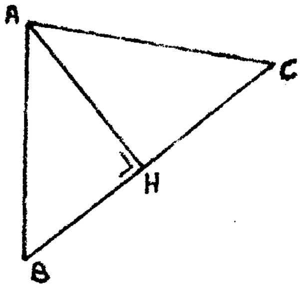
16. QUESTIONS DE GEOMETRIE . 6h/s

Supposé acquis . Trigonométrie dans un triangle rectangle . Intersections d'un cercle et d'une droite . Equation du cercle dans un repère orthonormé .

Objectifs . Expression trigonométrique de l'aire du triangle . Arc de segment capable . Puissance d'un point par rapport à un cercle .

L'AIRE DU TRIANGLE PAR LA TRIGONOMETRIE .



Dans les chapitres de trigonométrie, nous avons commis un petit oubli qu'il convient de réparer . C'est aussi un bon prétexte à révision .

Considérons un triangle de sommets A, B, C . Notons $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les angles du triangle en ces sommets et a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB . Soit H le pied de la hauteur issue de A et h la longueur de [A,H] .

Soit S l'aire du triangle ABC .

On a $S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a(c \sin \hat{B})$

donc $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$ et, pour des raisons de symétrie

$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}}$$

EXERCICES . 1. Trouver l'aire du triangle ABC si on donne

1) $a = 16,38$ m, $b = 55,72$ m, $\hat{C} = 27° 15'$

2) $\hat{A} = 37° 12'$, $\hat{C} = 62° 29'$, $b = 34,876$ m .

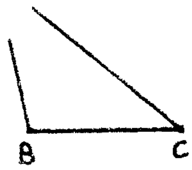
2. Montrer que l'aire du triangle ABC est nécessairement égale à

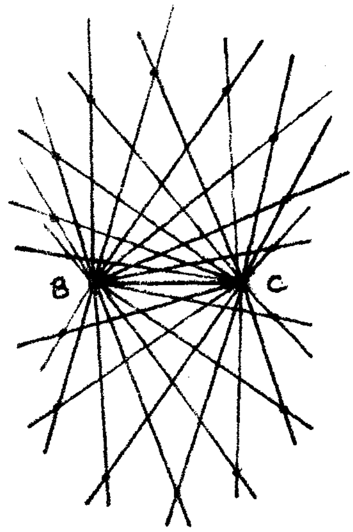
$$\frac{c^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B}}{2 \sin \hat{C}}$$

ARC DE SEGMENT CAPABLE .

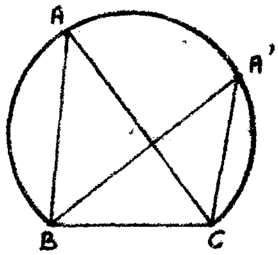
Nous reprenons ici, un extrait de VM3, chapitre 16 .

Peut-on construire un triangle ABC connaissant la longueur de BC et l'angle $\hat{A}$? Bien sûr ! Mais les divers triangles obtenus ne sont pas isométriques . Fixons les points B et C . Dessinons plusieurs points A tels que $\widehat{BAC} = 40°$. Ce n'est pas facile . Les résultats sont approximatifs mais bientôt une méthode apparaît . On trace une demi-droite d'origine B ce qui détermine un angle $\widehat{ABC}$ qu'on mesure . Alors $\widehat{ACB} = 180° - 40° - \widehat{ABC}$ est déterminé et on peut construire cet angle . Dès lors A est déterminé . Cette construction relativement précise conduit à un ensemble de points A qui semble être la réunion de deux cercles . Ceci est-il exact ? Pouvons-nous le démontrer ? La classe est perplexe . L'aide du professeur est requise et il faudra d'abord s'attaquer à une question plus simple .





Si Γ est un cercle de centre O passant par A, A', B, C et si A,A' sont situés d'un même côté de BC, a-t-on $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$?



Des essais semblent le confirmer ?

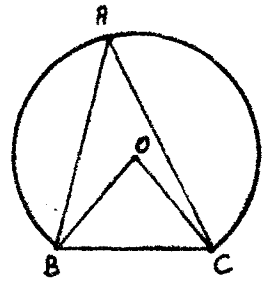
Finalement, le professeur propose une démonstration basée sur une autre propriété .

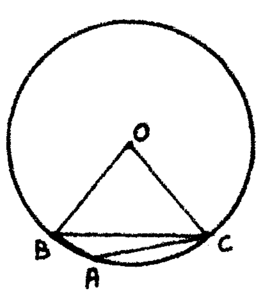
<u>Théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit à un cercle</u> .

Si Γ est un cercle de centre O passant par A, B, C alors

1) $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$ si O, A sont dans le même demi-plan de frontière BC

2) $\widehat{BOC} = 360° - 2\,\widehat{BAC}$ si A et O sont dans des demi-plans distincts de frontière BC





<u>Démonstration</u>

Supposons que O, A sont dans le même demi-plan de frontière BC . Nous examinons plusieurs cas .

