13. QU'EST CE QU'UNE THEORIE MATHEMATIQUE ?

<u>Supposé acquis</u> . VM2 chapitre 5 : Démontrer , VM3 chapitre 17 : Démontrer. Notions d'hypothèse, thèse, implication, réciproque, équivalence logique, contre-exemple, conjecture .

<u>Objectifs</u> : Renforcer la prise de conscience des notions précédentes . Introduire l'idée d'organisation d'une théorie, du choix d'axiomes, du rôle de la logique, des démonstrations de théorèmes au travers d'exemples simples basés sur les connaissances des élèves . Reprendre l'idée de conjecture ou d'expérimentation conduisant à des conjectures qui deviennent l'objet de problèmes . Lien avec l'informatique .

<u>COMMENTAIRES</u> .

La mathématique est une production du cerveau de l'homme, basée sur le traitement d'informations . Cette activité s'exerce sur des notions de plus en plus abstraites et générales qui recouvrent une réalité de plus en plus large .

<u>Exemple 1</u> . <u>La théorie des groupes</u> .

Au cours des premières années de l'enseignement secondaire, diverses situations étudiées en géométrie dégagent peu à peu la notion de groupe et celle voisine de groupe de permutations . A la longue, nous formalisons ces notions dans des définitions précises basées sur des <u>axiomes</u> qui sont les propriétés de base que nous décidons de retenir pour tous les groupes ou tous les groupes de permutations . A quoi cela sert-il ? A développer une théorie valable pour tous les groupes et qui s'applique dès lors à toutes les situations où nous rencontrons cette structure . L'exemple le plus frappant que nous avons rencontré est la résolution de l'équation linéaire . Si G est un groupe dont l'opération est notée $*$, le neutre N et où l'inverse de x s'écrit x^i alors

l'équation $a * x = b$ se résout par

$$\begin{aligned} a^i * (a * x) &= a^i * b \\ (a^i * a) * x &= a^i * b \\ N * x &= a^i * b \\ x &= a^i * b \end{aligned}$$

Il en va de même pour l'équation $x * c = d$ qui livre $x = d * c^i$.

Quel est l'intérêt de cette démarche ? Elle synthétise une foule de problèmes familiers, par exemple :

- dans les groupes $\mathbb{Z},+$; $\mathbb{D},+$; $\mathbb{R},+$ où $N = 0$, $a^i = -a$,

la théorie s'applique aux équations

$a + x = b \Longrightarrow x = b + (-a) = b - a$

- dans les groupes $\mathbb{D}_o,\times$; $\mathbb{R}_o,\times$; $\mathbb{Q}_o,\times$ où $N = 1$, $a^i = a^{-1}$

la théorie s'applique à

$ax = b \Longrightarrow x = a^{-1}b$

- dans les groupes de permutations (déplacements, isométries, etc...) $G, \circ$ où $N = 1_E$, $a^i = a^{-1}$ la théorie s'applique
$a \circ x = b \Longrightarrow x = a^{-1} \circ b$

La théorie des groupes consiste en le développement, le traitement systématique des informations fournies par les axiomes, par les premières notions admises au sujet des groupes . Il en va de même pour la théorie des groupes de permutations .

Une telle étude systématique n'est pas notre but dans l'enseignement secondaire . Nous nous limiterons à peu de choses, par exemple les <u>sous-groupes</u> de groupes et quelques propriétés qui en découlent . Pour les groupes de permutations, les notions d'<u>orbite</u>, et de <u>stabilisateur</u> suffiront à un embryon de théorie qui permet déjà de résoudre des problèmes spectaculaires comme les suivants :

- quel est le nombre de symétries distinctes d'un cube ?
- quel est le nombre de symétries distinctes d'un hypercube dans $\mathbb{R}^4$?

Les mathématiciens quant à eux ont développé une théorie approfondie qui couvre plusieurs dizaines de milliers de pages imprimées .

<u>LE RÔLE DE LA LOGIQUE</u> .

Nous comprenons un peu mieux ce qu'est une théorie mathématique . Dans le traitement des informations, un rôle majeur est joué par la <u>logique</u> . Celle-ci livre en quelque sorte les   les qui guident le traitement .

Tout ceci se comprend beaucoup mieux dans des situations qui n'exi exigent pas de connaissances mathématiques .

<u>Exemple 2</u> .

