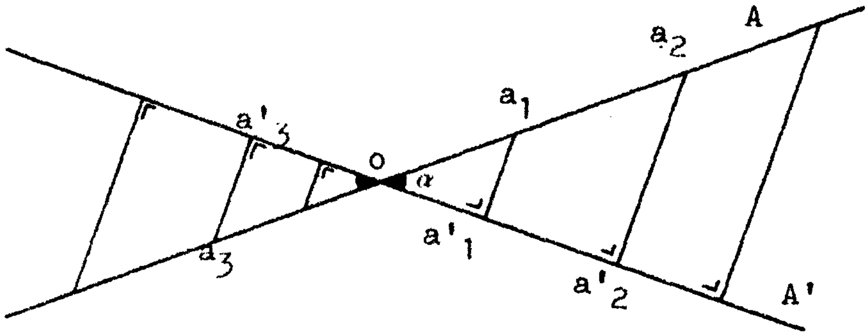
2. TRIGONOMETRIE

Supposé acquis . Premier contact avec les fonctions trigonométriques vues comme invariants d'un angle exprimés par un rapport de longueurs . Applications simples . Voir VM3, chapitre 18 .

Objectifs . Fixation des fonctions trigonométriques . Leur extension à $\mathbb{R}$. Mesures et opérations sur les angles .

CE QU'IL NE FAUT PAS OUBLIER .

En troisième année, nous avons vu comment les astronomes de l'Antiquité avaient inventé un moyen de remplacer les mesures de distances par des mesures d'angles . Ils avaient pu notamment calculer la distance de la Terre à la Lune .



Revoyons le principe de cette démarche .
Si A et A' sont des droites sécantes en o, dans le plan ou dans l'espace et si α est le plus petit angle qu'elles font ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$) alors, pour tout point $a \in A$ on désigne par a', la projection orthogonale de a sur A', obtenue en menant la perpendiculaire à A' par a .
Le rapport des longueurs $\frac{oa'}{oa}$ ne dépend pas du point a choisi, en vertu du théorème de Thalès . Ce rapport dépend uniquement de l'angle α . On l'appelle cosinus de α ou $\boxed{\cos\alpha}$.
De même, les rapports de longueurs

$$\text{sinus de } \alpha = \boxed{\sin\alpha} = \frac{aa'}{oa}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \boxed{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{aa'}{oa'}$$

sont des fonctions de l'angle α indépendantes du point $a \in A$.
Observons qu'avec trois longueurs, on peut écrire six rapports distincts donc introduire en fait six fonctions différentes de α .
Celles qui sont exclues ici, seront examinées dans les exercices .
Par une simplification de fractions, on voit que

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{aa'}{oa}}{\frac{oa'}{oa}} = \frac{aa'}{oa}\cdot\frac{oa}{oa'} = \frac{aa'}{oa'} = \operatorname{tg}\alpha$$

Par le théorème de Pythagore, $oa^2 = oa'^2 + aa'^2$
Donc, si nous divisons les deux membres par oa^2

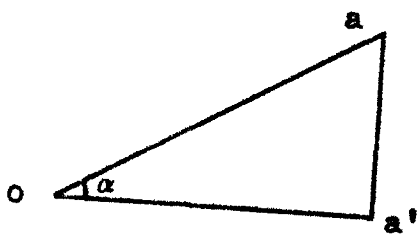
$$1 = \frac{oa'^2 + aa'^2}{oa^2} = \left(\frac{oa'}{oa}\right)^2 + \left(\frac{aa'}{oa}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

Nous retenons ces relations fondamentales

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Notons bien la convention qui régit l'usage des exposants :
$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)(\sin\alpha)$
tandis que $\sin\alpha^2 = \sin(\alpha\cdot\alpha)$
Les définitions des fonctions trigonométriques sinus, cosinus, tangente exigent un minimun de mémorisation . Elles se résument par un triangle oa'a rectangle en a' et par les égalités suivantes :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{aa'}{oa}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{oa'}{oa}$$
$$tg\,\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{aa'}{oa'}$$



En déterminant une table des valeurs de ces fonctions lorsque α varie par exemple de degré en degré, les Anciens pouvaient ensuite les exploiter dans le calcul des distances . En mesurant par exemple oa' et l'angle α , et en recherchant $tg\,\alpha$ dans la table, on calcule aa' grâce à $aa' = oa'\cdot tg\,\alpha$, au lieu de mesurer aa' . Cette méthode permit le calcul de la distance Terre-Lune après un calcul préalable du rayon de la Terre .
Aux 18e et 19e siècles, cette méthode permit un relevé précis et systématique des distances des points déterminés à la surface de la Terre grâce à une seule mesure de distance et une foule de mesures d'angles, le reste étant une question de calcul .

EXERCICES. 1. Quelles sont les valeurs prises par les valeurs trigonométriques sin, cos, tg si α vaut
a) 0° b) 45° c) 30° d) 60° ? Peut-on parler de sin 90° ?

2. Utiliser une calculatrice scientifique pour calculer $\sin\alpha°$ lorsque α est un multiple entier de 18° .
La calculatrice accepte-t-elle des valeurs de α non comprises dans l'intervalle [0, 90] ? Quel sens faut-il attribuer à de telles valeurs ?

3. Rédiger un programme permettant de gagner du temps pour compléter une table de la fonction $x \to tg\,x°$, à l'aide d'une machine programmable .

4. Les fonctions trigonométriques manquantes dans notre exposé, sont

cotangente $\alpha = \frac{oa'}{aa'} = \text{cotg}\,\alpha$ sécante $\alpha = \frac{oa}{oa'} = \sec\alpha$

cosécante $\alpha = \frac{oo}{aa'} =$ cosec α

a) Montrer qu'on a $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, $\text{séc}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

b) Calculer cotg α , sec α , cosec α à l'aide d'une machine, si $\alpha = 15°$, $37°$, $89°$.