<u>1er cas</u> : B O A sont alignés .

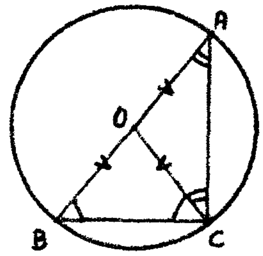
Alors BOC et AOC sont des triangles isocèles car BO = OC = OA .

Donc $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ et $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$

De ce fait $\widehat{BOC} = 180° - 2\,\widehat{OBC}$

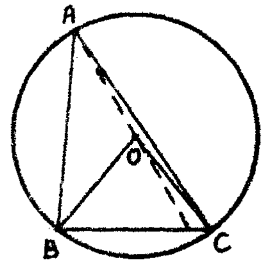
$2\,\widehat{BAC} = 180° - 2\,\widehat{OBC}$

et finalement $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$.



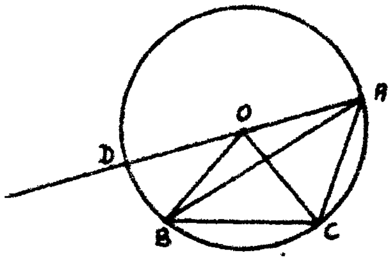
<u>2e cas</u> : O est dans le secteur angulaire $\widehat{BAC}$.

Alors la droite AO recoupe le segment [BC] en un point D et



$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$
$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} + \widehat{DOC}$
Par le premier cas, $\widehat{BOD} = 2\ \widehat{BAD}$ et $\widehat{DOC} = 2\ \widehat{DAC}$
donc $\widehat{BOC} = 2\ \widehat{BAC}$

<u>3e cas</u> : O n'est pas dans le secteur angulaire $\widehat{BAC}$. Alors la droite AO recoupe le cercle en un point d situé dans le même demi-plan que O, A par rapport à BC. On a



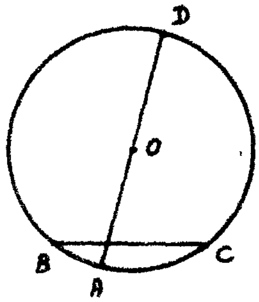
$$\left.\begin{array}{ll}\widehat{BOC} = \widehat{DOC} - \widehat{DOB} & \text{et } \widehat{DOC} = 2\ \widehat{DAC} \\ \widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} & \quad\ \widehat{DOB} = 2\ \widehat{DAB}\end{array}\right\}\ \text{par le 1er cas}$$

donc $\widehat{BOC} = 2\ \widehat{BAC}$.

La réunion de ces trois cas livre la propriété 1.

Et la propriété 2 ?

La droite OA recoupe le cercle en un point D situé dans le même demi-plan de frontière BC. Alors $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$ (1)



Comme AD est un diamètre du cercle on sait (VM2) que $\widehat{ADB} = 90°$ et de même $\widehat{DCA} = 90°$.

$$\text{Donc}\quad \begin{array}{l}\widehat{BAD} = 90° - \widehat{BDA} \\ \widehat{DAC} = 90° - \widehat{ADC}\end{array} \qquad (2)$$

Par (1) et (2) on a

$$\widehat{BAC} = 180° - (\widehat{BDA} + \widehat{ADC})$$
$$\widehat{BAC} = 180° - \widehat{BDC}$$

et comme $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\ \widehat{BOC}$

$$\widehat{BAC} = 180° - \frac{1}{2}\ \widehat{BOC}$$

ou $\widehat{BOC} = 360° - 2\ \widehat{BAC}$ c'est à dire 2).

<u>EXERCICES</u>. 3. Démontrer le

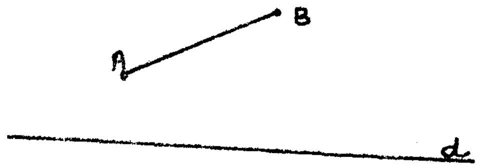
<u>Théorème</u>. Si B, C sont des points du plan l'ensemble des points du plan d'où l'on voit [BC] sous un angle α donné est la réunion de deux arcs de cercle.

4. Que devient le théorème précédent dans l'espace ?

5. Soit Γ un cercle et P un point de Γ. Existe-t-il des points A, B sur Γ tels que la tangente à Γ en chacun des points P, A, B est parallèle au côté opposé du triangle ?

6. Dessiner un but de football et diverses lignes d'où l'on voit le but sous un même angle. Quel est l'intérêt d'un tel dessin pour un joueur ?

7. Voici un segment $[AB]$ et une droite d .
Comment peut-on déterminer le point $P \in d$
d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle maximal ?



8. Soient deux droites a et b concourrantes en A et trois droites c, d, e concourantes en B avec $B \notin a$ et $B \notin b$.
La droite c coupe a en C et b en C' . La droite d coupe a en D et b en D' . La droite e coupe a en E et b en E' .
Construire P : intersection de CD' et $C'D$
Q : intersection de CE' et $C'E$
R : intersection de DE' et $E'D$.
Que constatez-vous pour les points A, P, Q, R ?

