facilement les axiomes (1) à (4) des espaces vectoriels .

EXERCICES . 6. Prouver que F_I a les propriétés (1) à (4)

7. Montrer que les sous-ensembles suivants de $E_{\mathbb{R}}$ sont des sous-espaces
- l'ensemble des polynômes
- l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n où n est un naturel fixé .
- l'ensemble des fonctions rationnelles $\frac{f}{g}$ où f et g sont des polynômes tels que g ne s'annule pas .

COMBINAISONS LINEAIRES .

Exemples . 1. Plaçons-nous dans le plan en donnant deux vecteurs $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ représentés par des points non alignés avec o .
Si $\overline{x}$ est un vecteur quelconque, de coordonnées (x_1, x_2) dans le repère



$o, \bar{e}_1, \bar{e}_2$ nous voyons que

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$$

On dit que $\bar{x}$ est <u>combinaison linéaire</u> de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$ ou que $\bar{x}$ dépend linéairement de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$. Le mot linéaire se réfère à l'idée de polynôme du premier degré (en $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$) et au fait que les droites (<u>lignes</u> droites) se représentent dans le plan, par une équation du premier degré.

2. Plaçons-nous dans $\mathbb{E}^3$ en donnant un repère $o, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Les points du plan $o, \bar{e}_1, \bar{e}_2$ s'obtiennent par combinaison linéaire de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$: ce sont les vecteurs $x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$. Les points de $\mathbb{E}^3$ s'obtiennent par combinaison linéaire de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$: ce sont les vecteurs $x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$.

3. Dans $\mathbb{R}^2$, a-t-on que $(5, 6)$ est combinaison linéaire de $(2, 4)$ et de $(4, 8)$? Cela voudrait dire qu'il y a des réels a et b tels

que $$(5, 6) = a(2, 4) + b(4, 8)$$

ou encore $$(5, 6) = (2a + 4b, 4a + 8b)$$ donc

$$\begin{cases} 2a + 4b = 5 \\ 4a + 8b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 5 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Ce système a une solution vide donc $(5, 6)$ n'est pas combinaison linéaire de $(2, 4)$ et $(4, 8)$.

En revanche, $(4, 8)$ est combinaison linéaire de $(2, 4)$ car $(4, 8) = 2(2, 4)$.

4. Le polynôme $ax^2 + bx + c$ est combinaison linéaire des trois monômes x^2, x et 1. C'est par combinaison linéaire que se construit la notion de polynôme en troisième, à partir des puissances de x.

5. Le polynôme $x^2 + x + 1$ est-il combinaison linéaire de $x^3 + 1$ et $x - 1$? Il faut pour cela trouver des réels a, b tels que

$$x^2 + x + 1 = a(x^3 + 1) + b(x - 1) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

ou $$ax^3 - x^2 + (b - 1)x + (a - b - 1) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Or nous savons qu'un polynôme f qui s'annulle en x_0 se décompose en facteurs : $f(x) = (x - x_0)\,g(x)$ où g est un polynôme de degré inférieur à x. De ce fait, un polynôme qui s'annulle pour tout $x \in \mathbb{R}$ est forcément le polynôme nul.

Dans notre exemple le coefficient de x^2 est non nul, donc ce polynôme n'est pas nul et $x^2 + x + 1$ n'est pas combinaison linéaire de $x^3 + 1$ et $x - 1$.

6. Le polynôme $x^2 + x + 1$ est-il combinaison linéaire des polynômes $x^2 + 1$ et $x - 1$?

$$x^2 + x + 1 = a(x^2 + 1) + b(x - 1) \quad \text{pour tout } x$$
$$\Leftrightarrow \quad (a - 1)x^2 + (b - 1)x - b + a - 1 = 0 \quad \text{pour tout } x$$
$$\Leftrightarrow \quad a - 1 = 0 = b - 1 = (-b + a - 1)$$

Ce qui force $a = b = 1$ mais alors $-b + a - 1 = -1 \neq 0$

La réponse est toujours négative .

En revanche, $x^2 + x + 1 = (x^2 + 1) + x$

ce qui livre une combinaison linéaire de $x^2 + 1$ et de x .