5. Comment peut-on résoudre l'équation $\sin x° = 0{,}71$ à l'aide d'une calculatrice, pour $x \in [0, 90]$?

6. Deux observateurs a,b distants de 1750 m, mesurent au même instant les hauteurs d'un point remarquable d'un nuage situé dans le plan vertical par a et b . Les angles d'élévation de ce point sont de 72° et 84° . Les observateurs sont situés à la même altitude . Quelle est la hauteur du nuage ?

7. Trouver la longueur d'un segment faisant un angle de 22° avec sa projection orthogonale, sur une droite, de longueur 16,64 m .

8. La petite diagonale d'un losange mesure 12 cm et un des angles 54° . Calculer les autres angles, la longueur des côtés et celle de la grande diagonale .

9. Quelqu'un fait face au milieu d'un long mur . Il voit le mur sous un angle de 40° . Il s'avance alors vers le mur en suivant la perpendiculaire à celui-ci jusqu'à ce qu'il voie le mur sous un angle de 80° . A ce moment, il a parcouru 60 mètres . Quelle est la longueur du mur ?

10. Un avion, en vol horizontal rectiligne uniforme a une altitude de 2 600 mètres . Il aperçoit une ligne de chemin de fer à 30° sous l'horizon . Il la survole 20 secondes plus tard . Quelle est la vitesse de l'avion ?

11. Un bac fluvial traverse une rivière avec une vitesse propre de 5 km/h . Le courant a une vitesse de 2 km/h . La ligne joignant les deux embarcadères est perpendiculaire aux rives . Sous quel angle avec la rive le bac doit-il naviguer ? Quelle est sa vitesse réelle ?

12. La hauteur correspondant à l'hypoténuse d'un triangle rectangle partage celle-ci en deux segments de 10 cm et 6 cm . Calculer les angles du triangle, à l'aide d'une machine .

PERFECTIONNONS LA METHODE .

La méthode qu'on vient de revoir est puissante . Son inconvénient est de s'appliquer uniquement aux triangles rectangles et aux angles aigus . Or en pratique, on rencontre des situations où l'on connait les angles et les côtés d'un triangle quelconque et l'un de ces angles peut être

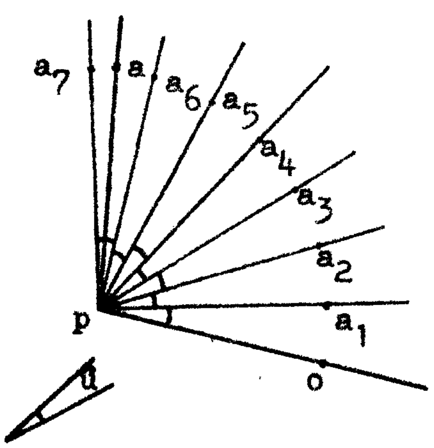
obtus . Dans l'étude du mouvement d'une roue on est amené à utiliser des angles positifs et négatifs, arbitrairement grands ou petits et les fonctions trigonométriques de ces angles . Nous devons donc revoir notre étude .
Profitons-en pour revoir et approfondir diverses notions relatives aux angles et à leur mesure .

RAPPEL SUR LES ANGLES (VM2, 10)

On se situe dans le plan ou dans l'espace .
Un angle $\hat{a}$ est constitué par la donnée d'un point p (sommet ou origine de l'angle) et de deux demi-droites d'origine p (côtés de l'angle) .
Tous les angles superposables à $\hat{a}$ par un déplacement sont considérés comme équivalents . Parfois le mot angle désigne une telle classe d'équivalence . Ainsi parle-t-on de l'angle de 60° au lieu d'un angle de 60° .
La fermeture convexe l'un angle (non plat) est un secteur angulaire .
Son complément dans le plan est également un secteur angulaire .
L'angle plat détermine deux secteurs angulaires qui sont les demi-plans dont il est la frontière .
Un angle orienté est un couple de demi-droites de même origine .
La relation d'ordre sur les angles se traite par l'inclusion de secteurs angulaires (et par déplacement) .
L'addition des angles se traite par la réunion de secteurs angulaires dont l'intersection est réduite à une demi-droite . Pour être définie dans tous les cas, l'addition exige un élargissement de la notion d'angle à l'angle-tour qui est constitué par un nombre entier de tours et un angle ordinaire .

MESURER DES ANGLES

Nous avons déjà une longue expérience des mesures d'angles avec diverses unités . Rappelons l'essentiel .
On travaille dans le plan et nos angles sont des secteurs angulaires



On se donne un angle $\hat{u}$ considéré comme unité . Soit $\hat{a} = o\hat{p}a$ un angle quelconque . On peut supposer que $d(p,o) = d(p,a) = 1$. Pour mesurer l'angle on le compare à $\hat{u}$. On reporte $\hat{u} = o\hat{p}a$ par déplacement de manière que l'un des angles (secteurs angulaires) $o\hat{p}a_1$, $o\hat{p}a$ soit inclus à l'autre . Ce report peut se faire d'une seule manière .

Ensuite on reporte $\hat{u} = a_1\hat{p}a_2$ de manière que pa_1 soit bissectrice de $o\hat{p}a_2$ et que $d(p,a_2) = 1$. Etc .
On construit donc une suite de points $o, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ telle que

$$o\hat{p}a_n \leq \hat{a} \leq o\hat{p}a_{n+1}$$

Dès lors, la <u>partie entière</u> de la mesure de $\hat{a}$ par $\hat{u}$ est égale à n .
Si $a_n = a$, n est la <u>mesure (exacte)</u> de $\hat{a}$ par $\hat{u}$. Sinon, la mesure de $\hat{a}$ par $\hat{u}$ est encadrée par $[n, n+1]$.
Dans le cas où la mesure est encadrée (ou approximative) on peut souhaiter un encadrement plus fin . On adopte alors une unité plus petite ou mieux, on divise $\hat{u}$ en sous-unités .
Diviser $\hat{u}$ en 10 (ou 60 ou 400 ou 360 ou...) c(est trouver un angle $\hat{u}_1$ telle que la mesure entière de $\hat{u}$ par $\hat{u}_1$ est égal à 10 (ou 60 ou...)
Nous admettons qu'il existe un et un seul angle $\hat{u}_1$ ayant cette propriété . Pour mesurer $\hat{a}$ à l'aide de $\hat{u}$ et $\hat{u}_1$, on encadre d'abord $\hat{a}$ par des multiples entiers de $\hat{u}$ comme ci-dessus . Ensuite, on mesure l'angle $a_n\hat{p}a$ à l'aide de $\hat{u}_1$ pour obtenir un encadrement $[s,s+1]$.
Dès lors, la mesure (approchée) de $\hat{a}$ avec le système d'unités $\hat{u}$, $\hat{u}_1$ se lit : mesure de $\hat{a}$ égale $n\hat{u}$ et $s\hat{u}_1$.