9. Les balles de tennis ont un diamètre de 6,5 cm . Elles sont emballées soit par 3 dans des boîtes cylindriques, soit par 6 dans des boîtes ayant la forme d'un parallélépipède rectangle . Quelles sont les dimensions intérieures minimales de ces boîtes ?

10. P, Q, R sont trois points non alignés de l'espace E^3
a) Quel est l'ensemble des points de E^3 d'où l'on voit $[PQ]$ sous un angle de 50° et $[QR]$ sous un angle de 83° ?
b) Quel est l'ensemble des points de E^3 d'où l'on voit $[PQ]$ sous un angle de 50°, $[QR]$ sous un angle de 83° et $[PR]$ sous un angle α ?

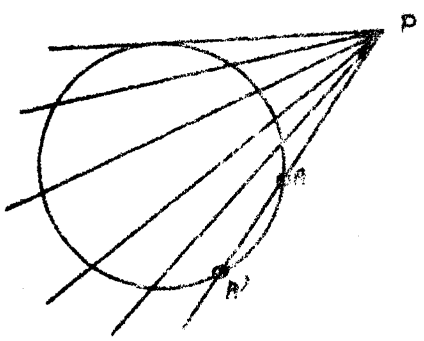
11. Les points A, B, C, D sont coplanaires . Est-il exact qu'ils sont sur un cercle si et seulement si $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$?

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE .

Le cercle n'a pas épuisé ses secrets . Voici une propriété qui est loin d'être évidente et qui ne fût découverte qu'au début du 19e siècle .

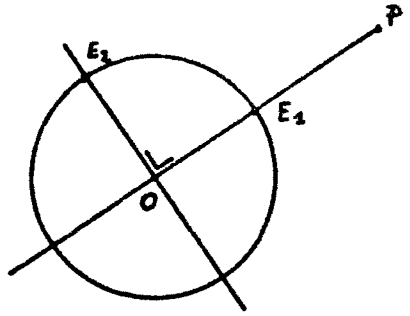
Théorème . Soit Γ un cercle du plan euclidien E^2 et P un point quelconque de E^2 . Soient A, A' deux points de Γ alignés avec P ($A = A'$ si PA est tangente à Γ) . Alors le produit des distances $d(P,A)\, d(P,A')$ est indépendant de A .

Démonstration .



Soit O le centre de Γ . Choisissons un repère orthonormé d'origine O tel que l'axe des x passe par P et que les points de base du repère soient sur Γ .
Ainsi Γ acquiert une équation

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$



Soit ρ l'abscisse de P . Une droite par P possède une équation

$$y = \lambda(x - \rho) \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

(ou $x = \rho$)

Si cette droite coupe Γ en deux points A, A' les abscisses de ceux-ci sont les racines de l'équation

$$x^2 + \lambda^2(x - \rho)^2 = 1$$

$$(1 + \lambda^2)\, x^2 - 2\rho\lambda^2 x + \rho^2\lambda^2 - 1 = 0 \qquad (3)$$

Le produit de ces racines x_A, $x_{A'}$ est $\dfrac{\rho^2\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2}$ et leur somme $\dfrac{2\rho\lambda^2}{1 + \lambda^2}$

Dès lors $d(P,A)\, d(P,A') =$

$$\sqrt{(x_A - \rho)^2 + y_A^2}\,\sqrt{(x_{A'} - \rho)^2 + y_{A'}^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{y_A}{\lambda}\right)^2 + y_A^2\right)\left(\left(\frac{y_{A'}}{\lambda}\right)^2 + y_{A'}^2\right)}$$

$$= |y_A y_{A'}|\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right) = |\lambda(x_A - \rho)\ \lambda(x_{A'} - \rho)|\ \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)$$

$$= \lambda^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + 1\right)(x_A x_{A'} - \rho(x_A + x_{A'}) + \rho^2)$$

$$= (1 + \lambda^2)\left(\frac{\rho^2\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2} - \rho\,\frac{2\rho\lambda^2}{1 + \lambda^2} + \rho^2\right) = \rho^2 - 1$$

et nous voyons que $\rho^2 - 1$ ne dépend pas de λ .

On appelle puissance de P par rapport à Γ, le produit $\rho^2 - 1$ des distances $d(P,A)\, d(P,A')$ où A, A' sont des points de Γ alignés avec P .

EXERCICE . 12. Soient C_1, C_2 deux cercles du plan . Quel est l'ensemble des points du plan dont les puissances par rapport à C_1 et C_2 sont égales ?

REMARQUE . Dans ce chapitre nous avons cru bon d'habituer le lecteur à un changement de notations en utilisant des majuscules pour désigner les points . En mathématique, les changements de notations sont fréquents ; il faut souvent des siècles pour que certaines notations soient adoptées par ... presque tout le monde .