Un voyageur tombe aux mains d'un chef de tribu cruel qui décide que le prisonnier sera pendu ou fusillé . La décision sera prise par le prisonnier lui-même . Celui-ci est chargé de formuler une proposition . Si la proposition est vraie, il sera pendu et si elle est fausse, il sera fusillé . Le voyageur dit alors " Je serai fusillé " .

<u>EXERCICE</u> . 1. Montrer que le chef est dès lors incapable d' appliquer sa décision .

<u>Exemple 3</u>.

Un prisonnier est enfermé dans une enceinte munie de deux portes . Il peut la quitter par une des deux portes à son choix . L'une conduit à la liberté et l'autre à une mort certaine . Un gardien est placé auprès de chaque porte . Le prisonnier peut poser une seule question à un seul de ces gardiens et il lui sera répondu par oui ou par non . Un des gardiens dira nécessairement la vérité et l'autre mentira forcément mais le prisonnier ignore lequel ment . Après avoir réfléchi, le prisonnier demande à un des gardiens : "Que dirait l'autre gardien si je lui demandais si cette porte-ci conduit à la liberté ?"

<u>EXERCICES</u> . 2. Montrer que la réponse à cette question permet de choisir la bonne porte .

3. Louis a oublié les résultats du tournoi de football qui opposait les équipes A, B, C, D .
Il trouve un journal qui donne le classement du tournoi

		points	gagné	nuls	perdu	buts marqués	buts encaissés
1	D	5	2	1	0	3	1
2	A	3	1	1	1	4	4
3	B	2	1	0	2	4	3
4	C	2	0	2	1	1	4

Pouvez-vous l'aider à reconstituer les résultats des six parties ayant opposé ces équipes deux à deux .

<u>LES AXIOMES DE PEANO POUR $\mathbb{N}$</u>

Vers 1890 le mathématicien Peano choisit un système d'axiomes pour $\mathbb{N}$ et développa une théorie complète de nombres, sur cette base . Nous n'allons pas citer ses axiomes, ni reprendre cette théorie mais souligner l'axiome le plus important qui est <u>le principe de récurrence ou d'induction</u> .

Si V est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que

1) $0 \in V$
2) $x \in V \Longrightarrow x + 1 \in V$

alors $V = \mathbb{N}$

Comment applique-t-on ce principe de récurrence ?

Supposons qu'on désire établir une propriété P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ c'est à dire en fait, une infinité de propriétés . Voici un exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n proclame que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Pour démontrer ceci, on prouve la propriété pour la plus petite valeur de n, ici $n = 0$. Ensuite on montre que $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ c'est à dire que si P_n est supposée vraie, alors P_{n+1} est nécessairement vraie .

Mettons ceci à exécution .

<u>Exemple 4</u>.

Quel que soit n [illegible] $+\ldots+ n = \frac{n(n+1)}{2}$ (1)

Démonstration : Soit V l'ensemble des naturels $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels (1) est vérifié . .

1) $0 \in \mathbb{N}$ car dans ce cas le premier membre de (1) est nul et le deuxième également .

2) Supposons que $x \in V$. Alors

$$1 + 2 + \ldots + x + x+1 = (1 + 2 + \ldots + x) + (x + 1) = \frac{x(x+1)}{2} + (x + 1)$$

$$= (x + 1)(\frac{x}{2} + 1) = \frac{(x + 1)(x + 2)}{2}$$

donc $x + 1 \in V$

En conclusion, $V = \mathbb{N}$

EXERCICES . 4. Démontrer par récurrence dans un espace vectoriel

V,r : $r\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (rx_i)\bar{e}_i$

où $\bar{e}_i \in V$ et $r, x_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$

5. $n^2 + n + 41$ est-il premier pour tout $n \in \mathbb{N}$?

6. Démontrer par récurrence

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

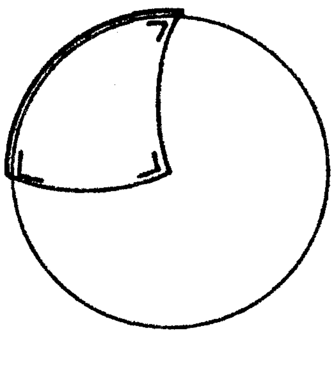
b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

7. Expérimenter pour découvrir une loi gouvernant la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ et démontrer cette loi par récurrence .