<u>Exemples</u> : 1) Le système le plus classique utilise
$\hat{u}$ = degré (obtenu en divisant l'angle tour en 360)
$\hat{u}_1$ = minute (obtenue en divisant le degré en 60)
$\hat{u}_2$ = seconde (obtenue en divisant la minute en 60)
Ce système fait l'objet d'une notation standart illustrée par
31 degrés 43 minutes et 9 secondes = 31° 43' 9"
Vieux de plus de 3 000 ans, ce système présente de gros inconvénients et s'il demeure actuellement nécessaire de s'y initier parcequ'il est très répandu, il faut espérer qu'il évoluera vers un système plus souple comme le suivant .

2) Les calculatrices scientifiques se prêtent facilement au système
$\hat{u}$ = degré
$\hat{u}_1$ = 0,1 degré
$\hat{u}_2$ = 0,01 degré, etc.
Celui-ci permet de travailler avec la notation décimale comme pour les nombres réels et les longueurs .

3) L'unité la plus naturelle est le <u>tour</u> . Les autres systèmes peuvent être considérés comme des sous-systèmes d'unités de celui-ci car ils s'y réfèrent pour définir leur propre unité par division de l'angle tour .

4) Nous allons bientôt découvrir l'unité la plus importante sur le plan scientifique, à savoir le <u>radian</u>

EXERCICES . 13. Convertir en notation décimale

a) 10° 30' b) 16° 35' c) 171° 47' 15"

14. Convertir en degrés, minutes, secondes .

a) 10,13° b) 69,917° c) 38,7653°

15. La base d'un triangle isocèle mesure 20,6 mètres et l'angle à la base 49° 40' . Trouver la mesure des côtés égaux ainsi que la mesure de la hauteur .

16. Considérant que la Terre est une sphère de 6 375 kilomètres de rayon, trouver le rayon du 40^e parallèle de latitude

17. Trouver le périmètre d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de 45 mètres de rayon .

18. Pour déterminer la largeur d'une rivière, un arpenteur, d'un point c, vise un point b sur l'autre rive . Ensuite, tournant de 90° il mesure la distance ca = 226 m . Finalement, en a il mesure c$\hat{a}$b = 48° 20' . Trouver la largeur de la rivière .

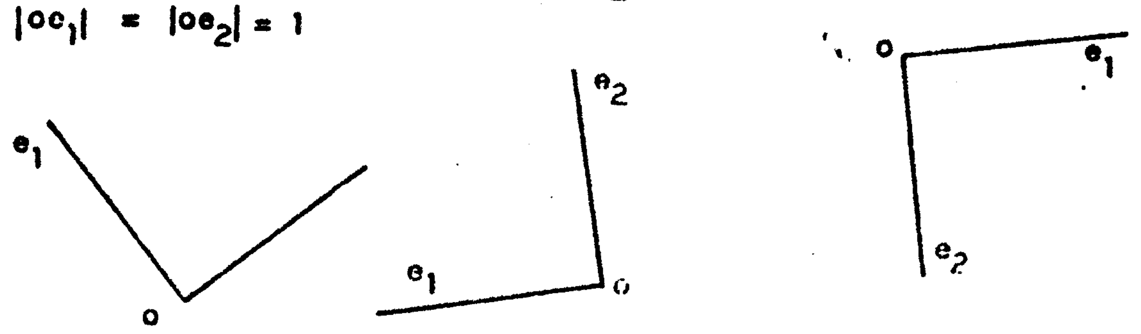
19. D'un point a au niveau du sol, les angles d'élévation du sommet d et de la base b d'un mât situé sur une colline mesurent 47° 54' et 39° 43' . Trouver la hauteur de la colline sachant que le mât mesure 116,5 mètres .

20. Un mur de 5 m de haut est à 3 m d'une maison . Trouver la longueur de la plus courte échelle qui effleure le haut du mur et atteint une fenêtre à 7 m du sol .

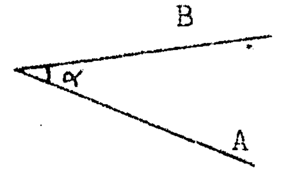
21. Une roue de 5 m de diamètre monte un plan incliné de 18° 20' . A quelle hauteur du sol se trouve le centre de la roue après qu'elle ait roulé 5 m sur le plan incliné ?

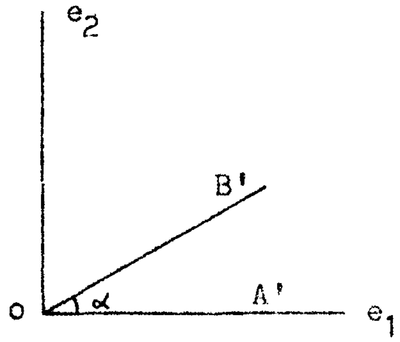
<u>SIMPLIFIER LES ANGLES</u> .

Partons du plan E^2 muni d'une unité de longueur 1
et d'un repère orthonormé constitué d'une origine $o = (0,0)$ et de deux points unités $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ tels que les droites oe_1 et oe_2 soient perpendiculaires et que $|oe_1| = |oe_2| = 1$



Voici la représentation la plus habituelle de cette situation .