7. Si $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ est un système d'équations à deux inconnues x, y à résoudre dans $\mathbb{R}^2$

alors $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) - m \cdot f(x, y) = 0 \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$

est un système équivalent au premier (pourquoi ?)

Ce principe d'équivalence est d'usage courant dans les calculs . La deuxième équation du deuxième système s'obtient par une combinaison linéaire des deux équations du premier système . Nous voyons ainsi de nombreux exemples familiers de combinaisons linéaires . Cette notion appartient à la théorie des espaces vectoriels .

Soit V un espace vectoriel et $P = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_n\}$ une partie finie et non vide quelconque de V .

On appelle <u>combinaison linéaire des vecteurs de P</u>, tout vecteur $\bar{x} \in V$ de la forme $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n$ où $x_i \in \mathbb{R}$ expression que l'on écrit aussi

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i$ ($\sum_{i=1}^{n}$ est le <u>symbole sommation</u> et se lit :"somme pour i variant de 1 à n")

<u>Théorème</u> : L'ensemble W des combinaisons linéaires de P est un sous-espace de V .

<u>Démonstration</u> : Celle-ci se fait en trois pas comme le suggère la théorie vue .

(a) Si $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i$ et $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e}_i$ sont dans W

alors $\bar{x} + \bar{y} = (x_1\bar{e}_1 + \ldots + x_n\bar{e}_n) + (y_1\bar{e}_1 + \ldots + y_n\bar{e}_n)$

$= (x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_1) + (x_2\bar{e}_2 + y_2\bar{e}_2) + \ldots + (x_n\bar{e}_n + y_n\bar{e}_n)$

car l'addition dans V est celle d'un groupe commutatif

$= (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\bar{e}_n$

par la propriété (2) des espaces vectoriels .

donc $\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\bar{e}_i$ et $\bar{x} + \bar{y} \in W$

(b) Si $r \in \mathbb{R}$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

alors $r\overline{x} = r(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n)$

$= r(x_1\overline{e}_1) + r(x_2\overline{e}_2) + \ldots + r(x_n\overline{e}_n)$ par (3) et l'exercice 4f .

$= (rx_1)\overline{e}_1 + (rx_2)\overline{e}_2 + \ldots + (rx_n)\overline{e}_n$ par (1)

Bref $r(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} (rx_i)\overline{e}_i$ et de ce fait $r\overline{x} \in W$

(c) $\overline{o} \in W$ car $\overline{o} = o\overline{e}_1 + o\overline{e}_2 + \ldots + o\overline{e}_n$ par (5)

Un ensemble $P = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ de vecteurs de V est dit linéairement indépendant si aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres .

Supposons que ce soit le cas et considérons une combinaison linéaire nulle $r_1\overline{e}_1 + \ldots + r_n\overline{e}_n = \overline{o}$

Alors chaque $r_i = 0$. En effet, si on avait par exemple $r_1 \neq 0$, on aurait $r_1\overline{e}_1 = -r_2\overline{e}_2 - r_3\overline{e}_3 - \ldots - r_n\overline{e}_n$

et $r_1^{-1}(r_1\overline{e}_1) = r_1^{-1}(- r_2\overline{e}_2 - \ldots - r_n\overline{e}_n)$

$= (r_1^{-1}r_1)\overline{e}_1 = 1\overline{e}_1 = \overline{e}_1 = - r_1^{-1}r_2\overline{e}_2 - \ldots - r_1^{-1}r_n\overline{e}_n$

donc $\overline{e}_1$ serait combinaison linéaire des vecteurs $\overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$

Réciproquement si $\sum_{i=1}^{n} r_i\overline{e}_i = \overline{o}$ entraîne $r_i = 0$ pour tout i, alors les $\overline{e}_i$ sont linéairement indépendants car une dépendance linéaire telle que $\overline{e}_1 = x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n$

livre $\overline{e}_1 - x_2\overline{e}_2 - \ldots - x_n\overline{e}_n = \overline{o}$

et contredit notre hypothèse puisqu'ici $r_1 = 1 \neq 0$

<u>En conclusion</u>

Un ensemble de vecteurs $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ de V est linéairement indépendant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\overline{e}_i = \overline{o} \quad \text{implique} \quad r_i = 0 \quad \text{pour tout } i$$