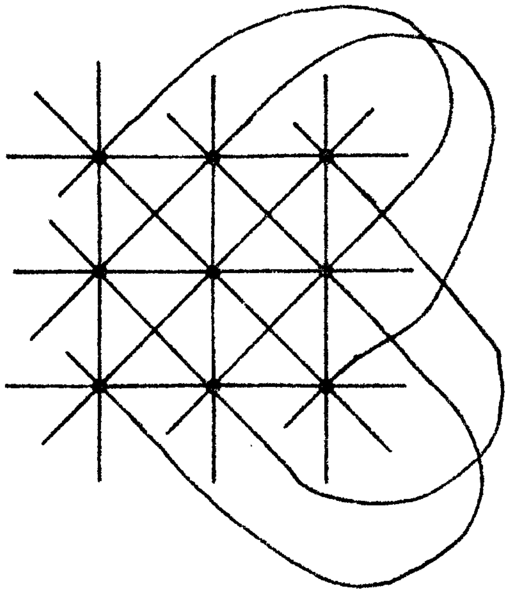
ET EN GEOMETRIE ?

La géométrie est-elle gouvernée par des axiomes, par des propriétés admises sans démonstration ? C'est certain .
Voici une observation qui en livre la preuve .
Nous nous sommes convaincus que dans le plan, la somme des angles d'un triangle vaut 180° . Imaginez les habitants d'une sphère comme la Terre . Ceux-ci peuvent croire que le plan étudié dans nos cours de géométrie est une idéalisation de leur univers physique . Ils découvriront pourtant qu'ils peuvent construire des triangles physiques possédant trois angles droits, donc une somme d'angles égale à 270° .
Bref, nous avons adopté sans y penser, des axiomes pour la géométrie plane qui ne s'appliquent pas à la sphère .



Il existe des structures géométriques très variées et très différentes qui possèdent pourtant de nombreuses propriétés communes, comme le font les groupes ou d'autres notions .

Exemple 5 . Un plan fini



Nous décrivons un plan de neuf points dont toutes les droites ont trois points . Les douze droites sont dessinées par un trait continu .

EXERCICE . 8. Examiner les propriétés géométriques connues et les tester dans le plan de neuf points .

a) Combien de droites par deux points ?
b) Parallélisme, directions
c) Orthogonalité
d) Translations et homothéties
e) Coordonnées
f) Cercles etc...

DEMEURER PRUDENT .

Voici un petit calcul qui prouve que $2 = 1$ et qu'il convient d'être prudent . On utilise ici des sommes infinies sans précautions .

Posons $x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$ (1)

qu'on peut écrire

$$x = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}) + \dots \qquad (2)$$

ou

$$x = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}) - (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}) - (\dots \qquad (3)$$

Par (2) et (3) on a $0 < x < 1$

Multiplions (1) par 2

$$2x = 2 - 1 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{5} + \dots \qquad (4)$$

$$2x = (2 - 1) - \tfrac{1}{2} + (\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{5}) - \tfrac{1}{6} + \dots \qquad (5)$$

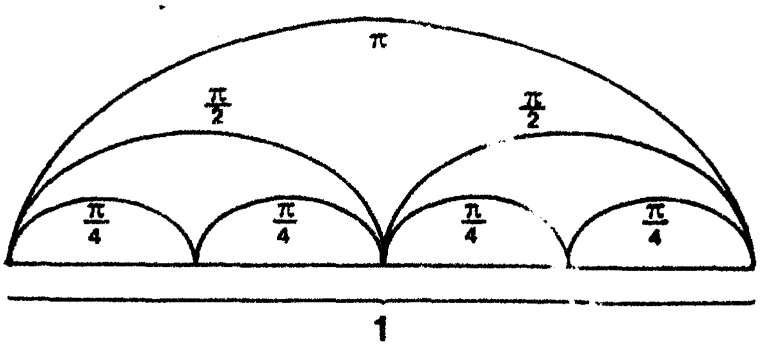
$$2x = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots \qquad (6)$$

Donc $2x = x$. Or $x \neq 0$

Donc $2 = 1$

Le mystère ne sera pas éclairci à présent . Il le sera plus tard . Notre but en le montrant est de persuader chacun que la prudence s'impose avec des sommes infinies .