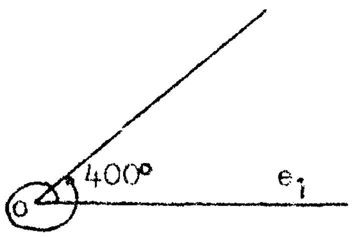


Si α est un angle du plan, de côtés A, B il existe un et un seul déplacement d de E^2 qui transforme A en la demi-droite $[oe_1$ et B en une demi-droite B' d'origine o . Comme d conserve les longueurs et l'orthogonalité, on voit que

$\sin \alpha = \sin d(\alpha)$, $\cos \alpha = \cos d(\alpha)$

$\mathrm{tg}\, \alpha = \mathrm{tg}\, d(\alpha)$

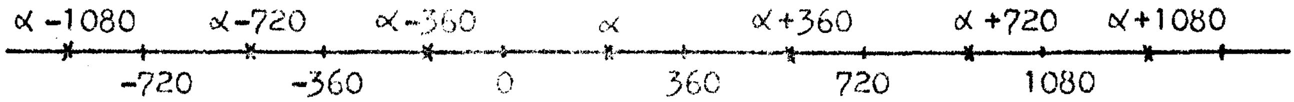
Dès lors l'étude des fonctions trigonométriques se ramène à des angles de sommet o dont $[oe_1$ est l'un des côtés . Un tel angle est entièrement déterminé par son deuxième côté, c'est à dire par une deuxième droite d'origine o . Si l'angle α est orienté, nous convenons toujours que le premier côté de α est $[oe_1$. Il en va de même si α est un angle-tour, par exemple 400° .



Donc, avec nos conventions, tout angle détermine une demi-droite d'origine o . En revanche, une demi-droite A d'origine o détermine une infinité d'angles-tours . Elle détermine un angle α compris entre 0° et 360° et les angles-tours

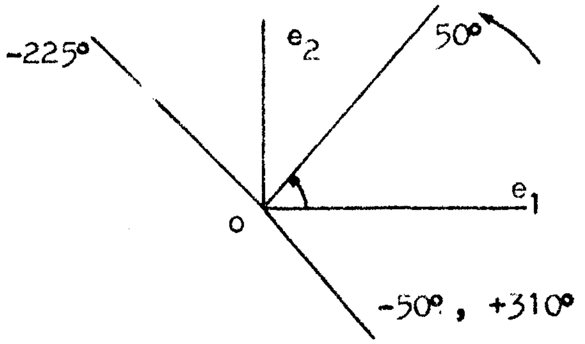
... $\alpha - 720°$, $\alpha - 360°$, $\alpha + 360°$, $\alpha + 720°$, $\alpha + 1080°$,...

ou $\boxed{\alpha + k\, 360° \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}}$

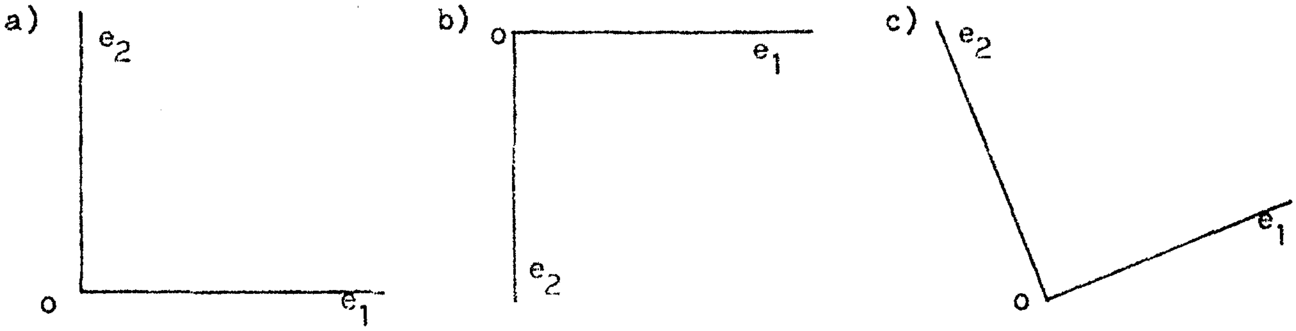


Si nous donnons un angle orienté par une mesure telle que 50° ou -50°, comment peut-il être reporté dans le repère considéré ?
En fait, il y a deux demi-droites d'origine o qui font un angle de 50° avec oe_1 . Laquelle choisir ? Cela exige une nouvelle convention et c'est ici que le point e_2 devient utile .
Pour une demi-droite partant de $[oe_1$ et balayant le plan en maintenant son origine en o (songer à un écran de radar) il y a deux sens de parcours possibles. L'un d'eux balaie $\overrightarrow{oe_2}$ avant $-\overrightarrow{oe_2}$ et l'autre balaie d'abord $-\overrightarrow{oe_2}$. C'est le premier qui est considéré comme positif . Avec le dessin habituel de $[oe_1$ (horizontal vers la droite) et de $[oe_2$ (vertical vers le haut), le sens de parcours positif est opposé à celui des aiguilles d'une montre qui serait placée à plat sur le plan .

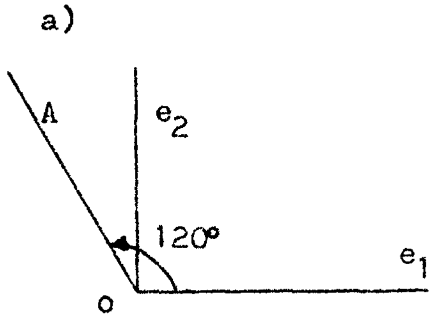
Par convention, le sens positif ou direct est donc <u>antihorlogique</u> ou contraire à celui des aiguilles d'une montre .
Voici quelques angles orientés représentés avec nos conventions .