<u>EXERCICES</u> . 8. Voici un espace vectoriel V et des vecteurs de celui-ci . Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

a) $V = F_{\mathbb{R}}$ $v_1 = x^4 + 1$, $v_2 = 2x^4 + x$, $v_3 = x - 2$ $(x \in \mathbb{R})$

b) $V = F_{\mathbb{R}}$ $v_1 = x^4 + 1$, $v_2 = x^3 + 1$, $v_3 = x + 1$

c) $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (2, 4)$, $v_2 = (-8, -16)$

d) $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (4, 5)$

e) $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, 4)$, $v_3 = (5, 6)$

f) $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (6, 2, 4)$, $v_3 = (0, 0, 3)$

g) $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 0, 6)$, $v_3 = (0, 0, 1)$,
$v_4 = (0, 1, 0)$,

h) $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, 6)$, $v_2 = (3, 2, 6)$,

9. Dans l'espace E^3 une <u>base</u> est constituée de trois vecteurs tels que tout vecteur de E^3 soit combinaison linéaire de ces vecteurs. Soit $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ une base

a) Montrer que tout vecteur s'écrit d'une et une seule manière comme combinaison linéaire de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

b) Si $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$ on dit que les x_i sont les coordonnées de $\bar{x}$ dans la base. Comment s'obtiennent les coordonnées de $\bar{x} + \bar{y}$ à partir de celles de $\bar{x}$ et de $\bar{y}$? Et celles de $r\bar{x}$ pour $r \in \mathbb{R}$?

c) Si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont linéairement indépendants montrer que leurs combinaisons linéaires $p = x\bar{a} + y\bar{b}$ constituent le plan oab.

10. Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ on donne

$P_1 = \{(0, 1, 4), (-2, 2, -3)\}$ et $P_2 = \{(-6, 8, -1), (-4, 7, 6)\}$

a) Décrire les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ constitués par les combinaisons linéaires de P_1 et par les combinaisons linéaires de P_2.

b) Montrer que les deux sous-espaces décrits en a) coïncident.

RESUME

Espace vectoriel

On appelle espace vectoriel (réel) un ensemble V d'éléments appelés vecteurs, structuré

1) par une <u>addition</u> qui fait de V un groupe commutatif de neutre $\overline{o}$
2) par une <u>multiplication</u> qui associe à tout réel r et à tout vecteur $\overline{v}$ un vecteur $r\overline{v}$ de telle manière que quels que soient $r, s \in \mathbb{R}$ et $\overline{v}, \overline{w} \in V$

   a) $r\cdot(s\cdot\overline{v}) = (r\cdot s)\cdot\overline{v}$
   b) $(r + s)\cdot\overline{v} = r\cdot\overline{v} + s\cdot\overline{v}$
   c) $r\cdot(\overline{v} + \overline{w}) = r\cdot\overline{v} + r\cdot\overline{w}$
   d) $1\cdot\overline{v} = \overline{v}$

Exemples : Les espaces euclidiens pointés E_o^1, E_o^2, E_o^3
Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
L'espace des polynômes de degré n (n appartenant à $\mathbb{N}_o$)
L'espace des fonctions F_I créées à partir d'un ensemble quelconque I

Sous - espace vectoriel

Si W est une partie d'un espace vectoriel V, W sera lui-même un espace vectoriel si et seulement si pour tout $\overline{x}, \overline{y} \in W$ et $r \in \mathbb{R}$

1) $\overline{x} + \overline{y} \in W$
2) $r\overline{x} \in W$
3) $\overline{o} \in W$

Combinaison linéaire de vecteurs

Soit V un espace vectoriel et $P = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ une partie finie et non vide de V on appelle combinaison linéaire des ~~vecteurs~~ de P, tout vecteur $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i$ où $x_i \in \mathbb{R}$

L'ensemble des combinaisons linéaires de P est un sous-espace de V

Vecteurs indépendants

Un ensemble $P = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ de vecteurs V est linéairement indépendant si et seulement si aucun des vecteurs n'est combinaison linéaire des autres, ou encore si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\overline{e}_i = \overline{o} \quad \text{implique} \quad r_i = 0 \quad \text{pour tout } i .$$