De même, voici un dessin qui suggére que le nombre π est égal à 1 : une absurdité



EXPLORER

Voici un énoncé trouvé dans un livre de mathématique consacré à une initiation à la programmation .
" On considère la suite (a_n) définie par

$$a_n = \sqrt{24n + 1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ecrire un programme qui permet d'imprimer les dix premières valeurs entières de cette suite ainsi que les indices correspondants .
Exécuter le programme et étudier les résultats obtenus . Quelle conjecture peut-on formuler ? "
Nous recherchons d'abord un programme en Basic
Voici une solution :

```
I ← 1
S ← (24I + 1)√
If  S - [S] > 0
PRT S, PRT I
I ← I + 1
END
```

(1)

Celle-ci n'est pas entièrement satisfaisante . Elle ne tient pas compte de l'exigence : "Dix premières valeurs entières" et conduit à un programme ne s'arrêtant pas .
Voici une solution complète :

```
Z ← 0
N ← 1
A ← (24N + 1) √
If A - [A] > 0
PRT N, A
Z ← Z + 1
N ← N + 1
If Z < 10
END
```

(2)

Après ce premier travail, nous songeons à utiliser une machine, en l'occurence une TI 58 c . Dans ce cas, un programme ne s'arrêtant pas, n'est guère gênant et nous reprenons (1) .
Comment faire afficher en même temps et de manière intelligible, S et I ? L'idée est de faire afficher $S + 10^{-6} I$. Les zéros de ce nombre permettront de séparer ce qui nous intéresse .
Voici une solution

```
LRN
2nd Lbl A
STO 00
2nd Lbl B
RCL 00
+ 1 =
STO 00
× 24 + 1)√‾ =
STO 01
2nd INT - RCL 01 =
INV 2nd x ≥ t B
RCL 01 + (RCL 00 × 0,000001) =
RS
GTO B
LRN
```

L'exécution de ce programme se fait en pressant :
0 A RS, la machine affiche 5,00001 puis on fait
RS et elle affiche 7,00002, puis on fait
RS et elle affiche 11,00005, etc...
Nous récoltons patiemment les données :

n	1	2	5	7	12	15	22	26	35
$\sqrt{24n+1}$	5	7	11	13	17	19	23	25	29

n	40	51	57	70	77	92	100	117
$\sqrt{24n+1}$	31	35	37	41	43	47	49	53

Le moment [illegible] venu d'interpréter ces résultats . L'énoncé parlait d'une conj[illegible]ure . Pouvons-nous observer une régularité, une loi dans le ta[illegible]eau ci-dessus ?
Les élèves proposent des propriétés :
" $\sqrt{24n+1}$ est toujours impair" . C'est vrai et guère étonnant car $24n + 1$ est également impair .
" $\sqrt{24n+1}$ est toujours un nombre premier" . Non, car on voit apparaître aussi 25, 35, 49 . Il n'empêche que le grand nombre

de nombres premiers dans le tableau est frappant . Obtient-on tous les nombres premiers ? Non, 2 et 3 n'apparaissent pas . Mais les autres ? Si p est premier, a-t-on toujours $p^2 = 24n + 1$ pour un certain n ? Si c'est le cas, $p^2 - 1 = 24n$ et $(p - 1)(p + 1) = 24n$
Si p est premier, $p > 0$ a-t-on toujours que $(p - 1)(p + 1)$ est divisible par 24 ? Il est certain que 3 ne divise pas p, donc 3 divise $p - 1$ ou $p + 1$ et 3 divise $(p - 1)(p + 1)$. De même, $p - 1$ et $p + 1$ sont pairs et l'un d'eux est divisible par 4, donc 8 divise $(p - 1)(p + 1)$.
Bref, 24 divise $(p - 1)(p + 1)$. Victoire ! Tous les nombres premiers supérieurs à 3 interviennent dans la liste .
Le raisonnement n'est-il pas plus général ? Peut-on remplacer p par un nombre impair quelconque ? Non, mais on peut le remplacer par un nombre impair qui n'est pas divisible par 3, c'est à dire par tout entier de la forme $6k \pm 1$. Voilà le secret :
les entiers de la forme $\sqrt{24n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$ sont tout simplement les entiers de la forme $6k \pm 1$, c'est à dire 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25,...
Bien entendu, d'autres observateurs dans d'autres classes auraient pu constater ceci d'emblée .