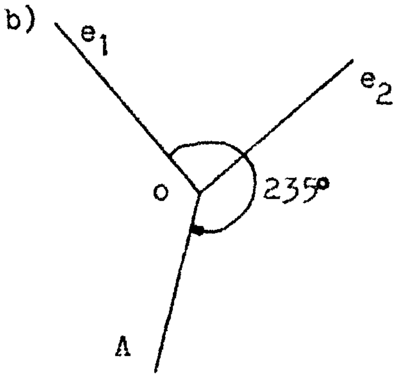


EXERCICES . 22. Dessiner dans les repères suivants les angles de
1) 50° 2) 130° 3) -60° 4) 75° 5) 10° 6) -15° 7) 800°
8) -730° 9) -1000° 10) 10000°



23. Quels sont tous les angles-tours représentés par A ?



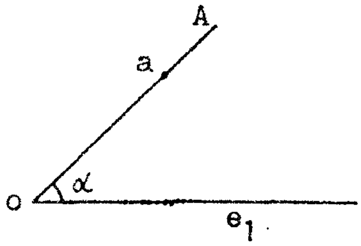


<u>NOUVELLES SIMPLIFICATIONS</u>

Nous venons de voir comment on peut remplacer tout angle (angle ordinaire, angle orienté, angle-tour) par une demi-droite du plan et comment une demi-droite représente une infinité d'angles-tours dont les mesures en degrés sont de la forme $\alpha + k\,360°$, $k \in \mathbb{Z}$
Ces nombres réels constituent une échelle ou graduation sur la droite : tout élément possède exactement deux voisins dans la graduation et la distance de deux points voisins quelconques est constante .

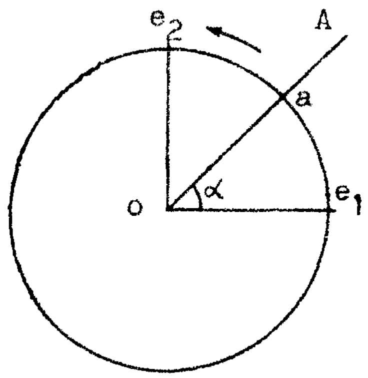
Considérons le cas particulier où $\alpha = 0$. On obtient alors la graduation constituée par les multiples entiers de $360°$. Dans le plan, on passe de ce cas à celui de l'angle α , par une rotation d'angle α . Sur la droite réelle, celle-ci se traduit par une translation d'amplitude α . Nous avons enroulé $\mathbb{R}$ sur un cercle de centre o ou déroulé celui-ci sur $\mathbb{R}$.

Reprenons la définition des fonctions trigonométriques . Dans celle-ci, on utilise un point $a \in A$ où A est la demi-droite représentant l'angle . Le théorème de Thalès montre que le choix de ce point ne modifie pas la valeur du cosinus, du sinus et de la tangente de l'angle α . Par conséquent, nous pouvons convenir de toujours choisir ce point à une distance unité de o .

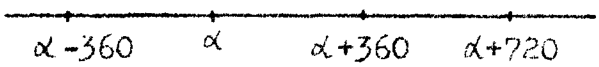


De cette façon, nous introduisons le cercle unité C de centre o et de rayon 1 . Ce cercle passe par e_1 et e_2 . A présent, tout angle détermine un point du cercle et tout point du cercle détermine une infinité d'angles-tours

$\alpha + k\,360°$, $k \in \mathbb{Z}$.



Nous voyons encore mieux ce que signifie l'enroulement de la droite réelle sur le cercle . Le rapporteur est un instrument basé sur ce principe .



Enfin, il est possible d'harmoniser la mesure des angles avec la mesure des arcs de cercle . En effet, $360°$ correspondent à un arc de cercle mesurant 2π. De ce fait, nous admettons sans peine que si α est un angle compris entre $0°$ et $360°$, on a

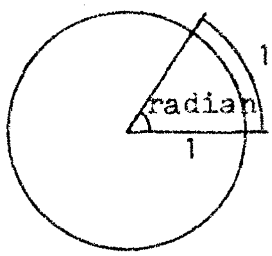
$$\frac{\text{mesure de } \alpha \text{ en degrés}}{360°} = \frac{\text{mesure arc de cercle } \widehat{e_1 a}}{2\pi R} \qquad (1)$$

où $R = 1$ représente le rayon du cerle .

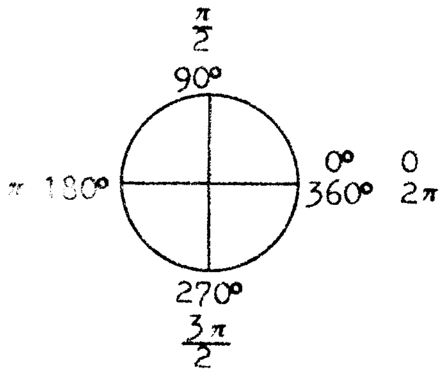
La formule (1) devient plus simple en adoptant la nouvelle unité de mesure d'angle : le radian .

Le radian est l'angle qui intercepte sur le cercle unité un arc de longueur égale à un (unité de longueur) .

En voici une représentation . Il revient au même de dire que le radian est l'angle qui vaut $\dfrac{\text{un tour}}{2\pi} \approx \dfrac{360°}{2 \times 3{,}14\ldots} \approx 57{,}296°$



En particulier $360° = 2\pi$ radians
$180° = \pi$ radians
$90° = \frac{\pi}{2}$ radians
$-45° = -\frac{\pi}{4}$ radians



Quel est donc l'avantage de cette idée à première vue étrange ? Grâce à elle la mesure de α (en radians) devient égale à la mesure de l'arc de cercle e_1a (voir formule (1)) .
Bref, grâce à nos simplifications et conventions, un angle s'identifie à une longueur et à un nombre réel . Ceci conduit à une dernière convention qui sera constamment utilisée dans l'étude des fonctions, en physique et dans d'autres domaines .

CONVENTION .

Une dernière simplification consiste à écrire 2π au lieu de 2π radians, α au lieu de α radians . Dès lors, si x est un nombre réel et que nous parlons de l'angle x, cela signifie l'angle dont la mesure en radians est égale à x . Cette convention enroule $\mathbb{R}$ sur le cercle unité en faisant coïncider tous les réels de la forme $x + k2\pi$,$k \in \mathbb{Z}$.
Cette convention n'est pas toujours respectée par les calculatrices scientifiques, pour elles, l'unité de convention (qu'il ne faut pas écrire) est souvent le degré .
Signalons à nouveau qu'une autre unité naturelle s'impose : l'angle-tour égal à 360° . Avec celle-ci $\mathbb{R}$ s'enroule sur le cercle unité en faisant coïncider tous les réels de la forme $x + k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi les entiers -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... viennent tous coïncider avec o sur le cercle unité .
Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to C : x \to$ angle x
Cette fonction applique $x + y$ sur angle $(x + y)$ = angle x + angle y
Elle conserve donc l'addition : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
Ceci revient à dire que si a et b sont des angles, il y a un angle somme $a + b$ dont la mesure est la somme des mesures de a et de b .
Est-ce à dire que le groupe $\mathbb{R}, +$ et le groupe des angles (ou des rotations de centre o) son isomorphes grâce à f ? Non ! Il manque une qualité essentielle à f : ce n'est pas une bijection .
Une infinité de réels sont appliqués sur un même angle .
De même, si x et y sont des réels $f(xy) = x\,f(y)$
ce qui revient à dire que si a est un réel et b un angle, il y a un angle ab dont la mesure est égale au réel ab .
Ici $f(xy) = f(x)f(y)$ n'aurait pas de sens car on ne multiplie pas deux angles entre eux que nous sachions .

EXERCICES . 24. Exprimer les angles suivants en radians

a) $30°$ b) $135°$ c) $25,5°$ d) $-75°$ e) $1000°$ f) $1°$ g) $\pi°$ h) $\frac{3\pi}{4}°$

i) $95° - 310°$ j) $5(37° + 42,3°)$

25. Exprimer les angles suivants en degrés (système décimal)

a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{-5\pi}{9}$ d) $\frac{2\pi}{5}$ e) 13π f) 1000π g) 38

h) -7 i) $\frac{4}{3}(36 + \pi)$ j) -10199,31

26. Une roue tourne à raison de 48 tours par minute ou 48 t/min . Exprimer cette vitesse angulaire en a) t/sec b) rad/min c) rad/sec d) deg/min

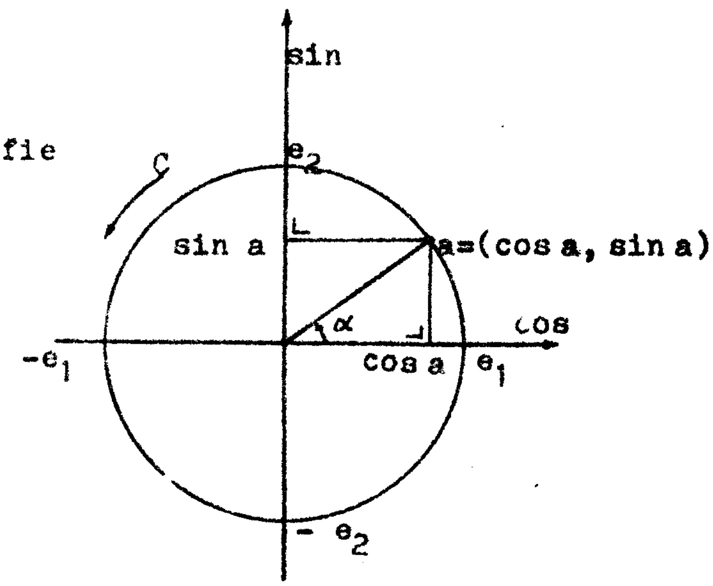
27. En admettant que la Terre est une sphère de 6373 km de rayon, trouver la distance à l'équateur, d'un point situé à 36° de latitude nord .

28. Deux villes situées à 434,5 km l'une de l'autre, se trouvent sur un même méridien . Trouver leur différence de latitude .

29. Une voiture longue de 4 m est représentée par un segment de droite [a,b] . Un observateur o, situé sur la perpendiculaire à ab, issue de a, voit la voiture sous un angle de 29° . A quelle distance de la voiture l'observateur se trouve-t-il ? (distance oa)

30. Rédiger un programme qui permette de convertir une mesure d'angle exprimée en degrés en une mesure exprimée en radians et vice-versa .

LE RETOUR DE COSINUS



Partons du cercle unité C et du repère orthonormé o, e_1, e_2 dans le plan E^2 . Un angle α s'identifie à un point a de C . Avec l'unité d'angle qu'est le radian, nous écrivons même $\alpha = a$.
Dans notre première étude du cosinus de α , $\cos\alpha$ ou cos a, nous considérons la projection orthogonale a' de a sur oe_1 et $\cos\alpha = \frac{oa'}{oa}$. Comme oa est de longueur 1, avec nos nouvelles conventions, $\cos\alpha$ s'identifie à la longueur oa' ou encore avec l'abscisse de a' dans le repère considéré .
Dans notre première étude, α est toujours considéré un angle aigu .

Et si α devient un angle, un réel quelconque ? Voici le maître - achat :

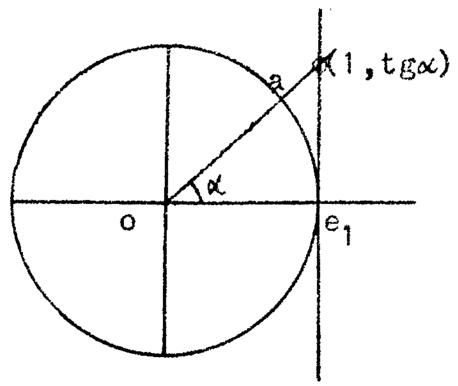
Le <u>cosinus</u> d'un angle α quelconque ($\alpha \in \mathbb{R}$) représenté par le point a C, est l'abscisse du point a dans le repère o, e_1, e_2 (abscisse de la projection orthogonale de a sur l'axe des cosinus . Le <u>sinus</u> de α ,($\alpha \in \mathbb{R}$) est l'ordonnée du point a dans le repère o, e_1, e_2 (abscisse de la projection orthogonale sur l'axe des sinus)

Bref, tout nombre réel x détermine un angle x ou un point x sur le cercle unité et les coordonnées de ce point dans le repère o, e_1, e_2 sont (cos x, sin x) . On est amené à écrire $x = (\cos x, \sin x)$

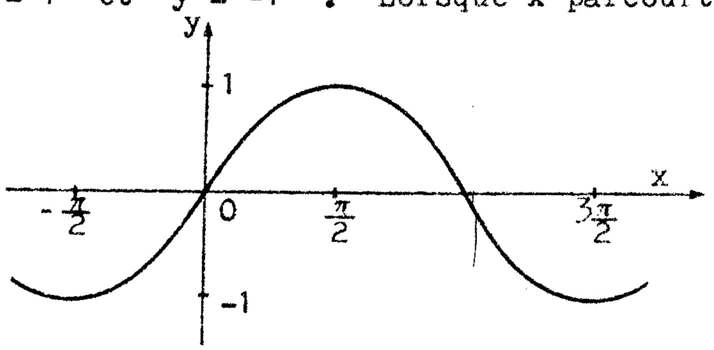
Et la tangente de x ? Nous décidons d'adopter la définition suivante

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Cette fonction a-t-elle une interprétation géométrique directe comme le sinus et le cosinus ? Nos élèves trouvent rapidement : la droite oa recoupe la tangente au cercle unité en e_1, en un point de coordonnées (1, tg α).

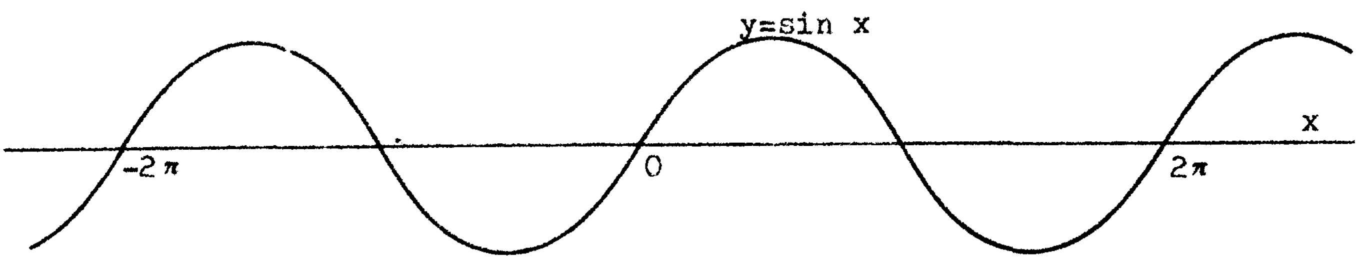


Notre arsenal de fonctions s'enrichit donc de nouveaux exemples . Nous sommes prêts à dessiner un graphique, en utilisant une calculatrice ou une table de valeurs de sin, cos, tg . Commençons par sin . Nous observons sur le cercle unité C que sin x varie dans $[-1, 1]$. Ainsi le graphique sera compris entre les droites d'équation y = 1 et y = -1 . Lorsque x parcourt $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ à partir de $-\frac{\pi}{2}$, la fonction sin est croissante . Ensuite elle décroit sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. La suite du graphique s'obtient en repétant ce motif par une translation d'amplitude 2π car la fonction est <u>périodique de période 2π</u> . En effet,

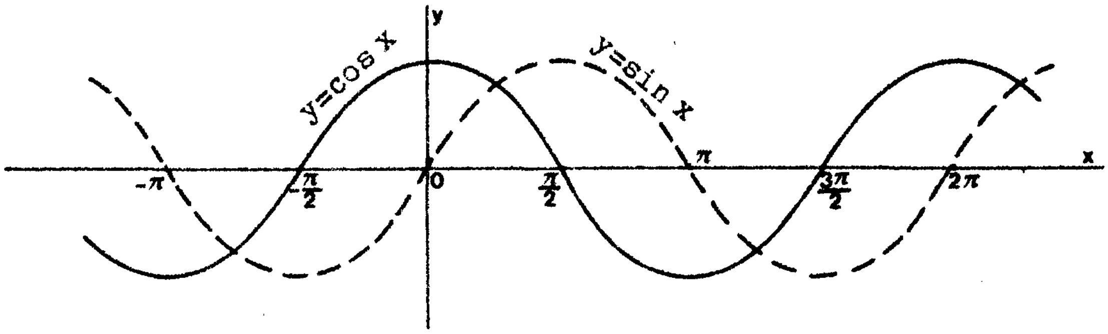


$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$

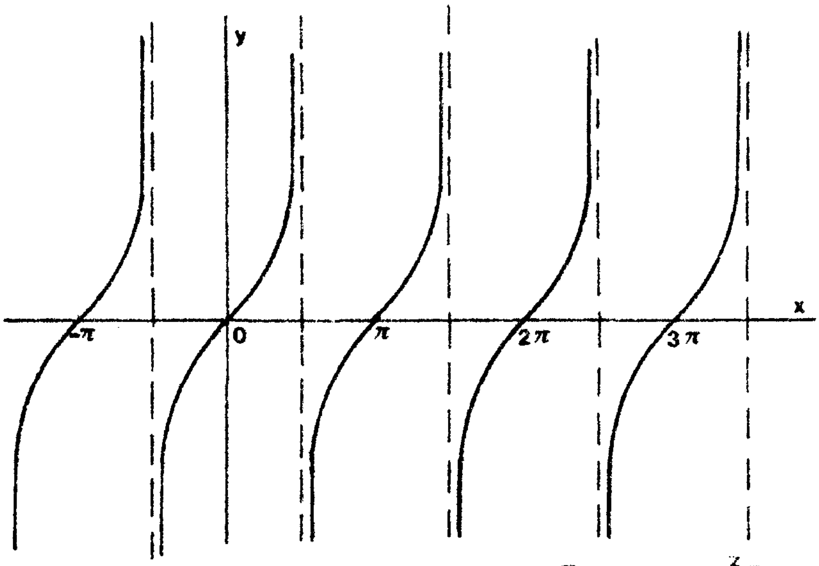
Voici le résultat .



Nous reprenons le travail pour cos et nous superposons les graphiques de cos et de sin . Voici le résultat .



Une observation s'impose : la courbe d'équation $y = \cos x$ semble être une translatée d'amplitude $-\frac{\pi}{2}$ de la courbe d'équation $y = \sin x$. C'est exact . Nous prouverons ceci dans un chapitre ultérieur .
Et le graphique de tangente ? Voici .



Le domaine de cette fonction cesse d'être $\mathbb{R}$. Il faut, en effet, écarter les valeurs de x pour lesquelles $\cos x = 0$, soit $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
La fonction tg est partout croissante . Elle est périodique de de période π . Nous voyons apparaître des asymptotes verticales $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, etc
c'est à dire des droites parallèles à l'axe des y, dont la courbe se rapproche de plus en plus, sans les atteindre .

<u>EXERCICES</u> . 31. Compléter

a) $\cos 90° =$	b) $\cos 0° =$	c) $\cos 180° =$	d) $\cos 750° =$
e) $\cos \frac{\pi}{3} =$	f) $\cos \frac{3\pi}{4} =$	g) $\cos (-\pi) =$	h) $\cos (-\frac{\pi}{2}) =$
i) $\cos 5 =$	j) $\cos 1 =$	k) $\sin 90° =$	l) $\sin 0° =$
m) $\sin 180°$	n) $\sin 750° =$	o) $\sin \frac{\pi}{3} =$	p) $\sin \frac{3\pi}{4} =$

q) $\sin(-\pi) =$ r) $\sin(-\frac{\pi}{2}) =$ s) $\sin(-2) =$ t) $\sin 400 =$

u) $\text{tg } 90° =$ v) $\text{tg } 0° =$ w) $\text{tg } 180° =$ x) $\text{tg } 750° =$

y) $\text{tg } \frac{\pi}{3} =$ z) $\text{tg } \frac{3\pi}{4} =$ α) $\text{tg } (-\pi) =$ β) $\text{tg } 9 =$

32. Une interprétation géométrique de tg x
Soit T la droite tangente au cercle unité en e_1 . Si a est le point représentant l'angle α sur le cercle unité, soit b le point $oa \cap T$.
Démontrer que $\text{tg}\,\alpha$ est l'ordonnée de point b .

33. Démontrer que $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

34. Etablir un graphique des fonctions suivantes
   a) $\text{cotg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}$
   b) $\sec : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$
   c) $f(x) = \sin x + 1$
   d) $f(x) = 2 \sin x$
   e) $f(t) = \cos 2t$
   f) $f(x) = \sin(x + 1)$

35. Démontrer que
   a) $\sin(-x) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   b) $\cos(-x) = \cos x$
   c) $\text{tg } (-x) = -\text{tg } x$
Quelle est la signification graphique de ces propriétés ?

36. Le moyen le plus économique de distribuer des stations relais de télévision à la surface de la Terre .
Soit S une sphère de rayon 1 et u un réel . Quel est le plus petit nombre de points sur S tel que tout point de S soit à une distance u au plus de l'un des points choisis ? (La réponse dépend de u)
Cet exercice est difficile . C'est plutôt un thème de recherche .

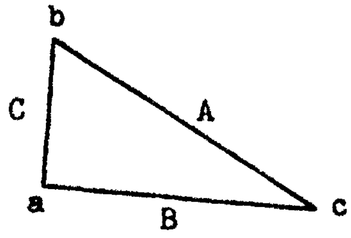
37. Le cercle unité est identifié à une roue qui tourne dans le sens positif, a une vitesse angulaire constante de une unité de longueur (ou d'angle) par unité de temps . Le point e_1 se trouvera à l'instant t, au point de coordonnées (cos t, sin t) .
Justifier .

38. Prouver que

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	quel que soit
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	le réel α
$\text{tg } (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{cotg } \alpha$	

RESUME

Définition des rapports trigonométriques dans un triangle rectangle .



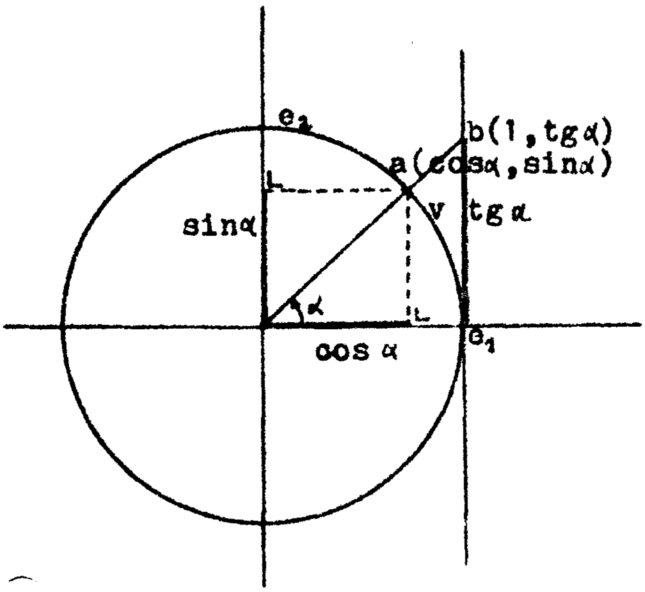
$$\sin b = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{B}{A} \qquad \sin c = \frac{C}{A}$$

$$\cos b = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{C}{A} \qquad \cos c = \frac{B}{A}$$

$$\text{tg } b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{B}{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \qquad \text{tg } c = \frac{C}{B}$$

Cercle trigonométrique - Cercle de rayon 1 .

Repère orthonormé (axes perpendiculaires et vecteurs unités de longueur 1)



Le <u>sinus</u> (<u>cosinus</u>) d'un angle quelconque représenté par un point a est l'ordonnée (abscisse) de a dans le repère o, e_1, e_2

La <u>tangente</u> de cet angle est l'ordonnée du point de la droite oa dont l'abscisse vaut 1 .

Le <u>degré</u> est l'angle obtenu en divisant un angle tour en 360 .

Le <u>radian</u> est l'angle qui intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de longueur égale à une unité de longueur .

1 radian ≈ 57,296...°

Quelques valeurs de rapports trigonométriques .

	0° = 0	30° = $\pi/6$	45° = $\pi/4$	60° = $\pi/3$	90° = $\pi/2$
sin α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	/

La sinusoïde .